

〈論 文〉

적층복합평판을 위한 고차해석이론

신 용 석*

(1993년 5월 10일 접수)

A Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates

Yong-Seok Shin

Key Words : Laminated Composite Plates(적층복합평판), Higher-Order Shear Deformation Theory(고차 전단변형이론), Transverse Shear Deformation(횡전단변형), Interface Continuity Condition(층간 연속조건), Cross-ply Laminates(직교적층)

Abstract

A higher-order laminated plate theory including the effect of transverse shear deformation is developed to calculate the gross response and the detailed stress distribution. The theory satisfies the continuity condition of transverse shear stress, and accounts for parabolic variation of the transverse shear stresses through the thickness of each layer. Exact closed-form solutions of cross-ply laminates are obtained and the results are compared with three-dimensional elasticity solutions and a simple higher-order theory solutions. The results of the present work exhibit acceptable accuracy when compared to the three-dimensional elasticity solutions.

기 호 설 명

- a, b : 평판의 길이 및 폭
 $d^{(k)}$: 평판의 중심으로부터 k 층 중심까지의 거리
 h : 평판의 두께
 N : 적층복합평판의 전체 적층수
 $N_{ij}, M_{ij}, R_{ij}, P_{ij}$: 합응력성분
 $[Q_{ij}]^{(k)}$: k 층의 변환강성행렬
 q : 횡하중
 $S_i^{(k)}$: k 층의 컴플라이언스행렬 성분
 $t^{(k)}$: k 층의 두께
 $u_i^{(k)}$: k 층의 변위
 u_{0i} : 평판중심의 평면변위
 $u_{ci}^{(k)}$: k 층 중심의 평면변위
 w : 평판의 횡변위
 $\psi_i^{(k)}$: k 층 중심의 횡전단변형률
 $\phi_i^{(k)}$: k 층과 $k+1$ 층 사이의 횡전단응력

1. 서 론

최근 항공우주분야 뿐만 아니라 자동차 및 스포츠용품 등 여러분야에서 구조물의 경량화 설계를 위해 많은 종류의 복합재료들이 개발되고 있으며, 그 응용의 범위가 넓어지고 있다. 적층복합평판(laminated composite plates)은 조직 특성이 다른 층들이 적층(stackings)되어 이루어진 평판으로 고강도와 고강성을 유지하며 구조물을 경량화시킬수 있는 잇점이 있는 반면 평판의 거동해석, 즉 층간응력, 평면변위 및 휨 등의 해석에는 문제의 복잡성으로 인한 어려움이 따르게 된다. 특히 두꺼운 적층복합평판의 거동은 각 층의 횡전단변형(transverse shear deformation)에 크게 영향을 받으므로 고전적인 평판이론에 의한 거동해석은 많은 오차를 수반하게 된다.

*정회원, 육군사관학교 기계과

이러한 문제점을 극복하기 위하여 일찌기 직교이방성(orthotropic) 적층평판을 위한 미소변위이론(small-deflection theory)이 Libove와 Batdorf⁽¹⁾에 의하여 개발되었으나, 적층평판의 여러층을 하나의 층으로 가정하고 유효 재료상수(effective material constant)를 사용하여 해석하였기 때문에 전단변형의 영향을 충분히 고려할 수 없었다. 따라서 고등복합재료의 발달과 함께 많은 연구자들에 의해 각 층의 재료특성(lamina properties)을 고려할 수 있는 해석이론들이 개발되어 왔다. 그러나 Reissner-Mindlin 평판이론의 일반적인 형태인 1차 전단변형이론(first-order shear deformation theory)^(2,3)에서는 각 층의 횡전단응력들을 상수값으로 해석하게 되므로 평판 상·하부 표면에서 횡방향 전단응력이 존재하지 않는 경계조건(stress-free boundary conditions)을 만족할 수 없었고, 평판의 전단강도 특성을 고려하기 위해 전단보정상수(shear correction coefficient)를 사용하여야 했다. 이를 보완하기 위하여 Whitney⁽⁴⁾는 1차전단변형이론을 토대로 전단응력 분포를 적분하여 평면변위(inplane displacements)를 구하는 고차해석방법(higher-order approximation)을 발표하였으나 변환된 응력들이 평판의 평형방정식을 만족시키지 못했다. 다른 해석방법으로, Lo, Christensen과 Wu⁽⁵⁾에 의해 평면변위 및 횡변위를 평판두께의 고차함수로 가정하는 고차 전단변형이론(higher order shear deformation theory)이 개발되고, Reddy⁽⁶⁾가 이를 발전시켜 평판 표면의 전단응력 경계조건을 적용하여 단순화한 고차 해석이론을 발표하였으나 층간 횡전단응력의 연속조건(continuity condition of transverse shear stress)을 만족시키지 못했다. 반면 위의 두 조건, 즉 평판표면의 경계조건과 층간 연속조건을 만족하는 해석이론이 Toledano와 Murakami⁽⁷⁾에 의하여 Reissner의 Mixed variational principle⁽⁸⁾을 토대로 개발되었으나 개별 층의 평면변위를 선형분포로 가정하기 때문에 각 층에서의 전단변형률(shear strains)을 상수값으로 해석할 수 밖에 없고, 또한 층간 전단응력의 연속조건을 만족하기 위한 시험전단응력장(trial transverse stress field)을 결정해야하는 해석상 매우 복잡한 문제점을 지니고 있다.

따라서 본 연구에서는 적층복합평판을 3차원 탄성이론(3-dimensional elasticity)으로 해석한 Pagan⁽⁹⁾의 결과에서 보여준 횡전단변형의 영향을

충분히 고려하기 위하여 평판표면의 경계조건과 층간 변위 및 전단응력의 연속조건을 만족하고, 각 층의 횡전단응력 분포를 포물선(parabolic)형태로 나타낼 수 있는 평판해석 방법의 개발에 그 목적을 두었다. 이를 위해 Reddy의 고차해석이론에 적용되었던 변위기준이론(displacement based theory)을 기초로 적층복합평판을 위한 고차 전단변형이론을 개발하고, 해석결과와 검증 및 정확도를 확인하기 위해 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교 고찰하였다.

2. 이론전개 및 수식화

2.1 변위 및 변형률

본 연구에서 적층복합평판의 횡변위(transverse deflection)는 평판내부에서 일정하게, 평면변위(inplane displacements)는 임의의 평면함수, η_i, ξ_i, ζ_i 와 두계방향 변수, z 에 대한 3차식으로 가정되었으며, 가정된 임의의 평면함수는 변위 및 층간 횡전단응력의 연속조건(interface continuity condition)을 만족시키는 과정에서 각 층의 중심에서의 횡전단변형률(transverse shear strain)과 층간 횡전단응력(transverse shear stress)의 함수로 정의되었다. 즉, 임의의 k 층에 대한 변위는 Fig. 1의 좌표계에서 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_{ci}^{(k)}(x, y) + \{z - d^{(k)}\} \eta_i^{(k)}(x, y) \\ &\quad + \{z - d^{(k)}\}^2 \xi_i^{(k)}(x, y) \\ &\quad + \{z - d^{(k)}\}^3 \zeta_i^{(k)}(x, y) \\ u_i^{(k)} &= w(x, y) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $d^{(k)}$ 는 평판의 중심(midplane of plate)으로부터 k 층 중심까지의 거리이며 $u_i^{(k)}$ 는 k 층 중심의 평면변위를 나타낸다. 이때 평면변위의 층간 연속조건과 평판의 위와 아래면에서의 평면변위, u_i^T 및 u_i^b 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u_i^T &= u_i^{(1)}\left(x, y, d^{(1)} - \frac{t^{(1)}}{2}\right) \\ u_i^{(k-1)} &\left(x, y, d^{(k-1)} + \frac{t^{(k-1)}}{2}\right) \\ &= u_i^{(k)}\left(x, y, d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}\right) \\ u_i^b &= u_i^{(N)}\left(x, y, d^{(N)} + \frac{t^{(N)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 식(2)로부터 임의의 k 층 중심에서의 평

면변위는

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= \frac{(u_i^T + u_i^I)}{2} - \frac{t^{(k)2}}{4} \xi_i^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} + \frac{t^{(n)3}}{8} \zeta_i^{(n)} \right) \\ &- \sum_{n=k+1}^N \left(\frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} + \frac{t^{(n)3}}{8} \zeta_i^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

으로 구해진다. 여기서 $(u_i^T + u_i^I)/2$ 를 u_{0i} 로 정의할 때, 식(1)에서 가정된 평면변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_{0i} + (z - d^{(k)}) \eta_i^{(k)} \\ &+ \left\{ (z - d^{(k)})^2 - \frac{t^{(k)2}}{4} \right\} \xi_i^{(k)} \\ &+ (z - d^{(k)})^3 \zeta_i^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} + \frac{t^{(n)3}}{8} \zeta_i^{(n)} \right) \\ &- \sum_{n=k+1}^N \left(\frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} + \frac{t^{(n)3}}{8} \zeta_i^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

이때, 임의의 평면함수 η_i, ξ_i, ζ_i 들은 횡전단응력의 연속조건으로부터 구해질 수 있다. 즉, 식(4)의 평면변위로부터 각 층의 횡전단변형률을 구하면

$$\begin{aligned} \gamma_{i3}^{(k)} &= \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ &= \eta_i^{(k)} + 2(z - d^{(k)}) \xi_i^{(k)} \\ &+ 3(z - d^{(k)})^2 \zeta_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (5)$$

의 관계를 얻을 수 있으며, 각 층 중심의 횡전단변형률을 $\psi(x, y)^{(k)}$ 로 정의하면 식(5)로부터 다음과 같이 그 값을 나타낼 수 있다.

$$\gamma_{i3}^{(k)}(x, y, d^{(k)}) = \psi_i^{(k)} = \eta_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (6)$$

또한 전단응력의 연속조건에 의해 하나의 값을 갖는 층간 횡전단응력을 $\phi_i(x, y)$ 로 정의하고 k 층과 $k+1$ 층 사이의 횡방향 전단응력을 $\phi_i^{(k)}$ 로 표현하면, 임의의 k 층에서 위와 아래면의 층간 횡전단변형률은

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(k)} &\left(x, y, d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2} \right) \\ &= S_{ij}^{(k)} \phi_j^{(k-1)} \\ &= \eta_i^{(k)} - t^{(k)} \xi_i^{(k)} + \frac{3}{4} t^{(k)2} \zeta_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ \gamma_i^{(k)} &\left(x, y, d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2} \right) \\ &= S_{ij}^{(k)} \phi_j^{(k)} \end{aligned}$$

$$= \eta_i^{(k)} + t^{(k)} \xi_i^{(k)} + \frac{3}{4} t^{(k)2} \zeta_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있으며, $\phi_i^{(0)}$ 와 $\phi_i^{(N)}$ 는 평판의 위와 아래면에서 횡전단응력이 존재하지 않는 경계조건으로부터 0이 된다. 이때, $S_{ij}^{(k)}$ 는 횡전단응력과 변형률의 관계로부터 아래와 같이 표현된다.

$$S_{ij}^{(k)} = \frac{1}{(Q_{44} Q_{55} - Q_{45}^2)^{(k)}} \begin{bmatrix} Q_{44} & -Q_{45} \\ -Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (8)$$

따라서 식(1)에서 가정된 임의의 평면함수들은 식(6)과 식(7)로부터 다음과 같이 구해지게 된다.

$$\begin{aligned} \eta_i^{(k)} &= \frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i^{(k)} \\ \xi_i^{(k)} &= \frac{1}{2t^{(k)}} S_{ij}^{(k)} (\phi_j^{(k)} - \phi_j^{(k-1)}) \\ \zeta_i^{(k)} &= \frac{2}{3t^{(k)2}} \{ S_{ij}^{(k)} (\phi_j^{(k)} + \phi_j^{(k-1)}) - 2\psi_j^{(k)} \} \end{aligned} \quad (9)$$

그러므로 식(4)로 표현된 적층복합평판의 평면변위는 각 층 중심의 횡전단변형률, $\psi_i^{(k)}$ 와 층간 횡전단응력, $\phi_i^{(k)}$ 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_{0i} - z \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ &+ (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3)^{(k)} \psi_i^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^{(n)}}{3} \psi_i^{(n)} - \sum_{n=k+1}^N \frac{t^{(n)}}{3} \psi_i^{(n)} \\ &+ \left\{ (b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z^3)^{(k)} S_{ij}^{(k)} \right. \\ &+ \left. \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{ij}^{(k-1)} \right\} \phi_j^{(k-1)} \\ &+ \left\{ (c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + c_4 z^3)^{(k)} S_{ij}^{(k)} \right. \\ &- \left. \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{ij}^{(k+1)} \right\} \phi_j^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{k-2} \left(\frac{t^{(n)}}{12} S_{ij}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{12} S_{ij}^{(n+1)} \right) \phi_j^{(n)} \\ &- \sum_{n=k+1}^{N-1} \left(\frac{t^{(n)}}{12} S_{ij}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{12} S_{ij}^{(n+1)} \right) \phi_j^{(n)} \end{aligned} \quad (10)$$

위에서 N 는 전체 적층수이며 두께방향 변수, z 에 대한 상수값들은

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3)^{(k)} \\ &= (z - d^{(k)}) - \frac{4(z - d^{(k)})^3}{3t^{(k)2}} \\ &(b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z^3)^{(k)} \\ &= \frac{t^{(k)}}{8} - \frac{(z - d^{(k)})^2}{2t^{(k)}} + \frac{2(z - d^{(k)})^3}{3t^{(k)2}} \end{aligned}$$

$$(c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + c_4 z^3)^{(k)} = -\frac{t^{(k)}}{8} + \frac{(z-d^{(k)})^2}{2t^{(k)}} + \frac{2(z-d^{(k)})^3}{3t^{(k)2}} \quad (11)$$

이다. 따라서 변위-변형률 관계로부터 다음과 같은 적층복합평판의 변형률을 구할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ &= \varepsilon_{ij}^{0(k)} + z\varepsilon_{ij}^{1(k)} + z^2\varepsilon_{ij}^{2(k)} + z^3\varepsilon_{ij}^{3(k)} \\ \varepsilon_{i3}^{(k)} &= \frac{1}{2}(u_{i,3} + w_{,i}) \\ &= \varepsilon_{i3}^{0(k)} + z\varepsilon_{i3}^{1(k)} + z^2\varepsilon_{i3}^{2(k)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{i,j}^{0(k)} &= u_{0i,j} + u_{0j,i} \\ &+ a_1^{(k)}(\psi_{i,j}^{(k)} + \psi_{j,i}^{(k)}) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^{(n)}}{3}(\psi_{i,j}^{(n)} + \psi_{j,i}^{(n)}) \\ &- \sum_{n=k+1}^N \frac{t^{(n)}}{3}(\psi_{i,j}^{(n)} + \psi_{j,i}^{(n)}) \\ &+ \left(b_1^{(k)} S_{im}^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{im}^{(k-1)} \right) \phi_{m,j}^{(k-1)} \\ &+ \left(b_1^{(k)} S_{jm}^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{jm}^{(k-1)} \right) \phi_{m,i}^{(k-1)} \\ &+ \left(c_1^{(k)} S_{im}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{im}^{(k+1)} \right) \phi_{m,j}^{(k)} \\ &+ \left(c_1^{(k)} S_{jm}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{jm}^{(k+1)} \right) \phi_{m,i}^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{k-2} \frac{1}{12} \left\{ (t^{(n)} S_{im}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{im}^{(n+1)}) \phi_{m,j}^{(n)} \right. \\ &\left. + (t^{(n)} S_{jm}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{jm}^{(n+1)}) \phi_{m,i}^{(n)} \right\} \\ &- \sum_{n=k+1}^{N-1} \frac{1}{12} \left\{ (t^{(n)} S_{im}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{im}^{(n+1)}) \phi_{m,j}^{(n)} \right. \\ &\left. + (t^{(n)} S_{jm}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{jm}^{(n+1)}) \phi_{m,i}^{(n)} \right\} \\ 2\varepsilon_{i3}^{1(k)} &= -2w_{,i} + a_2^{(k)}(\psi_{i,j}^{(k)} + \psi_{j,i}^{(k)}) \\ &+ b_2^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k-1)}) \\ &+ c_2^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \\ 2\varepsilon_{i3}^{2(k)} &= a_3^{(k)}(\psi_{i,j}^{(k)} + \psi_{j,i}^{(k)}) \\ &+ b_3^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k-1)}) \\ &+ c_3^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \\ 2\varepsilon_{i3}^{3(k)} &= a_4^{(k)}(\psi_{i,j}^{(k)} + \psi_{j,i}^{(k)}) \\ &+ b_4^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k-1)}) \\ &+ c_4^{(k)}(S_{im}^{(k)} \phi_{m,j}^{(k)} + S_{jm}^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \\ 2\varepsilon_{i3}^{0(k)} &= \{ a_2^{(k)} \psi_{i,j}^{(k)} + S_{im}^{(k)} (b_2^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + c_2^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \} \\ 2\varepsilon_{i3}^{1(k)} &= 2 \{ a_3^{(k)} \psi_{i,j}^{(k)} + S_{im}^{(k)} (b_3^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + c_3^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \} \\ 2\varepsilon_{i3}^{2(k)} &= 3 \{ a_4^{(k)} \psi_{i,j}^{(k)} + S_{im}^{(k)} (b_4^{(k)} \phi_{m,j}^{(k-1)} + c_4^{(k)} \phi_{m,i}^{(k)}) \} \end{aligned}$$

2.2 평형방정식의 구성

적층복합평판에서 두께가 일정한 임의의 k 층에 대한 응력과 변형률의 관계는 평면응력상태에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (14)$$

이때, $Q_{ij}^{(k)}$ 는 평판좌표계로 변환된 적층판의 강성행렬(transformed stiffness matrix)이다.

식(10)으로 유도된 변위성분과 식(14)의 응력-변형률 관계로부터 적층복합평판의 거동해석을 위한 평형방정식(equilibrium equations)을 유도하기 위해서 아래와 같은 가상일의 원리(principle of virtual displacements)를 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{23} \delta \gamma_{23} \\ &+ \sigma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \\ &- \int_A q \delta w dA \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_A [N_{ij}^{(k)} (\delta u_{0i,j} + \delta u_{0j,i}) \\ &- 2M_{ij}^{(k)} \delta w_{,ij} + (a_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + a_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} \\ &+ a_3^{(k)} R_{ij}^{(k)} + a_4^{(k)} P_{ij}^{(k)}) (\delta \psi_{i,j}^{(k)} + \delta \psi_{j,i}^{(k)}) \\ &+ (a_2^{(k)} N_{i3}^{(k)} + 2a_3^{(k)} M_{i3}^{(k)} + 3a_4^{(k)} R_{i3}^{(k)}) \delta \psi_{i,3}^{(k)} \\ &+ (b_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + b_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} + b_3^{(k)} R_{ij}^{(k)} \\ &+ b_4^{(k)} P_{ij}^{(k)}) (S_{im}^{(k)} \delta \phi_{m,j}^{(k-1)} + S_{jm}^{(k)} \delta \phi_{m,i}^{(k-1)}) \\ &+ (b_2^{(k)} N_{i3}^{(k)} + 2b_3^{(k)} M_{i3}^{(k)} + 3b_4^{(k)} R_{i3}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \delta \phi_m^{(k-1)} \\ &+ \frac{t^{(k-1)}}{12} N_{ij}^{(k)} (S_{im}^{(k-1)} \delta \phi_{m,j}^{(k-1)} \\ &+ S_{jm}^{(k-1)} \delta \phi_{m,i}^{(k-1)}) + (c_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + c_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} \\ &+ c_3^{(k)} R_{ij}^{(k)} + c_4^{(k)} P_{ij}^{(k)}) (S_{im}^{(k)} \delta \phi_{m,j}^{(k)} + S_{jm}^{(k)} \delta \phi_{m,i}^{(k)}) \\ &+ (c_2^{(k)} N_{i3}^{(k)} + 2c_3^{(k)} M_{i3}^{(k)} + 3c_4^{(k)} R_{i3}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \delta \phi_m^{(k)} \\ &- \frac{t^{(k+1)}}{12} N_{ij}^{(k)} (S_{im}^{(k+1)} \delta \phi_{m,j}^{(k)} + S_{jm}^{(k+1)} \delta \phi_{m,i}^{(k)}) \\ &+ N_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ \frac{t^{(n)}}{12} (S_{im}^{(n)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right. \\ &\left. + \frac{t^{(n+1)}}{12} (S_{im}^{(n+1)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n+1)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right\} \\ &- N_{ij}^{(k)} \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ \frac{t^{(n)}}{12} (S_{im}^{(n)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right. \\ &\left. + \frac{t^{(n+1)}}{12} (S_{im}^{(n+1)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n+1)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right\} \end{aligned}$$

$$+ N_{ij}^{(k)} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^{(n)}}{3} (\delta\psi_{i,j}^{(n)} + \delta\psi_{j,i}^{(n)}) \right. \\ \left. - \sum_{n=k+1}^N \frac{t^{(n)}}{3} (\delta\psi_{i,j}^{(n)} + \delta\psi_{j,i}^{(n)}) \right\} dA - \int_A q \delta w dA$$

여기서 응력의 합력 (stress resultants) 들은 다음과 같이 정리된다.

$$(N_{ij}, M_{ij}, R_{ij}, P_{ij})^{(k)} = \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} \sigma_{ij}(1, z, z^2, z^3) dz \\ (N_{i3}, M_{i3}, R_{i3})^{(k)} = \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} \sigma_{i3}(1, z, z^2) dz \quad (16)$$

식(15)를 부분 적분하여 δw , δu_{0i} , $\delta\psi_i^{(k)}$ 및 $\delta\phi_i^{(k)}$ 의 항으로 묶으면, 다음의 방정식들을 얻게 된다.

$$\delta w : \sum_{k=1}^N M_{ij}^{(k)} = -q \\ \delta u_{0i} : \sum_{k=1}^N N_{ij}^{(k)} = 0 \\ \delta\psi_i^{(k)} : a_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + a_2^{(k)} (M_{ij}^{(k)} - N_{i3}^{(k)}) + a_3^{(k)} (R_{ij}^{(k)} - 2M_{i3}^{(k)}) \\ + a_4^{(k)} (P_{ij}^{(k)} - 3R_{i3}^{(k)}) + \frac{t^{(k)}}{3} \left(\sum_{n=1}^{k-1} N_{ij}^{(n)} - \sum_{n=k+1}^N N_{ij}^{(n)} \right) \\ (k=1, 2, \dots, N)$$

$$\delta\phi_i^{(k)} : \left(c_1^{(k)} S_{mi}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{mi}^{(k+1)} \right) N_{mj}^{(k)} \\ + \left(b_1^{(k+1)} S_{mi}^{(k+1)} + \frac{t^{(k)}}{12} S_{mi}^{(k)} \right) N_{mj}^{(k+1)} \\ + S_{mi}^{(k)} \{ c_2^{(k)} (M_{ij}^{(k)} - N_{i3}^{(k)}) \\ + c_3^{(k)} (R_{ij}^{(k)} - 2M_{i3}^{(k)}) \\ + c_4^{(k)} (P_{ij}^{(k)} - 3R_{i3}^{(k)}) \} \\ + S_{mi}^{(k+1)} \{ b_2^{(k+1)} (M_{ij}^{(k+1)} - N_{i3}^{(k+1)}) \\ + b_3^{(k+1)} (R_{ij}^{(k+1)} - 2M_{i3}^{(k+1)}) \\ + b_4^{(k+1)} (P_{ij}^{(k+1)} - 3R_{i3}^{(k+1)}) \} \\ + \left(\frac{t^{(k)}}{12} S_{mi}^{(k)} + \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{mi}^{(k+1)} \right) \left(\sum_{n=1}^{k-1} N_{mj}^{(n)} - \sum_{n=k+2}^N N_{mj}^{(n)} \right) \\ = 0 \\ (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (17)$$

따라서 N 층 복합평판의 평형방정식은 총 $(4N+1)$ 개의 방정식으로 구성되며, 식(16)의 합응력성분 (stress resultants)은 식(12)와 (14)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{R\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} h_0[Q_{rs}] & h_1[Q_{rs}] & h_2[Q_{rs}] & h_3[Q_{rs}] \\ & h_2[Q_{rs}] & h_3[Q_{rs}] & h_4[Q_{rs}] \\ & & h_4[Q_{rs}] & h_5[Q_{rs}] \\ Sym. & & & h_6[Q_{rs}] \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^2\} \\ \{\varepsilon^3\} \end{Bmatrix}^{(k)} \\ (r, s=1, 2, 6) \quad (18a)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{N}\} \\ \{\bar{M}\} \\ \{\bar{R}\} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} h_0[Q_{rs}] & h_1[Q_{rs}] & h_2[Q_{rs}] \\ & h_2[Q_{rs}] & h_3[Q_{rs}] \\ Sym. & & h_4[Q_{rs}] \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \{\bar{\varepsilon}^0\} \\ \{\bar{\varepsilon}^1\} \\ \{\bar{\varepsilon}^2\} \end{Bmatrix}^{(k)} \\ (r, s=4, 5) \quad (18b)$$

위에서 강성행렬 (plate stiffnesses)의 상수값들은

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)^{(k)} \\ = \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (18c)$$

로 정의되며, 식(18a)와 식(18b)의 합응력 및 변형률 성분은 아래와 같다.

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{12} \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{12} \end{Bmatrix} \\ \{\bar{N}\} = \begin{Bmatrix} N_{23} \\ N_{13} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{M}\} = \begin{Bmatrix} M_{23} \\ M_{13} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{R}\} = \begin{Bmatrix} R_{23} \\ R_{13} \end{Bmatrix} \\ \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon^1\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^1 \\ \varepsilon_{22}^1 \\ 2\varepsilon_{12}^1 \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon^2\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^2 \\ \varepsilon_{22}^2 \\ 2\varepsilon_{12}^2 \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon^3\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^3 \\ \varepsilon_{22}^3 \\ 2\varepsilon_{12}^3 \end{Bmatrix} \\ \{\bar{\varepsilon}^0\} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23}^0 \\ 2\varepsilon_{13}^0 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{\varepsilon}^1\} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23}^1 \\ 2\varepsilon_{13}^1 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{\varepsilon}^2\} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23}^2 \\ 2\varepsilon_{13}^2 \end{Bmatrix} \quad (18d)$$

3. 수치해석 및 계산결과

3.1 직교적층평판에 대한 수치해

단순지지된 직교적층평판 (cross-ply laminated plates)의 거동해석을 위한 엄밀해 (exact solutions)는 식(17)의 평형방정식으로부터 Navier의 평판해석 방법⁽¹⁰⁾을 이용하여 구할 수 있다. 직교적층평판의 경우 식(8) 및 식(14)에서 다음의 강성계수들은 0의 값을 갖는다.

$$Q_{16} = Q_{26} = Q_{45} = 0 \quad (19)$$

또한 단순지지의 경계조건 (boundary conditions)은

$$w(x_1, 0) = w(x_1, b) = w(0, x_2) = w(a, x_2) = 0 \\ u_1(x_1, 0) = u_2(x_1, b) = u_2(0, x_2) = u_1(a, x_2) = 0 \\ \psi_1(x_1, 0) = \psi_2(x_1, b) = \psi_2(0, x_2) = \psi_1(a, x_2) = 0 \\ \phi_1(x_1, 0) = \phi_2(x_1, b) = \phi_2(0, x_2) = \phi_1(a, x_2) = 0 \\ N_{11}(0, x_2) = N_{11}(a, x_2) = N_{22}(x_1, 0) = N_{22}(x_1, b) = 0 \\ M_{11}(0, x_2) = M_{11}(a, x_2) = M_{22}(x_1, 0) = M_{22}(x_1, b) = 0 \\ R_{11}(0, x_2) = R_{11}(a, x_2) = R_{22}(x_1, 0) = R_{22}(x_1, b) = 0 \\ P_{11}(0, x_2) = P_{11}(a, x_2) = P_{22}(x_1, 0) = P_{22}(x_1, b) = 0 \quad (20)$$

이 된다. 이때 식 (18)의 합응력성분들은 다음과 같이 강성계수 상수값의 함수관계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{ij}^{(k)} &= F_{ij}^{(k)}(h_0, h_1, A_0, B_0, C_0), \\ N_{i3}^{(k)} &= F_{i3}^{(k)}(\overline{A_0}, \overline{B_0}, \overline{C_0}) \\ M_{ij}^{(k)} &= F_{ij}^{(k)}(h_1, h_2, A_1, B_1, C_1), \\ M_{i3}^{(k)} &= F_{i3}^{(k)}(\overline{A_1}, \overline{B_1}, \overline{C_1}) \\ R_{ij}^{(k)} &= F_{ij}^{(k)}(h_2, h_3, A_2, B_2, C_2), \\ R_{i3}^{(k)} &= F_{i3}^{(k)}(\overline{A_2}, \overline{B_2}, \overline{C_2}) \\ P_{ij}^{(k)} &= F_{ij}^{(k)}(h_3, h_4, A_3, B_3, C_3) \end{aligned}$$

위에서 $A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 는 식 (11)과 식 (18c)로부터 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_m^{(k)} &= a_1^{(k)} h_m^{(k)} + a_2^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + a_3^{(k)} h_{m+2}^{(k)} + a_4^{(k)} h_{m+3}^{(k)} \\ B_m^{(k)} &= b_1^{(k)} h_m^{(k)} + b_2^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + b_3^{(k)} h_{m+2}^{(k)} + b_4^{(k)} h_{m+3}^{(k)} \\ C_m^{(k)} &= c_1^{(k)} h_m^{(k)} + c_2^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + c_3^{(k)} h_{m+2}^{(k)} + c_4^{(k)} h_{m+3}^{(k)} \\ &\quad (m=0, 1, 2, 3) \\ \overline{A_m^{(k)}} &= a_2^{(k)} h_m^{(k)} + 2a_3^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + 3a_4^{(k)} h_{m+2}^{(k)} \\ \overline{B_m^{(k)}} &= b_2^{(k)} h_m^{(k)} + 2b_3^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + 3b_4^{(k)} h_{m+2}^{(k)} \\ \overline{C_m^{(k)}} &= c_2^{(k)} h_m^{(k)} + 2c_3^{(k)} h_{m+1}^{(k)} + 3c_4^{(k)} h_{m+2}^{(k)} \\ &\quad (m=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (21)에서 사용된 함수식, $F_{ij}^{(k)}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{i1}^{(k)}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) &= f_1^{(k)}(Q_{i1}^{(k)} u_{01,1} + Q_{i2}^{(k)} u_{02,2}) \\ &\quad - f_2^{(k)}(Q_{i1}^{(k)} w_{,11} + Q_{i2}^{(k)} w_{,22}) \\ &\quad + f_3^{(k)}(Q_{i1}^{(k)} \psi_{,1,1} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}) \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i1}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i1}^{(k-1)} \right) Q_{i1}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i2}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i2}^{(k-1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i1}^{(k)} - f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i1}^{(k+1)} \right) Q_{i1}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(k)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i2}^{(k)} - f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i2}^{(k+1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(k)} \\ &\quad + f_1^{(k)} \frac{1}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} t^{(n)} (Q_{i1}^{(k)} \psi_{,1,1}^{(n)} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^N t^{(n)} (Q_{i1}^{(k)} \psi_{,1,1}^{(n)} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}^{(n)}) \right\} \\ &\quad + f_1^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) Q_{i1}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(n)} \right\} \\ &\quad - f_1^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) Q_{i1}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} F_{i2}^{(k)}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) &= f_1^{(k)}(Q_{i2}^{(k)} u_{01,1} + Q_{i2}^{(k)} u_{02,2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - f_2^{(k)}(Q_{i2}^{(k)} w_{,11} + Q_{i2}^{(k)} w_{,22}) \\ &\quad + f_3^{(k)}(Q_{i2}^{(k)} \psi_{,1,1} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}) \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i1}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i1}^{(k-1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i2}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i2}^{(k-1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i1}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i1}^{(k+1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(k)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i2}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i2}^{(k+1)} \right) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(k)} \\ &\quad + f_1^{(k)} \frac{1}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} t^{(n)} (Q_{i2}^{(k)} \psi_{,1,1}^{(n)} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^N t^{(n)} (Q_{i2}^{(k)} \psi_{,1,1}^{(n)} + Q_{i2}^{(k)} \psi_{,2,2}^{(n)}) \right\} \\ &\quad + f_1^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(n)} \right\} \\ &\quad - f_1^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,1,1}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) Q_{i2}^{(k)} \phi_{,2,2}^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} F_{i2}^{(k)}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) &= f_1^{(k)} Q_{66}^{(k)} (u_{01,2} + u_{02,1}) \\ &\quad - 2f_2^{(k)} Q_{66}^{(k)} w_{,12} \\ &\quad + f_3^{(k)} Q_{66}^{(k)} (\psi_{,1,2} + \psi_{,2,1}) \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i1}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i1}^{(k-1)} \right) Q_{66}^{(k)} \phi_{,1,2}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_4^{(k)} S_{i2}^{(k)} + f_1^{(k)} \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{i2}^{(k-1)} \right) Q_{66}^{(k)} \phi_{,2,1}^{(k-1)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i1}^{(k)} - f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i1}^{(k+1)} \right) Q_{66}^{(k)} \phi_{,1,2}^{(k)} \\ &\quad + \left(f_5^{(k)} S_{i2}^{(k)} - f_1^{(k)} \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{i2}^{(k+1)} \right) Q_{66}^{(k)} \phi_{,2,1}^{(k)} \\ &\quad + f_1^{(k)} Q_{66}^{(k)} \frac{1}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} t^{(n)} (\psi_{,1,2}^{(n)} + \psi_{,2,1}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^N t^{(n)} (\psi_{,1,2}^{(n)} + \psi_{,2,1}^{(n)}) \right\} \\ &\quad + f_1^{(k)} Q_{66}^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) \phi_{,1,2}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) \phi_{,2,1}^{(n)} \right\} \\ &\quad - f_1^{(k)} Q_{66}^{(k)} \frac{1}{12} \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ (t^{(n)} S_{i1}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i1}^{(n+1)}) \phi_{,1,2}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + (t^{(n)} S_{i2}^{(n)} + t^{(n+1)} S_{i2}^{(n+1)}) \phi_{,2,1}^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (23c)$$

$$\begin{aligned} F_{i3}^{(k)}(f_1, f_2, f_3) &= f_1^{(k)} Q_{44}^{(k)} \psi_2^{(k)} + f_2^{(k)} \phi_2^{(k-1)} + f_3^{(k)} \phi_2^{(k)} \\ F_{i3}^{(k)}(f_1, f_2, f_3) &= f_1^{(k)} Q_{35}^{(k)} \psi_1^{(k)} + f_2^{(k)} \phi_1^{(k-1)} + f_3^{(k)} \phi_1^{(k)} \end{aligned} \quad (23d)$$

여기서, Navier의 평판해석 방법에 따라 엄밀해를 구하기 위해 다음과 같이 $w, u_{0i}, \psi_i, \phi_i$ 의 함수들을 식(20)의 경계조건을 만족하는 급수해(double-Fourier series solutions)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sin ax \sin by \\ u_{01} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn} \cos ax \sin by, \\ u_{02} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn} \sin ax \cos by \\ \psi_1^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{1mn}^{(k)} \cos ax \sin by, \\ \psi_2^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{2mn}^{(k)} \sin ax \cos by \\ \phi_1^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{1mn}^{(k)} \cos ax \sin by, \\ \phi_2^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{2mn}^{(k)} \sin ax \cos by \end{aligned} \quad (24a)$$

이때 $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ 이며, 횡하중(transverse load), q 는 같은 형태의 급수해로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin ax \sin by \quad (24b)$$

식(17)은 적층복합평판 전체 층에 대한 평형방정식으로 식의 좌변을 임의의 k 층에 대하여 $w, u_{0i}, \psi_i, \phi_i$ 의 함수별로 정리하면

$$\begin{aligned} \delta w &: M_{ij,j}^{(k)} \\ \delta u_{0i} &: N_{ij}^{(k)} \\ \delta \psi_i^{(n)} &: \frac{t^{(n)}}{3} N_{ij,j}^{(k)} \quad (n=1 \sim k-1) \\ \delta \psi_i^{(k)} &: a_1^{(k)} N_{ij,j}^{(k)} + a_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{ij}^{(k)}) \\ &\quad + a_3^{(k)} (R_{ij}^{(k)} - 2M_{ij}^{(k)}) + a_4^{(k)} (P_{ij,j}^{(k)} - 3R_{ij}^{(k)}) \\ \delta \psi_i^{(n)} &: -\frac{t^{(n)}}{3} N_{ij,j}^{(k)} \quad (n=k+1 \sim N) \\ \delta \phi_i^{(n)} &: \left(\frac{t^{(n)}}{12} S_{ii}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{12} S_{ii}^{(n+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \\ &\quad (n=1 \sim k-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_i^{(k-1)} &: \left(b_1^{(k)} S_{ii}^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{12} S_{ii}^{(k-1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \\ &\quad + S_{ii}^{(k)} \{ b_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{ij}^{(k)}) \\ &\quad + b_3^{(k)} (R_{ij}^{(k)} - 2M_{ij}^{(k)}) + b_4^{(k)} (P_{ij,j}^{(k)} - 3R_{ij}^{(k)}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_i^{(k)} &: \left(c_1^{(k)} S_{ii}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{12} S_{ii}^{(k+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \\ &\quad + S_{ii}^{(k)} \{ c_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{ij}^{(k)}) \\ &\quad + c_3^{(k)} (R_{ij}^{(k)} - 2M_{ij}^{(k)}) + c_4^{(k)} (P_{ij,j}^{(k)} - 3R_{ij}^{(k)}) \} \end{aligned}$$

$$\delta \phi_i^{(n)} : -\left(\frac{t^{(n)}}{12} S_{ii}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{12} S_{ii}^{(n+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \quad (n=k+1 \sim N-1) \quad (25)$$

와 같이 개별 층에 대하여 나타낼 수 있으며, 여기에 식(21)의 합 응력성분을 대입하여 $k=1$ 부터 N 까지 누적시켜 전체 층에 대한 평형방정식을 구성할 수 있다. 이때 식(24)의 급수해를 적용하고, 상수들을 정리하면 다음과 같은 선형행렬식의 형태로 구성된다.

$$[C] \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ U_{mn} \\ V_{mn} \\ \Psi_{1mn}^{(1)} \\ \Psi_{2mn}^{(1)} \\ \vdots \\ \Psi_{1mn}^{(N)} \\ \Psi_{2mn}^{(N)} \\ \Phi_{1mn}^{(1)} \\ \Phi_{2mn}^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi_{1mn}^{(N-1)} \\ \Phi_{2mn}^{(N-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서 $[C]$ 는 $(4N+1) \times (4N+1)$ 크기의 대칭행렬이 된다. 식(26)의 해를 식(24)에 대입하여 횡하중을 받는 직교적층평판에 대한 변위 및 응력해석의 엄밀해를 구할 수 있으며, 하중은 종류에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= q_0 \quad (m=n=1) \\ &: \text{Sinusoidally distributed load} \\ Q_{mn} &= \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \\ &: \text{Uniformly distributed load} \end{aligned} \quad (27)$$

3.2 계산결과 및 고찰

계산결과에 대한 검증 및 정확도의 확인을 위하여 본 연구에서는 Pagano의 3차원 탄성이론(three-dimensional elasticity)^(9,10)에 의한 해석과 Reddy의 고차해석이론⁽⁶⁾에서 공통적으로 다루어졌던 몇 가지 단순지지된 직교적층평판의 해석문제를 중심으로 그들에 의해 발표된 결과와 비교되었다. 비교를 위해 다루어진 적층복합평판의 종류는 다음과 같다.

- (1) 싸인분포하중(sinusoidally distributed load)

을 받으며, 각 층의 두께가 같게 적층된 3단 직사각형 평판 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $b/a=3$)

(2) 싸인분포하중 (sinusoidally distributed load) 을 받으며, 두께가 같은 층이 대칭으로 적층된 4단 정사각형 평판 ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

(3) 싸인분포하중 (sinusoidally distributed load) 을 받으며, 섬유방향이 같은 층은 두께가 같고 두 방향의 전체 두께 합이 같게 대칭으로 적층된 다단 정사각형 평판

(4) 균등분포하중 (uniformly distributed load) 을 받으며, 각층의 두께가 같은 3단 정사각형 평판 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

위의 문제에서 고려된 적층판의 재료상수 (lamina properties)는 섬유방향이 0° 인 층에서

$$E_1=25 \times 10^6 \text{ psi (174.6 GPa)}$$

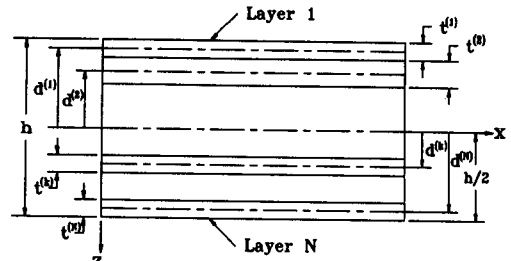


Fig. 1 Geometry of an N-layered laminate

$$E_2=10^6 \text{ psi (7 GPa)}$$

$$G_{12}=G_{13}=0.5 \times 10^6 \text{ psi (3.5 GPa)}$$

$$G_{23}=10^6 \text{ psi (1.4 GPa)}$$

$$\nu_{12}=\nu_{13}=0.25$$

(28)

이다. 또한 계산결과를 나타내는데 사용된 무차원

Table 1 Nondimensionalized deflections and stresses in 3-layer rectangular laminates under sinusoidal load ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $b=3a$)

a/h	Source	w_0	σ_1	σ_2	σ_4	σ_5	σ_6
4	Pagano ⁽⁹⁾	2.82	1.14	0.119	0.0334	0.351	-0.0281
			-1.10	-0.109			0.0269
	Present	2.846	1.124	0.112	0.0316	0.353	0.0278
	Reddy ⁽⁶⁾	2.641	1.036	0.103	0.0348	0.272	0.0263
	FSDT ⁽⁶⁾	2.363	0.613	0.0934	0.0308	0.188	0.0205
10	Pagano	0.919	0.726	0.0435	0.0152	0.420	-0.0123
			-0.725	-0.0418			0.0120
	Present	0.921	0.726	0.0420	0.0149	0.420	0.0122
	Reddy	0.862	0.692	0.0398	0.0170	0.286	0.0115
	FSDT	0.803	0.621	0.0375	0.0159	0.189	0.0105
20	Pagano	0.610	± 0.650	0.0299	0.0119	0.434	∓ 0.0093
				-0.0294			
	Present	0.610	0.650	0.0295	0.0119	0.434	0.0093
	Reddy	0.594	0.641	0.0289	0.0139	0.288	0.0091
	FSDT	0.578	0.623	0.0283	0.0135	0.190	0.0088
100	Pagano	0.508	± 0.624	± 0.0253	0.0108	0.439	∓ 0.0083
	Present	0.508	0.624	0.0253	0.0108	0.439	0.0083
	Reddy	0.507	0.624	0.0253	0.0129	0.289	0.0083
	FSDT	0.506	0.623	0.0253	0.0127	0.190	0.0083

상수값은 Fig. 1의 좌표계에서 다음과 같이 정의되었다.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{100h^3 E_2}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \\
 \sigma_1 &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{11}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right) \\
 \sigma_2 &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{22}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2} \mp t^{(1)}\right) \\
 \sigma_4 &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{23}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \\
 \sigma_5 &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{13}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \\
 \sigma_6 &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{12}\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{29}$$

Table 1, 2, 3에서 보는 바와 같이 본 연구에서 개발된 해석방법에 의한 결과는 Pagano의 3차원

탄성이론에 의한 결과와 비교할때, Reddy의 고차 해석이론 및 1차 전단변형이론(FSDT)보다 정확한 값을 얻을 수 있었고, 평판의 길이 대 두께의 비율 (a/h)이 10이상에서는 3차원 탄성이론의 결과와 거의 동일한 값을 구할 수 있음을 보여주었다. 이는 Reddy의 해석이론과 비교할 때 적층복합평판의 거동해석에 있어 정확도를 높이기 위해서는 층간 변위 및 횡전단응력의 연속조건을 고려하여야 함을 뜻한다. 횡전단응력의 계산에서 층간 단일응력값을 구하기 위하여 Reddy의 이론에서는 3차원 응력균형식을 적용하는 복잡한 과정을 제시하였으나, 본 연구에서는 식(14)의 응력-변형률 관계식으로부터 바로 구할 수 있었다. 또한 Fig. 2는 두번째 예제의 4단적층 정사각형평판에 대한 응력분포를 나타낸 것으로 Pagano의 결과에서와 같이 두께비(a/h)

Table 2 Nondimensionalized deflections and stresses in 4-layer square laminates under sinusoidal load ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

a/h	Source	w_0	σ_1	σ_2	σ_4	σ_5	σ_6
4	Pagano ⁽¹¹⁾	1.937	0.720	0.666	0.292	0.219	-0.0467
			-0.684	-0.663			0.0458
	Present	1.969	0.706	0.679	0.297	0.220	0.0472
	Reddy ⁽⁶⁾	1.894	0.665	0.632	0.239	0.206	0.0440
FSDT ⁽⁶⁾	1.710	0.406	0.577	0.196	0.140	0.0308	
10	Pagano	0.737	± 0.559	0.403	0.196	0.301	-0.0275
				-0.401			0.0276
	Present	0.739	0.561	0.403	0.196	0.302	0.0277
	Reddy	0.715	0.546	0.389	0.153	0.264	0.0268
FSDT	0.663	0.499	0.362	0.129	0.167	0.0241	
20	Pagano	0.513	± 0.543	0.309	0.156	0.328	∓ 0.0230
				-0.308			
	Present	0.513	0.543	0.309	0.156	0.328	0.0231
	Reddy	0.506	0.539	0.304	0.123	0.283	0.0228
FSDT	0.491	0.527	0.296	0.109	0.175	0.0221	
100	Pagano	0.435	± 0.539	± 0.271	0.139	0.339	∓ 0.0214
	Present	0.435	0.539	0.271	0.139	0.339	0.0214
	Reddy	0.434	0.539	0.271	0.112	0.290	0.0213
FSDT	0.434	0.538	0.271	0.101	0.178	0.0213	

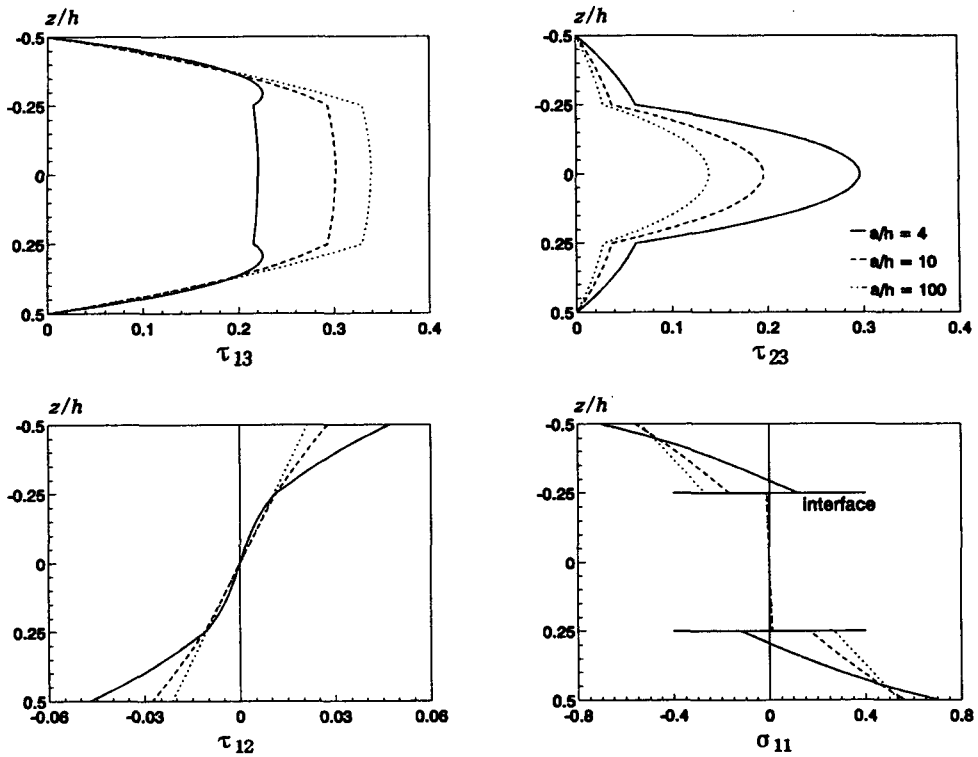


Fig. 2 Stress distribution through the thickness of 3-layer square laminate under sinusoidal load ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Table 3 Nondimensionalized deflections and stresses of multilayered square laminates under sinusoidal load

(a) 7-layer laminates ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

a/h	Source	w_0	σ_1	σ_2	σ_4	σ_5	σ_6
4	Pagano ⁽¹¹⁾	1.791	0.679	0.623	0.236	0.219	-0.056
			-0.645	-0.610			0.0347
	Present	1.818	0.664	0.623	0.237	0.220	0.0358
10	Pagano	0.659	± 0.548	0.457	0.219	0.255	-0.0237
				-0.458			0.0238
	Present	0.662	0.549	0.458	0.219	0.255	0.0239
20	Pagano	0.489	± 0.539	0.419	0.210	0.267	∓ 0.0219
				-0.420			0.0220
	Present	0.489	0.540	0.420	0.210	0.267	0.0220
100	Pagano	0.434	± 0.539	± 0.405	0.205	0.272	∓ 0.0213
				0.405			0.0213
	Present	0.434	0.539	0.405	0.205	0.272	0.0213

(b) 9-layer laminates (0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°)

a/h	Source	w ₀	σ ₁	σ ₂	σ ₄	σ ₅	σ ₆
4	Pagano ⁽¹¹⁾	1.759	0.684	0.628	0.223	0.223	-0.0337
			-0.649	-0.612			0.0328
	Present	1.785	0.668	0.626	0.224	0.223	0.0338
10	Pagano	0.652	±0.551	±0.477	0.226	0.247	-0.0233
	Present	0.654	0.553	0.478	0.226	0.247	0.0235
20	Pagano	0.487	±0.541	±0.444	0.221	0.255	±0.0218
	Present	0.487	0.541	0.444	0.221	0.255	0.0219
100	Pagano	0.434	±0.539	±0.431	0.219	0.259	±0.0213
	Present	0.434	0.539	0.431	0.219	0.259	0.0213

Table 4 Nondimensionalized deflections of 3-layer square plates under uniform load (0°/90°/0°)

a/h	Source	I*=9	I=29	I=49
4	Present	3.0893	3.0872	3.0871
	Reddy ⁽⁶⁾	2.9103	2.9091	2.9091
	FSDT ⁽⁶⁾	2.6623	2.6597	2.6596
10	Present	1.1578	1.1574	1.1574
	Reddy	1.0903	1.0900	1.0900
	FSDT	1.0224	1.0220	1.0219
20	Present	0.7959	0.7957	0.7957
	Reddy	0.7761	0.7760	0.7760
	FSDT	0.7574	0.7573	0.7573
100	Present	0.6713	0.6713	0.6713
	Reddy	0.6705	0.6705	0.6705
	FSDT	0.6697	0.6697	0.6697

* Number of terms in the series solutions (m,n=1,3,...,I)

h 가 작을 경우 σ_4 또는 σ_5 의 값이 $z=0$ 에서 최대가 아닌 경우에 대한 응력분포를 잘 나타낼 수 있었다. Table 4는 세번째 예제에 대한 결과로서 Reddy의 고차 해석이론과 비교할 때 1차 전단변형 이론보다 수렴속도가 빠르며 또한 두께가 얇은 평판일수록 수렴속도가 빠른것은 동일하나 최대 횡변위는 $a/h=10$ 일때 약 6% 증가함을 알 수 있었다.

4. 결론

적층복합평판의 거동해석에서 횡전단변형의 영향을 충분히 고려하기 위하여 평판 상·하부 표면의 횡전단응력에 대한 경계조건과 층간 변위 및 횡전단응력의 연속조건을 만족할 수 있는 고차전단변형

이론이 변위가정방법 (displacement assumption method)을 바탕으로 개발되었다. 여기서는 기존의 1차 전단변형 이론에서 요구되는 전단보정상수 (shear correction coefficients)를 사용하지 않으며, 3차원 응력균형식을 적분하지 않고 각 층의 전단응력 분포를 포물선 (parabolic) 형태로 해석할 수 있었다. 단순지지된 직교적층평판에 대한 변위 및 응력해석 결과는 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교할 때, Reddy의 고차해석이론 및 1차 전단변형이론보다 정확한 거동해석이 가능함을 보여주었다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 일반 기초 연구비 (KOSEF 913-0910-019-1)에 의해 이루어진 연구결과의 일부로서 관계기관에 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) Libove, C. and Batdorf, S. B., 1948, "A General Small Deflection Theory for Flat Sandwich Plates," NACA Report No. 899.
- (2) Mindlin, R. D., 1951, "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates," Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31~38.
- (3) Whitney, J. M. and Pagano, N. J., 1970, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates," Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 1031~1036.
- (4) Whitney, J. M., 1972, "Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates," Journal of Composite Materials, Vol. 6, pp. 426~440.
- (5) Lo, K. H., Christensen, R.M. and Wu, E. M., 1977, "A High-Order Theory of Plate Deformation," Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 669~676.
- (6) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 745~752.
- (7) Reissner, E., 1986, "On a Mixed Variational Theorem and on Shear Deformable Plate Theory," International Journal for numerical Methods in engineering, Vol. 23, pp. 193~198.
- (8) Toledano, A., and Murakami, H., 1987, "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations," Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp. 181~189.
- (9) Pagano, N. J., 1970, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates," Journal of Composite Materials, Vol. 4, pp. 20-34.
- (10) Reddy, J. N., 1984, "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics," Wiley, New York, pp. 396~399.
- (11) Pagano, N. J., and Hatfield, S.J., 1972, "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites," AIAA Journal, Vol. 10, pp. 931~933.