

〈論 文〉

## 보존적분을 이용한 응력강도계수와 T-응력의 계산

범현규\* · 엄윤용\*

(1993년 7월 14일 접수)

### Evaluation of Stress Intensity Factors and T-Stress Using a Conservation Integral

Hyeon Gyu Beom and Youn Young Earmme

**Key Words :** Conservation Integral(보존적분), Complex Potential(복소포텐셜), Auxiliary Solution(보조해), Singularity(특이성), Stress Intensity Factor(응력강도계수), T-Stress(T-응력)

#### Abstract

A mutual integral, which has the conservation property, is applied to the problem of a crack in an isotropic elastic material. The stress intensity factors  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  and T-stress for the problem in an infinite medium are easily obtained by using the mutual integral without solving the boundary value problem. The auxiliary solutions necessary in the proposed method are taken from the known asymptotic solutions. This method is amenable to numerical evaluation of the stress intensity factors and T-stress if the crack in a finite medium is considered.

#### 1. 서 론

균열문제를 해석하는데 있어서,  $J$ ,  $L$  그리고  $M$  적분<sup>(1)</sup>과 같은 보존적분은 유용하게 사용되고 있다. 보존적분의 경로독립성을 이용하면, 복잡한 경계치문제를 풀지 않고도 탄성균열문제에 대한 응력강도계수와 에너지방출률을 직접 얻을 수 있다. Eshelby<sup>(2)</sup>는  $M$ 적분의 보존성을 이용하여 약간의 균열문제에 대한 응력강도계수와 에너지방출률을 쉽게 얻었다. 이어서 Freund<sup>(3)</sup>와 Ouchterlony,<sup>(4,5)</sup> Rice 등<sup>(6)</sup>은 집중하중 및 전위가 존재하는 균열 또는 노치문제를 보존적분을 이용하여 연구하였다. Park과 Earmme<sup>(7)</sup>은 보존적분방법으로 작은 접촉역을 갖는 계면균열에 대한 응력강도계수를 간단하게 얻을 수 있음을 보였다. 그러나 위에서 언급된 보

존적분의 방법으로는 혼합 모드하의 각 모드에 해당되는 응력강도계수를 결정할 수 없다. Chen과 Shield<sup>(8)</sup>가 제안한 상호보존적분  $M_1$ 은 적당한 보조해가 도입되면, 혼합모드하의 응력강도계수를 결정하기 위한 충분한 정보를 제공한다. 상호보존적분은 Yau 등<sup>(9)</sup>과 Bui<sup>(10)</sup>에 의해 수치적으로 응력강도계수를 얻기 위하여 사용된 바 있다.

한편, 균열선단에서 탄성응력장에 대한 Williams 고유함수전개의 두번째 항인 T-응력은 균열경로안 정성에 중요한 역할을 한다.<sup>(11)</sup> Cardew 등<sup>(12)</sup>과 Kfoury<sup>(13)</sup>는 여러가지 시편형상에 대한 T-응력을 보존적분방법을 이용하여 수치적으로 계산하였다.

본 연구의 목적은 균열면하중과 재료내에 집중하중이나 전위와 같은 특이성이 있는 반무한 균열문제에 대한 응력강도계수와 T-응력을  $M_1$ 적분을 이용하여 구하는데 있다. 최근에 Suo<sup>(14,15)</sup>는 이 문제를 복소변수방법을 이용하여 Hilbert 문제로 바꾼 다음, 직접 경계치문제를 풀어 해를 얻었다. 본 논

\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

문에서 제안한 방법은 위에서 언급된 무한체에 대한 문제를 푸는 또 다른 방법으로 간주될 수 있다. 그러나 제안된 방법은 유한체에 대한 문제에도 적용될 수 있다. 더우기 제안된 방법을 사용하면, 경계치문제를 풀지 않고 T-응력을 계산할 수 있다.

### 2. 보존적분

A와 B로 표시되는 독립적인 두 평형상태를 생각하기로 하자. 본 연구에서는 변위성분이 Cartesian좌표  $x_1$ 과  $x_2$ 에만 의존하는 2차원 작은 변형장에 대하여 다루기로 한다. 두 상태에 대한 상호 보존적분  $M_1^{(A,B)}$ 은 다음과 같이 정의된다.<sup>(8)</sup>

$$M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} = \int_{\Gamma_0} (W^{(A,B)} n_i - t_i^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - t_i^{(B)} u_{i,1}^{(A)}) ds \tag{1}$$

여기서  $u_i$ 는 변위,  $n_i$ 는 단위수직벡터,  $t_i$ 는 표면력(surface traction)이고,  $W^{(A,B)}$ 는 상호변형률 에너지밀도(mutual strain energy density)로  $W^{(A,B)} = \sigma_{ij}^{(A)} u_{i,j}^{(B)} = \sigma_{ij}^{(B)} u_{i,j}^{(A)}$ 와 같이 정의되며, 상첨자 A, B는 각 평형상태 A, B에 대응하는 양을 표시한다.  $\sigma_{ij}$ 는 응력이다. Fig. 1에 나타낸 바와 같이,  $\Gamma_0$ 는 폐경로이고,  $ds$ 는  $\Gamma_0$ 상의 미소 호의 길이를 나타낸다. 하첨자 콤마(,)는 Cartesian좌표에 대한 편미분을 나타내고, 한 항에서의 첨자의 반복은 첨자의 범위 1에서 3까지의 합을 나타낸다. Chen과 Shield<sup>(8)</sup>가 지적한 바와 같이,  $M_1^{(A,B)}$ 는 J적분<sup>(16)</sup>의 항으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} = J\{\Gamma_0; u_i^{(A)} + u_i^{(B)}\} - J\{\Gamma_0; u_i^{(A)}\} - J\{\Gamma_0; u_i^{(B)}\} \tag{2}$$

$M_1^{(A,B)}$ 적분은 J적분과 같은 보존법칙을 만족하므로, 폐경로  $\Gamma_0$ 에 대하여 다음과 같은 보존법칙을 얻는다.

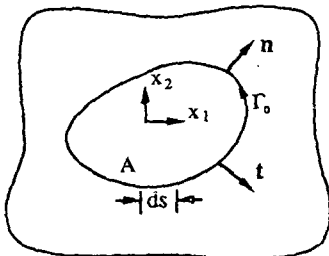


Fig. 1 Integration path

$$M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} = 0 \tag{3}$$

여기서  $\Gamma_0$ 에 의해 감싸여진 면적 A 내에는 특이점이 없다고 가정되었다. 이 보존법칙은 다음에 복잡한 경계치문제를 풀지 않고 직접 응력강도계수와 T-응력을 계산하는데 적용될 것이다.

등방성 평면탄성문제의 응력과 변위는 Muskhelishvili 복소포텐셜의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\} \\ \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (\bar{z} - z)\Phi'(z) \\ \sigma_{32} + i\sigma_{31} &= \omega(z) \end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} u_{1,1} + iu_{2,1} &= \frac{1}{2\mu}\{\kappa\Phi(z) + (\bar{z} - z)\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Omega(z)}\} \\ u_{3,1} &= \frac{1}{2\mu i}\{\omega(z) - \overline{\omega(z)}\} \end{aligned} \tag{4b}$$

여기서,  $\kappa = 3 - 4\nu$ (평면변형률),  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ (평면응력),  $\nu$ 는 Poisson비,  $\mu$ 는 전단계수(shear modulus)이고, 바(bar)는 켈레복소수를 나타낸다.  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  및  $\omega(z)$ 는 복소변수  $z (= x_1 + ix_2)$ 에 대한 해석함수이다.

J적분에 대한 복소형태(complex form)의 표현식<sup>(17)</sup>과 J적분과  $M_1^{(A,B)}$ 적분의 관계식(2)를 이용하면  $M_1^{(A,B)}$ 적분의 복소변수형태가 다음과 같이 주어짐을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} &= Im \left[ \frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{\Gamma_0} \{\Phi^{(A)}(z)\Omega^{(B)}(z) \right. \\ &\quad \left. + \Phi^{(B)}(z)\Omega^{(A)}(z)\} dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_0} \omega^{(A)}(z)\omega^{(B)}(z) dz \right] \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 상첨자 A, B는 각각 두 평형상태 A와 B에 해당되는 양을 나타낸다.

### 3. 보조장

Fig. 2(a)에 나타낸 바와 같은 반무한 균열문제를 생각하기로 하자. Chen과 Shield<sup>(8)</sup>가 제안한 바와 같이, 보조해라 불리우는 평형상태 B에 대한 해를 알고 있다면, 식(1)에 정의된 상호보존적분  $M_1$ 은 평형상태 A에 대한 응력강도계수  $K_I^{(A)}$ 과  $K_{II}^{(A)}$ 를 결정하는데 사용될 수 있다. 또한, 이 방법으로  $K_I^{(A)}$ 와 T-응력을 계산할 수 있음을 나중에 보일 것이다. 보조해가 만족해야 될 조건은 다음과 같다. (i) 경로  $\Gamma$ (see Fig. 3(a))에 의해 감싸여

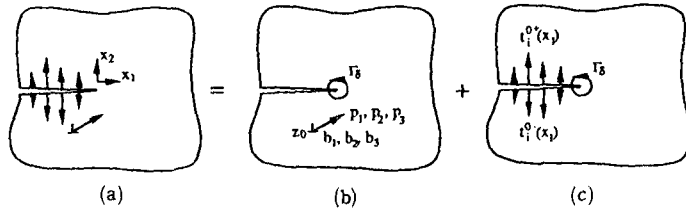


Fig. 2 Semi-infinite crack with singularities and tractions prescribed on the crack surface

진 영역에서 평형방정식을 만족한다. (ii) 경로  $\Gamma$ 에 의해 감싸여진 균열면상에서 트랙션이 0이다. 위의 조건 (i)과 (ii)를 만족하는 변위장(변형률과 응력은 변위로부터 구해짐)은 보조장이 될 수 있지만, 실제문제에 있어서 보조장은 간단해야 하고 사용하기 쉬워야 한다. 또한, 많은 문제에 적용할 수 있는 일반성을 가져야 한다.

먼저 Fig. 3(a)에 나타낸 바와 같은 보조문제  $B$ 를 생각하기로 하자. 반무한 균열은 음의  $x_1$ 축을 따라 있다. 균열면이 자유표면일 조건을 만족하는 가용특이해 (admissible singular solution)는 다음과 같이 주어진다.<sup>(18)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi^{(B)}(z) &= \bar{\Omega}^{(B)}(z) = \frac{K_{II}^{(B)} - iK_{III}^{(B)}}{2\sqrt{2\pi z}} \\ \omega^{(B)}(z) &= \frac{K_{III}^{(B)}}{\sqrt{2\pi z}} \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)에 주어진 보조장  $B$ 에 대한 해로부터 서로 독립인 3개의 보조해  $B_1, B_2, B_3$ 를 선택할 수 있다. 첫번째 보조해  $B_1$ 을 다음과 같이 선택한다.

$$K_I^{(B_1)}=1, K_{II}^{(B_1)}=0 \text{ and } K_{III}^{(B_1)}=0 \quad (7)$$

두번째와 세번째 보조해  $B_2, B_3$ 도 유사한 방법으로 다음과 같이 선택한다.

$$K_I^{(B_2)}=0, K_{II}^{(B_2)}=1 \text{ and } K_{III}^{(B_2)}=0 \quad (8)$$

$$K_I^{(B_3)}=0, K_{II}^{(B_3)}=0 \text{ and } K_{III}^{(B_3)}=1 \quad (9)$$

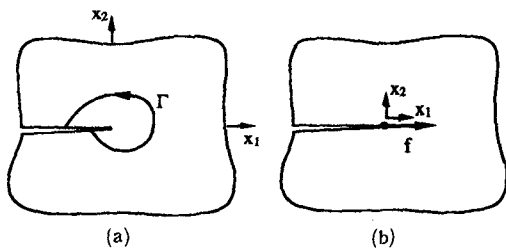


Fig. 3 Auxiliary crack problem

다음으로, Fig. 3(b)에 나타낸 바와 같이 균열선단에  $x_1$ 방향으로 집중하중  $f$ 가 작용하는 네번째 보조문제  $B_4$ 를 생각하기로 하자. 여기서  $f$ 는 편의상 1을 취했다. 균열선단 집중하중에 의해 생기는 응력장을 나타내는 포텐셜은 다음과 같이 주어진다.<sup>(19)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi^{(B_4)}(z) &= -\Omega^{(B_4)}(z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{z} \\ \omega^{(B_4)}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

#### 4. 균열선단 근처의 응력장과 $M_1$ 적분

여러가지 하중상태하에서 응력강도계수와 T-응력의 계산이 요구되는 반무한 균열문제를 생각하기로 하자. 중첩원리에 의해 균열면에 하중이 작용하고 있지 않는 문제(Fig. 2(b))와 균열면하중만이 작용하는 문제(Fig. 2(c))로 나눌 수 있다.

균열선단 근처의 균열면에 하중이 작용하지 않는 경우에 대하여, 균열선단 근처의 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(18)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi^{(A)}(z) &= \frac{K_I^{(A)} - iK_{II}^{(A)}}{2\sqrt{2\pi z}} + \frac{1}{4} (T^{(A)} + iU^{(A)}) + \Phi^c(z), \\ \Omega^{(A)}(z) &= \frac{K_I^{(A)} + iK_{II}^{(A)}}{2\sqrt{2\pi z}} - \frac{1}{4} (T^{(A)} - iU^{(A)}) + \Omega^c(z) \\ \omega^{(A)}(z) &= \frac{K_{III}^{(A)}}{\sqrt{2\pi z}} + iT_3^{(A)} + \omega^c(z) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,  $T^{(A)}$ 와  $T_3^{(A)}$ 는 각각  $\sigma_{11}$ 과  $\sigma_{33}$ 의 균일성분 (uniform part) 이고,  $U^{(A)}$ 는 강체회전을 나타내는 상수이다. 상점자  $c$ 는 균열선단에서 0이 되는 포텐셜을 나타낸다.

식(11)에 주어진 상태  $A$ 에 대한 포텐셜과 식(6)과 (7)에 의해 주어지는 보조장  $B_1$ 에 대한 포텐셜을 이용하여 식(5)에 주어진  $M_1$ 적분을 계산하면 다음을 얻는다.

$$M_1^{(A, B_1)}(\Gamma_s) = \frac{1 + \kappa}{4\mu} K_I^{(A)} \quad (12a)$$

여기서  $\Gamma_0$ 는 아주 작은 반경을 갖는 경로  $\Gamma_0$ (Fig. 2(b))가 선택되었다. 유사한 방법으로, 다음을 보일 수 있다.

$$M_1^{(A, B_2)}\{\Gamma_0\} = \frac{1+\kappa}{4\mu} K_I^{(A)} \quad (12b)$$

$$M_1^{(A, B_3)}\{\Gamma_0\} = \frac{1}{\mu} K_{II}^{(A)} \quad (12c)$$

$$M_1^{(A, B)}\{\Gamma_0\} = \frac{1+\kappa}{8\mu} T^{(A)} \quad (12d)$$

식 (12a) ~ (12d)에 주어진 상호보존적분  $M_1^{(A, B)}$  ( $B = B_1, B_2, B_3, B_4$ )은 응력강도계수  $K_I^{(A)}$ ,  $K_{II}^{(A)}$  및  $K_{III}^{(A)}$ 와 T-응력을 결정하는데 충분한 정보를 제공한다. 그러므로 Fig. 2(b)와 Fig. 2(c)에 나타낸 각각의 문제에 대하여 식(12a) ~ (12d)의 좌변을 계산하면, 응력강도계수와 T-응력을 바로 구할 수 있다.

### 5. $M_1$ 적분을 이용한 해법

Fig. 2(a)에 나타낸 반무한 균열문제를 생각하자. 균열면에 하중이 작용하고 있으며, 집중하중과 전위와 같은 특이성이 재료내에 존재한다. Suo<sup>(14,15)</sup>는 Hilbert 문제를 풀어서 이 문제의 응력강도계수에 대한 엄밀해를 얻었다. 그러나 보존법칙  $M_1^{(A, B)} = 0$ 을 적용하면 경계치문제를 직접 풀지 않고 응력강도계수와 T-응력을 직접 계산할 수 있음을 보일 것이다.

문제의 선형성으로 인하여 특이성(집중하중 또는 전위)이 재료내에 존재하는 문제(Fig. 2(b))와 균열면하중이 작용하는 문제(Fig. 2(c))로 나누어 생각할 수 있다. 완전해는 중첩원리에 의해 얻을 수 있다.

#### 5.1 집중하중과 전위를 갖는 균열

재료내의 점  $z=z_0$ 에 Burgers 벡터  $b_i$  ( $i=1, 2, 3$ )를 갖는 전위(dislocation)와 집중하중  $p_i$ , 커플(couple)  $m$ 이 작용하고 있다. 응력강도계수와 T-응력을 결정하기 위해서는 이미 보여진 바와 같이 식(12a) ~ (12b)의 좌변을 계산해야 한다. Fig. 4(a)에 보여진 바와 같이  $\Gamma_c^- + \Gamma^+ - \Gamma_{z_0} + \Gamma^- + \Gamma_R + \Gamma_c^+$  -  $\Gamma_0$ 로 이루어진 경로  $\Gamma_0$ 에 대하여 보존법칙  $M_1^{(A, B)}\{\Gamma_0\} = 0$ 을 적용한다. 여기서  $\Gamma_c^+$ 와  $\Gamma_c^-$ 는 균열면상의 경로이고,  $\Gamma^+$ 와  $\Gamma^-$ 는 내부경로,  $\Gamma_{z_0}$ 는  $z=z_0$ 점을 감싸는 아주 작은 반경을 갖는 경로이며,

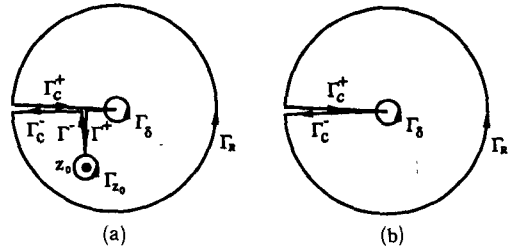


Fig. 4 Integration contours

$\Gamma_R$ 은 아주 큰 반경  $R$ 을 갖는 경로이다.  $\Gamma_0$ 의 일부인  $\Gamma_c^- + \Gamma^+ + \Gamma^- + \Gamma_c^+$ 상에서  $M_1^{(A, B)}$ 적분값은 0이다. 더우기  $r \rightarrow \infty$ 일 때, 응력성분은  $\sigma_{ij}^{(A)} = O(1/r)$ 이며,  $\sigma_{ij}^{(B)} = O(1/\sqrt{r})$  또는  $O(1/r)$ 이므로, 무한히 큰 경로  $\Gamma_R$ 상에서의  $M_1^{(A, B)}$ 적분값도 0이다. 따라서 보존법칙  $M_1^{(A, B)}\{\Gamma_0\} = 0$ 으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$M_1^{(A, B)}\{\Gamma_0\} = -M_1^{(A, B)}\{\Gamma_{z_0}\} \quad (13)$$

점  $z=z_0$  근처에서의 특이성에 대한 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi^{(A)}(z) &= \frac{S_1}{z-z_0} + \Phi^*(z) \\ \Omega^{(A)}(z) &= \frac{S_2}{z-z_0} + \frac{S_3}{(z-z_0)^2} + \Omega^*(z) \\ \omega^{(A)}(z) &= \left\{ \frac{\mu b_3}{2\pi} - \frac{p_3 i}{2\pi} \right\} \frac{1}{z-z_0} + \omega^*(z) \end{aligned} \quad (14a)$$

여기서,  $\Phi^*(z)$ 와  $\Omega^*(z)$ ,  $\omega^*(z)$ 는 점  $z=z_0$ 에서 해석적이며,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\mu b}{\pi(1+\kappa)i} - \frac{p}{2\pi(1+\kappa)} \\ S_2 &= \frac{\kappa \bar{p}}{2\pi(1+\kappa)} - \frac{\mu \bar{b}}{\pi(1+\kappa)i} \\ S_3 &= \left( \frac{\mu b}{\pi(1+\kappa)i} - \frac{p}{2\pi(1+\kappa)} \right) (\bar{z}_0 - z_0) + \frac{m}{2\pi i} \end{aligned} \quad (14b)$$

이다.  $b = b_1 + ib_2$ 이고  $p = p_1 + ip_2$ 이다. 식(5)에 주어진 적분  $M_1^{(A, B)}\{\Gamma_{z_0}\}$ 은 유수정리(residue theorem)에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M_1^{(A, B)}\{\Gamma_{z_0}\} &= Re \left[ Res \left\{ \pi \frac{1+\kappa}{\mu} (\Phi^{(A)}(z) \Omega^{(B)}(z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Phi^{(B)}(z) \Omega^{(A)}(z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi}{\mu} \omega^{(A)}(z) \omega^{(B)}(z) \right\}_{z=z_0} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $Re$ 는 실수부를 나타내고,  $Res\{ \}_{z=z_0}$ 는 점  $z=z_0$ 에서의 유수(residue)를 나타낸다. 상태  $A$ 에 대한 식 (14a)와 보조상태  $B$ 에 대한 식(6)과 식 (10)을 식(15)에 대입하면, 각 보조장  $B_i$ ( $B_i=B_1, B_2, B_3, B_4$ )에 대한  $M_1^{(A,B)}\{\Gamma_{z_0}\}$ 는 쉽게 계산되며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M_1^{(A,B_1)}\{\Gamma_{z_0}\} &= \frac{\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}{4\mu} Re\{ \bar{S}_1 F_0(\bar{z}_0) \\
 &\quad + \{S_2 F_0(z_0) + S_3 F_1(z_0)\} \} \\
 M_1^{(A,B_2)}\{\Gamma_{z_0}\} &= \frac{\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}{4\mu} Im\{ \bar{S}_1 F_0(\bar{z}_0) \\
 &\quad + \{S_2 F_0(z_0) + S_3 F_1(z_0)\} \} \\
 M_1^{(A,B_3)}\{\Gamma_{z_0}\} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} Re\left[ \frac{b_3 i - \mu b_3}{z_0} \right] \\
 M_1^{(A,B_4)}\{\Gamma_{z_0}\} &= \frac{1+\pi}{4\mu} Re\left[ \frac{S_1 - S_2 + \frac{S_3}{z_0}}{z_0} \right] \quad (16a)
 \end{aligned}$$

여기서  $Im$ 은 허수부를 나타내고,

$$F_n(z_0) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz_0^n} z_0^{-1/2} \quad (16b)$$

이다.  $M_1^{(A,B)}\{\Gamma_{z_0}\}$ 이 위와 같이 결정되었기 때문에, 응력강도계수  $K_I^{(A)}$ ,  $K_{II}^{(A)}$  및  $K_{III}^{(A)}$ 와  $T^{(A)}$ 는 식(12a) ~ (12d)에 의해 계산되며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_I^{(A)} &= -\sqrt{2\pi} Re\{ \bar{S}_1 F_0(\bar{z}_0) \\
 &\quad + \{S_2 F_0(z_0) + S_3 F_1(z_0)\} \} \\
 K_{II}^{(A)} &= -\sqrt{2\pi} Im\{ \bar{S}_1 F_0(\bar{z}_0) \\
 &\quad + \{S_2 F_0(z_0) + S_3 F_1(z_0)\} \} \\
 K_{III}^{(A)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Re\left[ \frac{b_3 i - \mu_2 b_3}{z_0} \right] \\
 T^{(A)} &= -2Re\left[ \frac{S_1 - S_2 + \frac{S_3}{z_0}}{z_0} \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

응력강도계수에 대한 식(17)의 처음 세식은  $Suo^{(14,15)}$ 에 의해 다른 방법으로 얻어진 결과와 일치한다.

### 5.2 균열면하중이 작용하는 균열

Fig. 2(c)에 보여진 바와 같이 균열면에 트랙션  $t_1^{0+}(x_1)$ 과  $t_1^{0-}(x_1)$ 이 작용하고 있다. Fig. 4(b)에 나타낸 바와 같은 경로  $\Gamma_0 (= \Gamma_c^+ + \Gamma_r + \Gamma_c^- - \Gamma_s)$ 를 식(12a) ~ (12d)의 좌변에 있는  $M_1^{(A,B)}$ 을 계산하기 위해 선택했다.

$r \rightarrow \infty$ 일 때 응력성분은  $\sigma_{ij}^{(A)} = O(1/r)$ 이고,  $\sigma_{ij}^{(B)} = O(1/\sqrt{r})$  또는  $O(1/r)$ 이므로, 무한히 큰 경로  $\Gamma_r$ 상에서의  $M_1^{(A,B)}$ 은 0이다. 따라서 보존법칙  $M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} = 0$ 은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$M_1^{(A,B)}\{\Gamma_0\} = M_1^{(A,B)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\} \quad (18)$$

식(6)과 식(10)에 주어진 포텐셜로 표현되는  $u_j^{(B)}$ 를 식(1)에 대입하여 보조장  $B_i$ 에 대응되는 적분  $M_1^{(A,B)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\}$ ( $B_i=B_1, B_2, B_3, B_4$ )를 계산하면, 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 M_1^{(A,B_1)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\} &= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1+\kappa}{\mu} \int_{-\infty}^0 \frac{t_2^{0+}(x_1) - t_2^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 M_1^{(A,B_2)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\} &= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1+\kappa}{\mu} \int_{-\infty}^0 \frac{t_1^{0+}(x_1) - t_1^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 M_1^{(A,B_3)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} \int_{-\infty}^0 \frac{t_3^{0+}(x_1) - t_3^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 M_1^{(A,B_4)}\{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-\} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{1+\kappa}{\mu} \int_{-\infty}^0 \frac{t_1^{0+}(x_1) + t_1^{0-}(x_1)}{x_1} dx_1 \quad (19)
 \end{aligned}$$

최종적으로 식(12a) ~ (12d)를 사용하여 응력강도계수와 T-응력을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_I^{(A)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{t_2^{0+}(x_1) - t_2^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 K_{II}^{(A)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{t_1^{0+}(x_1) - t_1^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 K_{III}^{(A)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{t_3^{0+}(x_1) - t_3^{0-}(x_1)}{\sqrt{-x_1}} dx_1 \\
 T^{(A)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{t_1^{0+}(x_1) - t_1^{0-}(x_1)}{x_1} dx_1 \quad (20)
 \end{aligned}$$

특별히,  $t_i^{0-}(x_1) = -t_i^{0+}(x_1)$ 일 때 식(20)의 처음 세 식은  $Suo^{(14,15)}$ 의 결과와 일치한다. 식(20)의 세번째 식은 균열선단 근처에서 균일면하중이 0인 경우에만 성립한다.

## 6. 결 론

상호보존적분은 경계치문제를 풀지 않고 균열문제에 대한 응력강도계수와 T-응력을 결정하는데 사용될 수 있음을 보였다. 특별히, 재료내에 집중하중과 전위가 있고 균열면에 하중이 작용하는 반무한 균열문제에 이 적분을 적용했다. 본 논문에서 제안한 방법은 응력강도계수와 T-응력의 수치계산을 용이하게 한다. 이 경우에 있어서 식(13)과 식(18)은 성립하지 않으므로 폐형해는 쉽게 구해지지 않는다. 그러나 유한형상을 갖는 문제에 대하여 유한요소계산을 실행하여 변위와 응력을 구하고, 식

(6)과 (10)에 주어진 보조해를 사용하면,  $M_1$ 적분을 이용하여 응력강도계수  $K_I$ ,  $K_{II}$  및  $K_{III}$ 와  $T$ -응력을 계산할 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Knowles, J. K. and Sternberg, E., 1972, "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics," Arch. Rat. Mech. Analysis, Vol. 44, pp. 187~211.
- (2) Eshelby, J. D., 1975, "The Calculation of Energy Release Rates," in Prospects of Fracture Mechanics, G. C. Sih (ed.), Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. 69~84.
- (3) Freund, L. B., 1978, "Stress Intensity Factor Calculations Based on a Conservation Integral," Int. J. Sol. Struc., Vol. 14, pp. 241~250.
- (4) Ouchterlony, F., 1978, "Some Stress Intensity Factors for Self-Similar Cracks Derived from Path-Independent Integrals," J. Elast., Vol. 8, pp. 259~271.
- (5) Ouchterlony, F., 1980, "Symmetric Cracking of a Wedge by Transverse Displacements," J. Elast., Vol. 10, pp. 215~223.
- (6) Rice, J. R., 1985, "Conserved Integrals and Energetic Forces," in Fundamentals of Deformation and Fracture, B. A. Bilby, K. J. Miller and J. R. Willis (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 33~56.
- (7) Park, J. H. and Earmme, Y. Y., 1986, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems," Mech. of Mat'l., Vol. 5, pp. 261~276.
- (8) Chen, F. H. K. and Shield, R. T., 1977, "Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type," J. Appl. Math. Phys., Vol. 28, pp. 1~22.
- (9) Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., 1980, "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity," J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 335~341.
- (10) Bui, H. D., 1983, "Associated Path Independent J-Integrals for Separating Mixed Modes," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, pp. 439~448.
- (11) Cotterell, B. and Rice, J. R., 1980, "Slightly Curved or Kinked Cracks," Int. J. Frac., Vol. 16, pp. 155~169.
- (12) Cardew, G. E., Goldthorpe, M. R., Howard, I. C. and Kfoury, A. P., 1985, "On the Elastic T-Term," in Fundamentals of Deformation and Fracture, B. A. Bilby, K. J. Miller and J. R. Willis (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 465~476.
- (13) Kfoury, A. P., 1986, "Some Evaluation of the Elastic T-Term Using Eshelby's Method," Int. J. Frac., Vol. 30, pp. 301~315.
- (14) Suo, Z., 1989, "Singularities Interacting with Interfaces and Cracks," Int. J. Sol. Struc., Vol. 25, pp. 1133~1142.
- (15) Suo, Z., 1990, "Singularities, Interfaces, Cracks in Dissimilar Anisotropic Media," Proceedings of the Royal Society(London) A, Vol. 427, pp. 331~358.
- (16) Rice, J. R., 1968, "A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 379~386.
- (17) Budiansky, B. and Rice, J. R., 1973, "Conservation Laws and Energy Release Rates," J. Appl. Mech., Vol. 40, pp. 201~203.
- (18) Williams, M. L., 1959, "The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media," Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 49, pp. 199~204.
- (19) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York.