

〈論 文〉

떡급수 반대칭하중을 받는 다층재 중앙균열의 응력세기계수

이강용* · 김성호** · 박문복*

(1994년 6월 7일 접수)

Stress Intensity Factor for Multi-Layered Material Under Polynomial Anti-Symmetric Loading

Kang Yong Lee, Sung Ho Kim and Moon Bok park

Key Words : Stress Intensity Factor(응력세기계수), Multi-Layered Material(다층재료), Center Crack(중앙균열), Integral Equation(적분방정식), Polynomial Anti-Symmetric Loading(떡급수 반대칭하중)

Abstract

A model is constructed to evaluate the stress intensity factors for a center crack subjected to polynomial anti-symmetric loading in a layered material. A Fredholm integral equation is derived by Fourier integral transform method. The integral equation is numerically analyzed to evaluate the effects of the ratios of shear modulus, Poisson's ratio and crack length to layer thickness as well as the number of layers on the stress intensity factor. The stress intensity factors are approached to constant values as the number of layers increase and decrease as the polynomial power of the loading increase. In case of the E-glass/Epoxy composite, dimensionless stress intensity factor is affected by cracked-resin layer thickness

1. 서 론

적층재료는 경량화, 고강성 등이 요구되는 각종 공학적 구조물에 다양하게 사용되고 있다. 이러한 적층재에 재료자체의 결함이나 사용중 접합 부위 주위에 균열이 발생하기 쉽다. 발생된 균열의 균열면에 작용하는 하중은 대칭하중(symmetric loading)과 반대칭하중(anti-symmetric loading)으로 대별할 수 있으며 균열거동을 선형파괴역학(linear elastic fracture mechanics) 관점에서 연구하기 위

해서는 응력세기계수(stress intensity factor)의 산출이 요구된다.

적층재의 균열면에 대칭하중이 작용하는 경우의 응력세기계수에 관한 연구로써, Hilton과 Sih^(1,2)는 2개의 반무한체에 접착된 이중탄성층 내부의 중앙 균열면에 적층면과 수직 또는 평행한 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 모드 I 응력세기계수를 산출하였다. Delale과 Erodogan⁽³⁾은 2개의 반무한체 사이에 접착된 비균질 접합층(nonhomogeneous interlayer)의 중앙균열면에 임의의 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Cauchy 특이적분방정식(Cauchy singular integral equation)을 유도하였으며 이로

*정회원, 연세대학교 기계공학과

**정회원, 국방과학연구소

부터 모드 I 응력세기계수를 산출하였다. 김성호 등^(4,5)은 2개의 반무한체 사이에 정착된 6개의 탄성층 내부 중앙균열면에 인장 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 모드 I, 모드 II 응력세기계수를 산출하였다. Erdogan과 Gupta⁽⁶⁾는 여러개의 등방탄성층으로 구성된 모델의 접합면(interface) 중앙균열면에 반평면 전단하중이 작용할 때 적분변환법을 이용하여 모드 III 응력세기계수를 산출하였다. Lin과 Keer⁽⁷⁾는 다층재 경계에 수직으로 존재하는 균열면에 단순 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 경계적분 방법(boundary integral formulation)을 이용하여 모드 I 응력세기계수를 산출하였다.

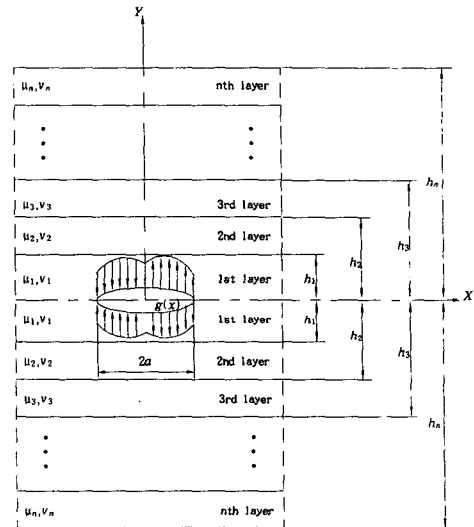
균열면에 반대칭하중이 작용하는 경우의 응력세기계수에 관한 연구로서, Isida^(8,9)는 무한체 중앙균열면에 대칭 및 반대칭하중을 포함하는 멱급수 인장하중(polynomial tensile loading)이 작용하는 경우에 대하여 각각 Laurent 복소응력 장전개법(Laurent expansions of complex stress potentials)을 이용하여 응력세기계수를 산출하였다. Chen⁽¹⁰⁾은 무한체 중앙균열면에 반대칭 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Abel 적분방정식(Abel integral equation)을 유도하였으며 이로부터 응력세기계수의 엄밀해를 얻었다. Chen과 Chang⁽¹¹⁾은 무한체 내부에 존재하는 다수의 정사균열(multiple inclined cracks) 면에 멱급수 인장 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 응력 및 변위성분을 산출하였으며 FEM에 의해 모드 I, 모드 II 응력세기계수를 계산하였다. 이강용 등⁽¹²⁾은 2개의 이종등방성 탄성층의 중앙균열면에 선형 반대칭하중이 작용하는 모델에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 모드 I 응력세기계수를 산출하였다.

그러나, 임의 적층개수로 이루어진 적층재의 중앙균열면에 멱급수 반대칭하중이 작용하는 경우에 대한 응력세기계수에 관한 연구는 찾아보기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 기존의 연구⁽¹²⁾를 확장하여 임의 개수의 탄성층으로 이루어진 다층재의 중앙균열면에 멱급수 반대칭하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하고 이로부터 수치해석적인 방법에 의하여 응력세기계수를 산출하고자 한다.

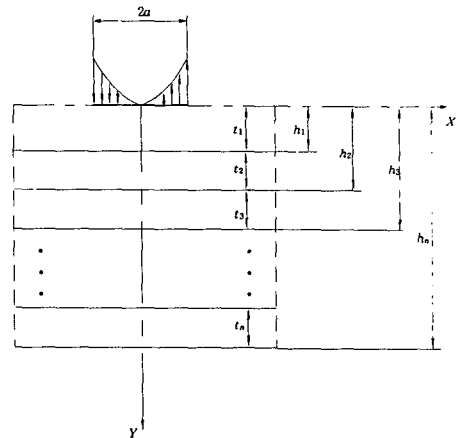
2. 이 론

2.1 기본방정식

균열모델은 Fig. 1(a)와 같다. 두께 $2h_1$ 의 제 1탄성층은 길이 $2a$ 의 균열을 내재하며 두께 $h_{j+1} - h_j$, $j=1, \dots, n-1$,를 갖는 $n-1$ 개의 인접 탄성층과 평행하게 경계를 이룬다. 각 탄성층은 이웃하는 탄성층과 완전히 정착되었고 제 1탄성층의 균열면에는 반대칭하중이 작용한다고 가정하였으며 기하학적인 대칭으로 인하여 Fig. 1(b)와 같이 단순화 하였다.



(a)



(b)

Fig. 1 Configuration of the model

선형탄성이론에 의하여 응력과 변위성분은 다음과 같이 Airy 응력함수를 Fourier sine 적분변환한 함수 G_j 의 적분형으로 표시된다. ⁽¹³⁾

$$\sigma_{xx(j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} \sin \xi x d\xi \quad (1a)$$

$$\sigma_{yy(j)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \xi^2 G_j \sin \xi x d\xi \quad (1b)$$

$$\sigma_{xy(j)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \xi \frac{\partial G_j}{\partial y} \cos \xi x d\xi \quad (1c)$$

$$u_{(j)} = \frac{-(1+\nu_j)}{\pi E_j} \int_0^\infty \left\{ (1-\nu_j) \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} + \nu_j \xi^2 G_j \right\} \cos \xi x d\xi / \xi \quad (1d)$$

$$v_{(j)} = \frac{(1+\nu_j)}{\pi E_j} \int_0^\infty \left[(1-\nu_j) \frac{\partial^3 G_j}{\partial y^3} + (\nu_j-2) \xi^2 \frac{\partial G_j}{\partial y} \right] \sin \xi x d\xi / \xi^2 \quad (1e)$$

여기서,

$$G_j(\xi, y) = \{A_j(\xi) + \xi y B_j(\xi)\} \cosh(\xi y) + \{C_j(\xi) + \xi y D_j(\xi)\} \sinh(\xi y) \quad (1f)$$

$j=1, \dots, n$

첨자 j 는 j 번째 탄성층을 뜻하며 $\sigma_{xx(j)}$, $\sigma_{yy(j)}$, $\sigma_{xy(j)}$ 및 u_j , v_j 는 각각 응력성분 및 변위성분을 나타낸다. ν_j , μ_j , E_j 는 각각 푸아송비, 전단계수 및 탄성계수이다. 그리고 $A_j(\xi)$, $B_j(\xi)$, $C_j(\xi)$, $D_j(\xi)$ 는 결정해야 할 미지수이다.

2.2 경계조건

$$\sigma_{yy(1)} = -g(x) \quad (-a < x < a, y=0) \quad (2a)$$

$$v_{(1)} = 0 \quad (x > a \text{ or } x < -a, y=0) \quad (2b)$$

$$\sigma_{xy(1)} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y=0) \quad (2c)$$

$$\sigma_{xy(j)} = \sigma_{xy(j+1)} \quad (-\infty < x < \infty, y=h_j, j=1, \dots, n-1) \quad (2d)$$

$$\sigma_{yy(j)} = \sigma_{yy(j+1)} \quad (-\infty < x < \infty, y=h_j, j=1, \dots, n-1) \quad (2e)$$

$$u_{(j)} = u_{(j+1)} \quad (-\infty < x < \infty, y=h_j, j=1, \dots, n-1) \quad (2f)$$

$$v_{(j)} = v_{(j+1)} \quad (-\infty < x < \infty, y=h_j, j=1, \dots, n-1) \quad (2g)$$

$$\sigma_{xy(n)} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y=h_n) \quad (2h)$$

$$\sigma_{yy(n)} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y=h_n) \quad (2i)$$

여기서, h_j , $j=1, \dots, n$ 는 j 번째 탄성층까지 두께이며 $g(x)$ 는 균열면에 작용하는 반대칭응력으로써 다음과 같다.

$$g(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}$$

$$= p_1 \frac{x}{a} + p_3 \left(\frac{x}{a}\right)^3 + p_5 \left(\frac{x}{a}\right)^5 + \dots \quad (k=1, \dots, n) \quad (2j)$$

여기서, p_{2k-1} 는 주어진 상수이다.

식(2a) ~ (2i)의 경계조건과 식(1a) ~ (1f)으로부터 다음과 같은 두개의 적분방정식(dual integral equation)을 구할 수 있다.

$$\int_0^\infty M(\xi) \sin \xi x d\xi = 0 \quad (|x| > a) \quad (3a)$$

$$\int_0^\infty \xi F(\xi) M(\xi) \sin \xi x d\xi = \pi g(x) \quad (|x| < a) \quad (3b)$$

여기서, $F(\xi)$ 와 $M(\xi)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$F(\xi) = \frac{\xi A_1(\xi)}{A_1(\xi)} \quad (4)$$

$$M(\xi) = \xi B_1(\xi) \quad (5)$$

$$B_1(\xi) = -C_1(\xi) \quad (6)$$

식(4)에서 $A_1(\xi)$ 는 다음같은 식으로부터 산출된다.

$$\vec{A} = \vec{Q}^{-1} \vec{W} \quad (7)$$

여기서,

$$\vec{A} = [A_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n]^T \quad (8)$$

$$\vec{W} = [W_1, W_2, W_3, W_4, \dots, W_{4n-2}]^T \quad (9)$$

여기서,

$$W_1 = \tanh(z_1) - z_1, \quad W_2 = -z_1 \tanh(z_1), \\ W_3 = -[\tanh(z_1 - 2z_1 \nu_1) + z_1], \\ W_4 = z_1 \tanh(z_1) - 2(1 - \nu_1), \quad W_5 = W_6 = \dots, \\ \dots = W_{4n-2} = 0, \quad z_j \equiv \xi h_j, \quad j=1, \dots, n \quad (10)$$

\vec{Q}^{-1} 는 부록에 정의되어 있으며 n 은 이종탄성층의 갯수이다.

2.3 Fredholm 적분방정식

$M(\xi)$ 를 다음과 같이 가정한다. ⁽¹⁴⁾

$$M(\xi) = \int_0^a \phi_k(t) J_1(\xi t) dt \quad (11)$$

여기서, $J_1(\xi t)$ 는 제 1종 1차 Bessel 함수이며 $\phi_k(t)$ 는 결정될 함수로서 균열면의 반대칭 응력 급수 성분 중 k 번째 항의 경우를 나타낸다. 식(11)은 식(3a)를 자동적으로 만족하며 식(11)을 식(3b)에 적용하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_k(s) + s \int_0^a \phi_k(t) \int_0^\infty \xi \{F(\xi) - 1\} J_1(\xi s) d\xi dt \\ = f_k(s) \end{aligned} \quad (12a)$$

여기서,

$$f_k(s) = 2s \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{q_k(x)x}{\sqrt{s^2-x^2}} dx \quad (12b)$$

$$q_k(x) = p_{2k-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} \quad (12c)$$

식(12)를 무차원화 하기 위하여 다음과 같이 무차원 변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{x} \equiv x/a, \quad \sigma \equiv s/a, \quad \tau \equiv t/a, \quad \alpha \equiv \xi a, \\ \phi_k(\sigma) \equiv \pi \phi_k(s) / p_{2k-1} a \sqrt{\sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)을 식(12a)에 대입하면 아래와 같은 제 2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of a second kind)이 유도된다.

$$\Phi_k(\sigma) + \int_0^\infty \Phi_k(\tau) K(\tau, \sigma) d\tau = f_k(\sigma) \quad (14a)$$

여기서,

$$f_k(\sigma) = \frac{\sigma p_{2k-1}}{k} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{\bar{x}^{2k} d\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2 - \bar{x}^2}} \quad (14b)$$

$$K(\tau, \sigma) \equiv \sqrt{\tau\sigma} \int_0^\infty \alpha \{F(\alpha/a) - 1\} J_1(\alpha\tau) J_1(\alpha\sigma) d\alpha \quad (14c)$$

2.4 수치해석 절차

식(14)에 Gaussian-Laguerre 적분법을 사용하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_k(\sigma_n) + \sum_{m=1}^{N_G} \Phi_k(\tau_m) K(\tau_m, \sigma_n) W(\tau_m) = f_k(\sigma_n) \\ n=1, \dots, N_G \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K(\tau_m, \sigma_n) \equiv \sqrt{\tau_m \sigma_n} \sum_{k=1}^{N_L} \alpha_k \{F(\alpha_k/a) - 1\} \\ J_1(\alpha_k \tau_m) J_1(\alpha_k \sigma_n) W(\alpha_k) \end{aligned} \quad (16)$$

N_G 는 Gaussian 적분점 개수, N_L 는 Laguerre 적분점 개수, $W(\tau)$ 는 Gaussian 적분가중함수(weight function), $W(\alpha)$ 는 Laguerre 적분가중함수이며 본 연구에서 수렴성을 검토한 후 수치해석에 사용된 적분점 개수는 $N_G=140$, $N_L=30$ 이다.

식(15)를 정방행렬로 만들기 위하여 적분점(integration point)인 τ_m 과 병치점(collocation point)인 σ_n 을 $\tau_n = \sigma_n$, $n=1, \dots, N_G$ 으로 하면 다음과 같

이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_G} [\delta_{mn} + K(\tau_m, \tau_n) W(\tau_m)] \Phi_k(\tau_m) = f_k(\tau_n) \\ n=1, \dots, N_G \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, δ_{mn} 는 Kronecker Delta이다. 따라서 식(17)에서 $\Phi_k(\tau_m)$ 을 수치해석적으로 산출할 수 있으며 식(7)~(10)에 의하여 미지수 $A_j(\xi)$, $B_j(\xi)$, $C_j(\xi)$, $D_j(\xi)$ 를 각각 구할 수 있다.

2.5 응력세기계수

균열 우측선단의 응력세기계수 K_{IR} 은 다음식에 의하여 구하여진다.⁽¹³⁾

$$K_{IR} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2\pi a(\bar{x}-1)} \sigma_{yy(1)}(\bar{x}, 0) \quad (18)$$

식(1b), (1f), (7), (11), (14)으로부터 $\sigma_{yy}(\bar{x}, 0)$ 에 대하여 정리하면 식(18)은 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} K_{IR} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^+} p_{2k-1} \sqrt{2\pi a(\bar{x}-1)} \\ \left[\frac{\phi_k(1)}{\sqrt{\bar{x}^2-1}} + \int_0^1 \frac{d}{dt} \{\sqrt{\tau} \phi_k(\tau)\} \right. \\ \left. \left\{ \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2-t^2}} + \int_0^\infty \{F(\alpha/a) - 1\} J_0 \right. \right. \\ \left. \left. (\alpha) \sin(\alpha\bar{x}) d\alpha \right\} d\tau \right] \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)에서 우변의 2번째 항은 특이성(angularity)을 포함하지 않으므로 균열 우측선단의 응력세기계수는 다음과 같다.

$$K_{IR} = - \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(1) p_{2k-1} \sqrt{\pi a} \quad (20)$$

유사한 방법으로 균열좌측 선단의 응력세기계수 K_{IL} 을 산출하면 다음과 같다.

$$K_{IL} = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(1) p_{2k-1} \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

여기에서 함수 $\phi_k(1)$ 은 재료물성 μ_j , ν_j 및 기하학적 변수 h_j , a 에 의해 결정되는 형상계수이다.

3. 수치해석 및 고찰

3.1 3개의 이중탄성층의 경우(n=3)

3개의 이중탄성층의 경우, 무차원 응력세기계수는 a/h_1 , a/h_2 , a/h_3 , $\Gamma_1(\equiv \mu_1/\mu_2)$, $\Gamma_2(\equiv \mu_2/\mu_3)$,

v_1, v_2, v_3 에 영향을 받는다.

3개의 이종탄성층의 두께가 일정한 경우 ($t_1=t_2=t_3=t_0$), 각 탄성층의 두께에 따라 균열우측 선단의 무차원 응력세기계수 ($K_I/\rho_{2k-1}\sqrt{\pi a}$)를 산출한 결과는 Fig. 2와 같으며 탄성층이 얇아짐에 따라 무차원 응력세기계수는 증가한다.

3.2 여러개의 이종탄성층의 경우

Fig. 3은 일정한 두께 ($t_1=t_2=\dots=t_n=t_0$)의 여러개의 탄성층으로 이루어진 적층재의 전단탄성계수가 적층방향에 대하여 감소 또는 증가하는 경우에 대하여 무차원 응력세기계수를 산출한 결과로써 탄성층의 수가 증가하면 일정한 값에 각각 수렴함을 알 수 있다. 또한 무차원 응력세기계수는 벽급수 누승(k)이 증가함에 따라 감소함을 알 수 있는데 이는 Isida⁽⁹⁾의 경향과 일치한다. 그리고 a, a_0 가 감소할수록 전단탄성계수비의 증감에 따른 무차원 응력세기계수 변화는 감소됨을 알 수 있다.

Fig. 4는 적층재 전체의 두께가 일정한 다층재 ($a/h_n=\text{constant}$)의 전단탄성계수가 적층방향에 대하여 감소 또는 증가하는 경우에 대하여 무차원 응력세기계수를 산출한 결과로서 탄성층의 수가 증가하고 인접한 각탄성층의 전단탄성계수가 적층방향에 대하여 감소하면 무차원 응력세기계수는 증가한다. 그러나 균열이 상대적으로 짧은 경우 ($a/h_n=0.1$), 이러한 전단탄성계수비의 영향이 감소

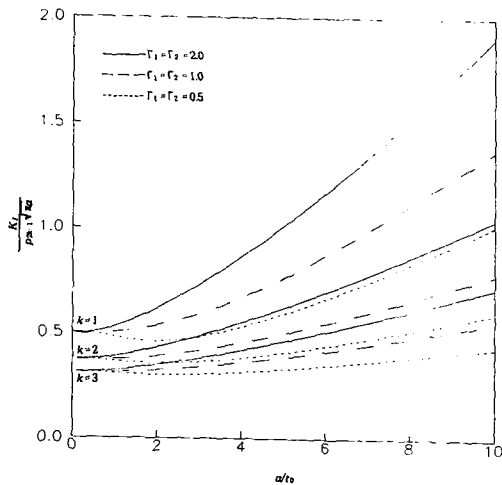
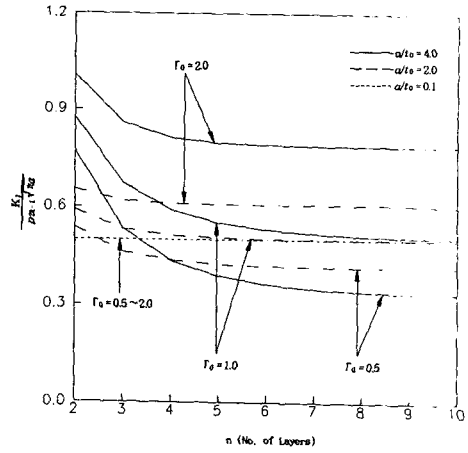
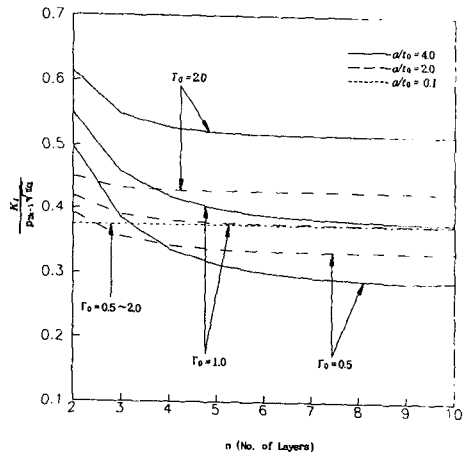


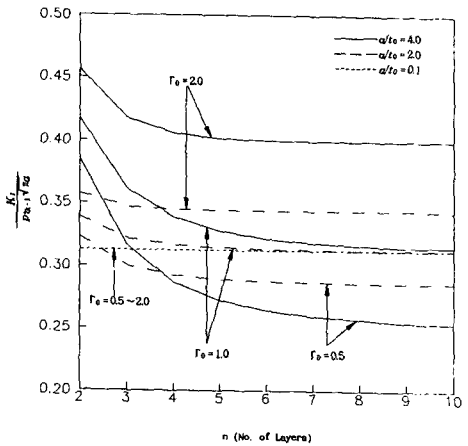
Fig. 2 Dimensionless stress intensity factor as a function of a/t_0 in three-layered material ($v_1=v_2=v_3=0.3$)



(a) $k=1$



(b) $k=2$



(c) $k=3$

Fig. 3 Dimensionless stress intensity factor as a function of the number of layers ($\Gamma_0=\Gamma_1=\Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ & $v_1=v_2, \dots, v_n=0.3$)

한다

Fig. 5는 E-glass/Epoxy 복합적층재의 경우로서 1, 3, 5, ..., n-1번째 탄성층은 레진층, 2, 4, 6, ..., n번째층은 섬유층으로 하였다. 여기에서 섬유층 전단계수는 $4.4 \times 10^6 \text{psi}$, 수지층 전단계수는 $0.19 \times 10^6 \text{psi}$, 섬유층과 수지층 푸아송비는 $0.3^{(15)}$ 이 사용되었다. 균열이 내재된 수지층의 두께가 타 수지층에 비하여 두꺼운 경우 ($t_j/t_1=1.0$, $j=2, \dots, n$) 동일한 경우 ($t_j/t_1=2.0$), 얇은 ($t_j/t_1=$

10.0) 경우로 각각 분류하여 수치해를 구하였으며 균열이 내재된 수지층이 두꺼운 경우에 무차원 응력세기계수는 균열이 내재된 수지층이 얇은 경우보다 크며 이는 Sih⁽¹⁵⁾의 결과와 같은 경향을 준다.

4. 결 론

이종재료로 구성된 다층재 내부 중앙균열면에 반대칭 하중이 작용하는 모델에 대하여 적분변환법을 사용하여 제 2종 Fredholm 적분방정식을 유도하여 수치 해석적 방법에 의해 응력세기계수를 산출하였다. 그 결과는 다음과 같다.

- (1) 산출된 응력세기계수는 2개의 이종탄성층 적층재의 경우에 대한 기준결과와 일치하였다.
- (2) 일정한 두께의 여러개의 탄성층으로 이루어진 적층재 조합의 전단탄성계수가 적층방향에 대하여 감소 또는 증가하는 경우 탄성층의 수가 증가하면 각각 일정한 값에 수렴하며 또한 역급수 누승이 증가함에 따라 무차원 응력세기계수는 감소한다.
- (3) 전체의 두께가 일정한 다층재의 전단탄성계수가 적층방향에 대하여 감소하고 탄성층의 수가 증가하면 무차원 응력세기계수는 증가한다.
- (4) E-glass/Epoxy 복합재에 대하여 균열이 내재된 수지층이 두꺼운 경우에 무차원 응력세기계수는 균열이 내재된 수지층이 얇은 경우에 비하여 크다.

참고문헌

- (1) Hilton, P. D. and Sih, G. C., 1970, "A Sandwiched Layer of Dissimilar Material Weakened by Crack Like Imperfections," *Proceedings of the Fifth South-Eastern Conference on the Theoretical and Applied Mechanics*, Edited by Rogers, G. L., Kranc, S. C. and Henneke, E. G., Vol. 5, pp. 123~149.
- (2) Hilton, P. D. and Sih, G. C., 1971, "A Laminate Composite with a Crack Normal to the Interface," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 913~930.
- (3) Delale, F. and Erdogan, F., 1988, "On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 317~324.

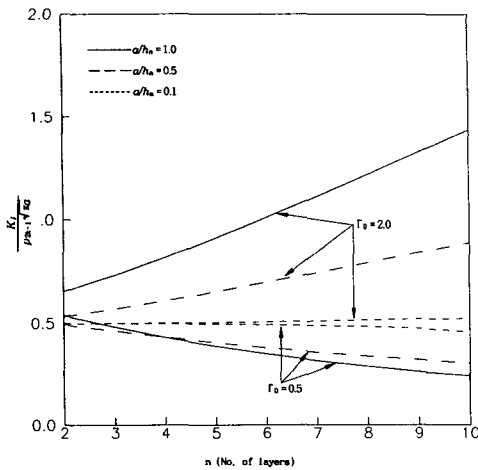


Fig. 4 Dimensionless stress intensity factor as a function of the number of layers for fixed $a/h_n(G_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1} \text{ \& } v_1 = v_2, \dots, v_n = 0.3, k = i)$

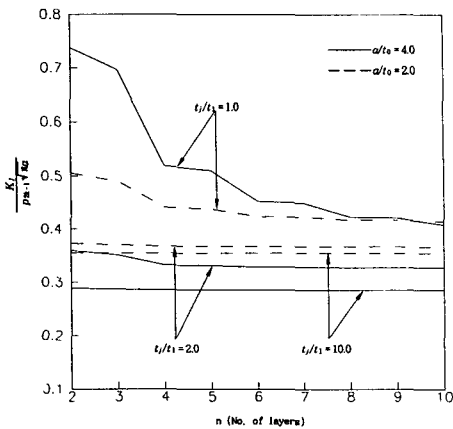


Fig. 5 The effect of cracked-resin layer thickness on the dimensionless stress intensity factor for E-glass epoxy composite ($\Gamma_{2j-1} = 0.043, \Gamma_{2j} = 23, 15, j = 1, \dots, n-1, \text{ \& } v_1 = v_2, \dots, v_n = 0.3, k = 1)$

- (4) 김성호, 오재협, 웅장우, 1991, "단순인장 하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회논문집, 제15권, 제5호, pp. 1611~1619.
- (5) 김성호, 오재협, 웅장우, 1992, "전단하중 하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 838~848.
- (6) Erdogan, F. and Gupta, G., 1971, "The Stress Analysis of Multi-layered Composites with a Flaws," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 39~61.
- (7) Lin, W. and Keer, L. M., 1989, "Analysis of a Vertical Crack in a Multilayered Medium," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 63~69.
- (8) Isida, M., 1971, "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates under Various Boundary Conditions," *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 7(3), pp. 301~316.
- (9) Isida, M., 1976, "Elastic Analysis of Cracks and Stress Intensity Factors"(in Japanese), *Fracture Mechanics and Strength of Materials 2*, Baifuukan, p. 128.
- (10) Chen, Y. Z., 1989, "Crack Problem in Plane Elastisit under Antisymmetric Loading," *International Journal of Fracture*, Vol. 41, pp. R29~R34.
- (11) Chen, W. H. and Chang, C. S., 1989, "Analysis of Two Dimensional Fracture Problems with Multiple Cracks under Mixed Boundary Conditions," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 4, pp. 921~934.
- (12) 이강용, 김성호, 박문복, 1994, "반대칭하중을 받는 적층재 중앙균열의 응력세기계수," 대한기계학회논문집, 제18권 제6호, pp. 1382~1387.
- (13) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., 1969, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, John Wiley and Sons Inc., U. S. A.
- (14) Copson, E. T., 1961, "On Certain Dual Integral Equations," *Proceeding of Glasgow Mathematical Association*, Vol. 5, pp. 19~24.
- (15) Sih, G. C. and Chen, E. P., 1981, *Cracks in Composite Materials*, Martinus Nijhoff Publishers.

부 록

식(7)에 정의된 \tilde{Q} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= 1 \\
 Q_{12} &= z_1 \tanh z_1 \\
 Q_{21} &= \tanh z_1 \\
 Q_{22} &= \tanh z_1 + z_1 \\
 Q_{31} &= 1 \\
 Q_{32} &= z_1 \tanh z + 2(1 - \nu_1) \\
 Q_{41} &= -\tanh z_1 \\
 Q_{42} &= \tanh z_1 + (1 - 2\nu_1) - z_1 \\
 Q_{1k} &= Q_{2k} = Q_{3k} = Q_{4k} = 0 \\
 &\quad (k = 7, \dots, 2n (n \geq 2)) \\
 \\
 Q_{(4j-3)(4j-1)} &= -1 \\
 Q_{(4j-3)(4j)} &= -Z_j \\
 Q_{(4j-3)(4j+1)} &= -\tanh z_j \\
 Q_{(4j-3)(4j+2)} &= -z_j \tanh z_j \\
 Q_{(4j-2)(4j-1)} &= -\tanh z_j \\
 Q_{(4j-2)(4j)} &= -z_j \tanh z_j - 1 \\
 Q_{(4j-2)(4j+1)} &= -1 \\
 Q_{(4j-2)(4j+2)} &= -\tanh z_j - z_j \\
 \\
 Q_{(4j-1)(4j-1)} &= -\Gamma_j \\
 Q_{(4j-1)(4j)} &= -\Gamma_j [2(\nu_{j+1} - 1) \tanh z_j - z_j] \\
 Q_{(4j-1)(4j+1)} &= -\Gamma_j \tanh z_j \\
 Q_{(4j-1)(4j+2)} &= -\Gamma_j [2(1 - \nu_j) + z_j \tanh z_j] \\
 Q_{(4j)(4j-1)} &= \Gamma_j \tanh z_j \\
 Q_{(4j)(4j)} &= \Gamma_j [-1 + 2\nu_{j+1} + z_j \tanh z_j] \\
 Q_{(4j)(4j+1)} &= \Gamma_j \\
 Q_{(4j)(4j+2)} &= \Gamma_j [(2\nu_{j+1} - 1) \tanh z_j + z_j] \\
 &\quad (j = 1, \dots, n-1, (n \geq 2)) \\
 \\
 Q_{(4j-3)(4j-5)} &= 1 \\
 Q_{(4j-3)(4j-4)} &= -z_j \\
 Q_{(4j-3)(4j-3)} &= \tanh z_j \\
 Q_{(4j-3)(4j-2)} &= z_j \tanh z_j \\
 Q_{(4j-2)(4j-5)} &= \tanh z_j \\
 Q_{(4j-2)(4j-4)} &= z_j \tanh z_j + 1 \\
 Q_{(4j-2)(4j-3)} &= 1 \\
 Q_{(4j-2)(4j-2)} &= \tanh z_j + z_j \\
 &\quad (j = 2, \dots, n, (n \geq 2)) \\
 \\
 Q_{(4j+3)(4j-1)} &= 1
 \end{aligned}$$

$$Q_{(4j+3)(4j)} = 2(1 - \nu_{j+1}) \tanh z_{j+1} + z_{j+1}$$

$$Q_{(4j+3)(4j+1)} = \tanh z_{j+1}$$

$$Q_{(4j+3)(4j+2)} = z_{j+1} \tanh z_{j+1} + 2(1 - \nu_{j+1})$$

$$Q_{(4j+4)(4j-1)} = -\tanh z_{j+1}$$

$$Q_{(4j+4)(4j)} = -z_{j+1} \tanh z_{j+1} + 1 - 2\nu_{j+1}$$

$$Q_{(4j+4)(4j+1)} = -1$$

$$Q_{(4j+4)(4j+2)} = \tanh z_{j+1} (1 - 2\nu_{j+1}) - z_{j+1}$$

$$(j=1, \dots, n-2, (n \geq 2))$$

여기서, 명시되지 않은 나머지항들은 전부 0이며 $\Gamma_j \equiv \mu_j / \mu_{j+1}$ 이고 μ_j 는 각 탄성층의 전단계수이다.