

〈論 文〉

이차원 층류제트를 위한 비 상사해

이 상 환*
(1993년 3월 5일 접수)

Non-Similarity Solution for Two-Dimensional Laminar Jet

Sang Hwan Lee

Key Words : Laminar Jet(층류제트), Finite Opening(유한출구), Non-Similarity Solution(비 상사해), Nonlinear Diffusion Equation(비선형 확산방정식), Degenerate Parabolic Equation(변질성 포물형방정식), Intermediate Asymptotics(중간 점근해)

Abstract

An Approximate solution for plane two-dimensional incompressible laminar jet issuing from a finite opening with arbitrary initial profile into the same ambient fluid is proposed. For an arbitrary initial velocity profile, the problem is generated from the well known similarity solution for the jet of infinitesimal opening and provides good approximations in the region where the similarity solution cannot be used as an approximation. The asymptotic behavior of this solution is investigated and it is shown that, as goes downstream, the present solution approaches the similarity solution.

기 호 설 명

x	: 흐름방향의 변수좌표	ζ_0	: 상수 (= $(9/2)^{1/3}$)
y	: x 에 수직인 방향의 좌표	ξ	: 이동된 상사변수
u	: x 방향의 속도성분	u_s	: 상사해
v	: y 방향의 속도성분	$u_{0,s}$: 상사해의 경계조건
ν	: 동점성계수	u_1	: 식(22)에서 정의된 상사해의 섭동부분
u_0	: $x=0$ 일 때 u (경계조건)	Δu_0	: 상사해의 경계조건의 섭동부분
M	: 출구의 단위길이당 운동량	\bar{u}_s	: 이동된 상사해 (shifted similarity solution)
ρ	: 유체의 밀도	c_1, c_2	: 임의의 상수
κ	: M/ρ	x_0	: 식(14)에서 정의된 상수
ϕ	: 유량함수	L_i	: 오차노름 (error norm)
ϕ	: ϕ 의 적분변수	e	: 식(16)에서 정의된 상수
a	: 유한출구의 넓이	I_j	: 식(18)에서 정의된 연속모멘트
Ω	: 종속영역	A_m	: 식(19)에서 정의된 급수의 계수
η	: 식(9)에서 정의된 상사변수	μ_m	: 식(19)에서 정의된 급수의 멱수
$\bar{\eta}$: 이동된 상사변수		
ζ	: 식(10)에서 정의된 상사변수		

1. 서 론

*정회원, 한양대학교 기계설계학과

본 연구는 유한출구(finite opening)로부터 같은

층류의 정지유체로 분사되는 평면 2차원 비압축성 층류제트를 대상으로 한다. 기본 가정은 레이놀즈 수가 충분히 커서 경계층 가정이 유효하나 층류로 남아 있다는 것이다. 실제 층류의 속도분포는 상당히 불안정하여 짧은 하류 거리안에서 난류가 된다. 그럼에도 불구하고 본 문제는 적어도 다음 두가지 점에서 유용하다. 첫째, 안정성해석(stability analysis)에 쓰일 수 있는 층류속도분포를 제공하고, 둘째, 약간의 수정을 거쳐서 실제 난류제트에 적용시킬 수 있다는 것이다. 정압제트를 위한 경계층 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, ν 는 동점성계수이고 u, v 는 각각 x, y 방향의 속도성분들이다.

실제의 제트에 대해 우리는 두 가지 타입의 출구를 생각할 수 있다.⁽¹⁾ 첫째로, 평판에 뚫린 구멍을 생각할 수 있다. 이 경우, 유동박리가 일어난다. 이런 제트는 주위유체 안에 와류(toroidal eddy)를 일으키기 때문에 상사성에 대한 논의는 무의미하다. 둘째로, 관으로부터의 제트가 있다. 이 경우, 출구점에서 주위유체를 빨아들여 안정된 속도분포를 이루기 때문에 상사성에 대한 논의가 가능하게 보인다. 본 연구에서는 이런 경우를 다루게 된다. 이런 형태의 제트에 대한 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(0, y) = u_0(y) \quad (2)$$

여기서, $u_0(y)$ 는 임의의, 양의 값을 가지는, 완만한(smooth) 연속함수이고, $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때, $u_0(y) \rightarrow 0$ 이다. x 값의 어떤 위치를 지나는 운동량이 일정해야 한다는 사실은 다음과 같은 부가조건으로 나타난다.

$$k = \frac{M}{\rho} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, y) dy \quad (3)$$

여기서, M 은 출구의 단위길이당 운동량이다.

$u(x, y) > 0$ 이라는 조건은 von Mises변수, (x, ϕ) ⁽²⁾의 도입을 가능하게 한다. 여기서 유량함수 $\phi(x, y)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -v \quad (4)$$

새로운 독립변수인 (x, ϕ) 를 사용하여 경계층 방정식(1)은 다음과 같은 한개의 지배방정식으로 변환될 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \quad (5)$$

이 식은 유명한 비선형 확산방정식(nonlinear diffusion equation)이다. 이 식의 비교적 간단한 형태를 생각하면 실제의 많은 물리적 현상이 이 방정식에 의해 지배된다는 것은 놀라운 것이 아니다. 그러나 임의의 경계조건에 대해 이 방정식을 풀기는 용이하지 못하다. 식(5)는 변질성 포물형방정식(degenerate parabolic equation)이다. 즉, $u(x, \phi)$ 가 양의 값을 갖는 점 주위에서는 포물형방정식이나 $u(x, \phi) = 0$ 인 점 주위에서는 그렇지 않다는 성질을 가진다. 이러한 변질성(degeneracy) 때문에 어느 곳에서나 항상 고전적 의미의 해를 갖지는 않는다.

특히 $u(x, \phi) > 0$ 인 영역과 $u(x, \phi) = 0$ 인 영역의 경계에서는 $\partial u / \partial \phi$ 가 불연속일 수 있다. 더군다나 이러한 성질때문에 컴퓨터를 이용한 수치해를 얻기조차 용이하지 않다.⁽³⁾

1차원 확산방정식을 지배방정식으로 하는 Cauchy 문제는 Oleinik, Kalashnikov와 Yui-Lin⁽⁴⁾에 의해 처음으로 연구되었다. 그들은 약해급(class of weak solution)의 개념을 도입하여 경계조건이 compact support를 가질 경우 그 해 $u(x, \phi)$ 역시 양수인 각 x 값에 대해 변수 ϕ 로 표현된 compact support를 가지며 $u(x, \phi)$ 가 양의 값을 갖는 어떤점 주위에서 고전적 의미로 지배방정식을 만족시킨다는 것을 증명하였다. 같은 타입의 경계조건에 대해 Kalashnikov⁽⁵⁾는 모든 양의 값을 갖는 해는 한쌍의 경계선(interface curve)에 의해 싸여있다는 것을 증명했으며, Arosen⁽⁶⁾은 이 경계선들이 Lipschitz연속이라는 것을 보였고, Kneer⁽⁷⁾는 이 경계선들이 x 값이 커짐에 따라 $x^{1/3}$ 으로 증가한다는 것을 보였다.

Von Mises변환을 통하여 (x, y) 평면의 경계조건, 식(2)는 (x, ϕ) 평면에서는 다음과 같은 compact support타입의 경계조건이 된다.

$$u(0, \phi) = \begin{cases} u_0(\phi) & (|\phi| < d) \\ 0 & (|\phi| \geq d) \end{cases} \quad (6)$$

이 경계조건은 관계식,

$$\int_{-d}^{+d} u_0(\phi) d\phi = k$$

를 만족시키는데 이 식은 부가조건, 식(3)을 (x, ϕ) 평면으로 변환한,

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, \phi) d\phi \quad (7)$$

에서 비롯된 것이다.

이렇게 하여 위에서 쓰여진 Von Mises 변환은 $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ 인 영역에서 종속영역 (domain of dependence);

$$\Omega = \Omega(u) = \{(x, \phi) \in R \times (0, \infty) : u(x, \phi)\} \quad (8)$$

으로 일대일 사상(one-to-one map)을 이룬다. 위에서 $u(x, \phi)$ 는 변환된 지배방정식(5)를 고전적 의미에서 만족시키며, 종속영역(8)은 한쌍의 경계선으로 싸여있다. 1933년, Schlichting⁽⁸⁾은 극소입구(infinitesimal opening)를 가진 제트에 대한 경계층 방정식을 풀어

$$\phi = \xi_0 (\nu k x)^{1/3} \tanh \eta \quad (9)$$

를 얻었다.

여기서, $\xi_0 = (9/2)^{1/3}$ 이며, $\eta = (\frac{\xi_0}{6}) (\frac{k}{\nu^2})^3 (\frac{y}{x^{2/3}})$ 이다.

Von Mises 평면에서 위 식은,

$$u_s(x, \phi) = (\frac{k^2}{\nu x})^{1/3} (\frac{1}{6}) (\xi_0^2 - \xi^2), \quad |\xi| < \xi_0 \quad (10)$$

이 된다. 여기서 $\xi = \frac{\phi}{(\nu k x)^{1/3}}$ 이다.

이것은 물론 순간점용출(instantaneous point source)에 대하여 비선형 확산방정식(5)를 푼 Zeldovich와 Kompaneets⁽⁹⁾의 해와 일치하는 것이다. (1950년대 발견) 대응하는 물리적 평면상의 속도분포는 다음과 같이 쉽게 역변환 될 수 있다.

$$u_s(x, y) = \frac{\xi_0^2}{6} (\frac{k^2}{\nu x})^{1/3} \text{sech}^2 \eta \quad (11)$$

위의 상사해는 임의의 출구조건에 대한 해를 구하는데 직접적으로 쓰여질 수 없으나 $x \rightarrow \infty$ 일 때, 극한해(limiting solution)로 생각되어질 수 있다. 이러한 수학적 현상에 대한 엄밀한 증명은 경계층이론을 이러한 관점에서 증명한 Serrin⁽¹⁰⁾의 연구가 최초이다. 그는 맥수로 표시된 흐름속도에 대한 경계층 방정식의 해가 먼 하류에서는 Falkner-Scan의 상사해에 수렴한다는 것을 보였다. 이 연구를 바탕으로 Barenblatt와 Zeldovich⁽¹¹⁾에 의해

중간점근해(intermediate asymptotics)의 개념이 도입되었다. 그것은 일반적인 비 상사적문제(non-similar problem)의 극한을 구하기 위한 것이었다. 그러나 중간점근해는 지배방정식의 해가 경계조건외 상세(detail)에 더 이상 종속되지 않는 영역에서의 해를 말한다. 본 연구의 목적은 경계조건외 상세를 포함하는 근사해를 구하는 것이다. 그러한 근사해는, 상사해(11)이 근사해로 쓰일 수 없는 영역에서 보다 좋은 근사값을 제공할 것이다.

2. 비 상사해

지배방정식과 부가된 조건들이 어떤 변환군에 대해 불변(invariant under a group of transformation)이라면 그 경계값 문제는 상사해를 가진다는 것은 잘 알려진 사실이다.

본 연구에서 다루고자 하는 경계값 문제(식(5)~식(7))를 이러한 관점에서 생각해 보면 지배방정식(5)는 어떤 변환군(예를 들어 $u' = c_1 u$, $\phi' = c_2^{-1} \phi$, $x' = c_1^{-1} c_2^{-2} x$)에 대해 불변이나 경계조건(6)은 그 변환군에 대해 불변이 아니기 때문에 비 상사적문제라는 것을 알 수 있다. 그러나 본 문제의 이러한 부분적 불변성(partial invariance)은 어떤 종류의 근사해가 기본적인 상사해로부터 얻어질 수 있다는 것을 시사한다.

Zeldovich와 Barenblatt⁽¹²⁾에 의해 최초로 제시된 바와 같이 식(5)는 독립변수의 이동(shift)에 대해 불변이므로 극소 입구에 대한 상사해 식(10)을 이동시킨 다음 역시 식(5)의 엄밀해(exact solution)이다.

$$\tilde{u}(x, \phi) = \begin{cases} \left[\frac{k^2}{\nu} (x+x_0) \right]^{1/3} (\frac{1}{6}) (\tilde{\xi}_0^2 - \tilde{\xi}^2) & (|\tilde{\xi}| < \tilde{\xi}_0) \\ 0 & (|\tilde{\xi}| \geq \tilde{\xi}_0) \end{cases} \quad (12)$$

여기서, $\tilde{\xi} = \frac{\phi - \phi_0}{[\nu k (x+x_0)]^{1/3}}$, $\phi_0 = \frac{1}{k} \int_{-a}^{+a} u_0(\phi) d\phi$ 이고, x_0 는 추후결정 될 상수이다. 위의 해는 다음과 같은 경계조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{s,0}(x, \phi) &= \tilde{u}_s(0, \phi) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{k^2}{\nu x_0} \right)^{1/3} (\frac{1}{6}) \left[\xi_0^2 - \left(\frac{\phi - \phi_0}{(\nu k x_0)^{1/3}} \right)^2 \right] & (|\phi - \phi_0| < \xi_0 (\nu k x_0)^{1/3}) \\ 0 & (|\phi - \phi_0| \geq \xi_0 (\nu k x_0)^{1/3}) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

위의 경계조건이 나타내는 분포곡선이 ϕ 축 상의 두 점 $\phi = \pm d + \phi_0$ 를 지나도록 x_0 의 값을 택하면,

$$x_0 = \frac{1}{\nu k} \left(\frac{d}{\xi_0} \right)^3 \quad (14)$$

이다. 위와 같이 x_0 의 값을 택하면 경계조건 (13)은 다음과 같이 간단한 형태의 포물선분포를 이룬다.

$$\bar{u}_{s,0}(\phi) = \begin{cases} \frac{3k}{4d} \left[1 - \left(\frac{\phi - \phi_0}{d} \right)^2 \right] & (|\phi - \phi_0| < d) \\ 0 & (|\phi - \phi_0| \geq d) \end{cases} \quad (15)$$

그러므로 식(12)는 경계조건 (15)를 만족시키는 지배방정식 (5)의 엄밀해이다. 그런데 식(12)는 임의의 경계조건에 대해서도 그 경계조건이 부가조건 (7)을 만족한다면 한개의 근사해로 생각될 수 있다. 이러한 사실은 다음과 같이 수학적으로 설명된다. 근사값의 정확도를 나타내는 척도로써, 유한 일차원 구간에서의 어떤 함수 $e(\phi)$ 의 오차노름 (error norm)은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$L_i = \|e\|^i = \left| \int_{-1}^{+1} e(\phi)^i d\phi \right|^{1/i}, \quad i=1, 2, \dots \quad (16)$$

함수, $e(\phi)$ 를 다음과 같이 택하면,

$$e(\phi) = \Delta u_0(\phi) = u_0(\phi) - \bar{u}_{s,0}(\phi) \quad (17)$$

부가조건 (7)은 두 곡선사이의 면적을 나타내는 L_1 의 오차노름을 0이 되게 한다. 이러한 사실은 부가조건 (7)을 만족하는 어떠한 임의의 경계조건 이든지 경계조건 (15)에 의해 대략적으로 근사화 될 수 있다는 것을 의미한다. 지배방정식의 해는 하류로 갈수록 감소하기 때문에 오차 $|u - u_0|$ 는 $x = 0$ 에서 최대값을 갖는다. 그러므로 해(12)는 경계 값 문제(식(5)~식(7))에 대한 최적의 L_1 근사해이다.

Andre와 Tsien^(13,14)은 Schlichting의 상사해를 실험적으로 확인하기 위하여 두 개의 파라미터, 즉 퍼짐각과 관 출구로부터 좌표의 원점을 뒤로 이동한 거리를 도입하였다. 그들의 연구결과 또한, 하나의 L_1 근사해로 생각되어질 수 있다. 그러나 실제의 응용을 위해서는 임의의 경계조건에 좀더 많은 상세를 포함하는 근사해가 필요하다. Euler의 최소화 방정식의 결과⁽¹⁵⁾에 의하면, 최적의 L_2 근사해를 갖기 위해서는 $e(\phi)$ 의 모든 연속되는 모멘트가

$$I_j = \int_{-d+\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) \phi^j d\phi, \quad j=1, 2, \dots, \quad (18)$$

0이 되어야 한다. 또한 첫번째 모멘트로부터 시작하여 더 많은 수의 연속적 모멘트가 0이 될수록 더 좋은 근사해를 가지게 된다. 이러한 사실은 다음과 같은 방법으로 하나의 좋은 근사해가 얻어질 수 있음을 말해준다. 그 근사해가 다음과 같은 멱급수 (asymptotic series)의 형태를 갖는다고 가정하면

$$u(x, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\xi) x^{-\mu_m} \quad (19)$$

여기서, μ_m 은 감소하는 멱급수이고 ξ 는 유한하다고 가정되었다.

첫번째 항은 해(12)로 대체되고 나머지 항의 계수들은 연속되는 모멘트 (18)로써 나타내어질 수 있다. 즉,

$$\begin{cases} A_1(\xi) x^{-\mu_1} = u_s(x, \phi) \\ A_m(\xi) = I_{m-1} A'(\xi) \quad (m=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (20)$$

위와 같은 형태의 근사해를 구하기 위해 임의의 경계조건을 다음과 같이 분리시킨다.

$$u_0(\phi) = \bar{u}_{s,0}(\phi) + \Delta u_0(\phi) \quad (21)$$

본 문제의 해 또한 이동된 상사해와 $\Delta u_0(\phi)$ 로 인하여 섭동된 해의 합으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$u(x, \phi) = \bar{u}_s(x, \phi) + u_1(x, \phi) \quad (22)$$

여기서 우리는 본 문제의 부분적 불변성이 제시하는 바와 같이 이동된 상사해를 이용하여 지배방정식을 선형화하려 한다. 우선 분리된 해(22)를 지배방정식(5)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ = \nu \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\bar{u}_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial \phi} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (\bar{u}_s u_1) \right) + \nu \frac{\partial}{\partial \phi} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

이 된다. $\bar{u}_s(x, \phi)$ 는 경계조건 $\bar{u}_{s,0}(\phi)$ 를 만족하는 엄밀해이며 x 의 큰 값에 대해 $\bar{u}_s(x, \phi) \gg u_1(x, \phi)$ 로 가정할 수 있으므로 아래의 선형화된 방정식의 해는 섭동된 해 u_1 의 첫번째 근사해로 생각되어질 수 있다.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [\bar{u}_s(x, \phi_0) u_1] \quad (24)$$

위 식은 섭동된 경계조건,

$$u_1(x, \phi) = \Delta u_0(\phi) \quad (25)$$

를 만족시켜야 한다.

위의 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 적분변환을 도입한다.

$$s = \int \nu \bar{u}_s(x', \phi_0) dx' \quad (26)$$

여기서, 적분상수는 0으로 취해졌으나 일반성을 잃지 않는다. 식(24)는 위의 변환을 거쳐 다음과 같은 선형 확산방정식이 된다.

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} \quad (27)$$

잘 알려진 바와 같이 경계조건 (25)를 만족하는 선형 확산방정식의 해는,

$$u_1(s, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) e^{-\frac{(\phi-\phi)^2}{4s}} d\phi \quad (28)$$

이다. 식(26)의 변환을 써서 von Mises 변수로 나타내면 위 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_1(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}} \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) \exp\left(-\left[\frac{\phi-\phi}{\xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}}\right]^2\right) d\phi \quad (29)$$

그러므로 임의의 경계조건 (6)을 만족하는 지배 방정식 (5)의 종속영역 Ω 상의 근사해를 다음과 같이 얻었다.

$$u_1(x, \phi) = \bar{u}_s(x, \phi) + u_1(x, \phi) = \left[\frac{k^2}{\nu(x+x_0)}\right]^{1/3} \left(\frac{1}{6}\right) (\xi_0^2 - \xi^2) + \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}} \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) \exp\left(-\left[\frac{\phi-\phi}{\xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}}\right]^2\right) d\phi \quad (|\xi| < \xi_0) \quad (30)$$

위의 해를 해석적 방법을 써서 물리적 평면(x, y)상에 폐쇄형(closed form)으로 나타내기가 대단히 어려우므로 $\bar{u}_s \gg u_1$ 의 가정을 다시한 번 써서 $u(x, \phi) = u_s(x, \phi)$ 를 첫번째 근사값으로 취하면 대응하는 유량함수는 다음과 같다.

$$\phi = [\nu k(x+x_0)]^{1/3} \tanh \bar{\eta} + \phi_0 \quad (31)$$

여기서, $\bar{\eta} = \left(\frac{\xi_0}{6}\right) \left(\frac{k}{\nu^2}\right)^{1/3} \frac{y}{(x+x_0)^{2/3}}$ 이다. 위의 유량함수를 von Mises 평면상의 해(30)에 대입하여 물리적 평면상의 속도분포를 다음과 같이 얻는다.

$$u_1(x, y) = \bar{u}_s(x, y) + u_1(x, y) = \left[\frac{k^2}{\nu(x+x_0)}\right]^{1/3} \left(\frac{\xi_0^2}{6}\right) \sec h^2 \bar{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}} \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) \exp\left(-\left[\frac{\phi-\phi}{\xi_0 [\nu k(x+x_0)]^{1/3}}\right]^2\right) d\phi \quad (32)$$

3. 해의 점근과정

x 값이 커짐에 따라 근사해(32)의 점근과정을 고찰하기 위하여 우선 이동된 상사해, $\bar{u}_s(x, y)$ 를 작은값의 변수인 x_0/x 의 멱급수로 전개하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\bar{u}_s(x, y) = u_s(x, y) + O(x^{-1}) \quad (33)$$

마찬가지 방법으로 섭동된 항 $u_1(x, y)$ 의 적분함수를 ϕ/ϕ_0 의 멱급수로 전개하고 유량함수 관계식(31)을 대입하면,

$$u_1(x, y) = \frac{e^{-\tanh^2 \bar{\eta}}}{\sqrt{\pi} \xi_0 (\nu k x)^{1/3}} \left[\frac{2 \tanh^2 \bar{\eta} - 1}{\xi_0^2 (\nu k x)^{1/3}} \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} u_0(\phi) \phi^2 d\phi + \dots \right] \quad (34)$$

를 얻는다. 위의 급수에서 원래의 첫번째 항과 두 번째 항은 각각

$$\int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_s(\phi) d\phi = 0, \quad \int_{-d-\phi_0}^{+d+\phi_0} \Delta u_0(\phi) \phi d\phi = 0 \quad (35)$$

이므로 각각 소거되었다. 급수(34)는 조건(20)을 만족시키는 급수(19)의 형태를 갖추었다. 따라서

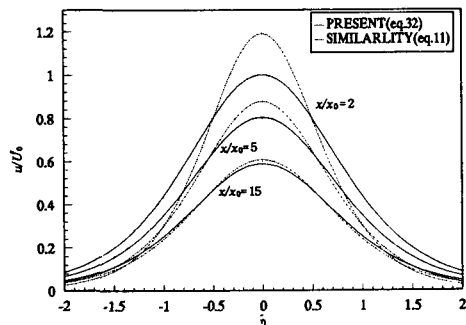


Fig. 1 Present solution and similarity solution for laminar jet

위에서 구한 근사해(32)는 엄밀해에 대한 하나의 L_2 근사값을 나타낸다고 할 수 있다. 또한 예상된 바와 같이 $x \rightarrow \infty$ 일 때 임의의 초기 속도분포에 대한 근사해(32)는 극소입구에 대한 Schlichting의 상사해(11)에 접근한다. 이러한 수렴과정을 통하여 섭동된 항 $u_1(x, y)$ 는 점근적으로 감소하여 결국 흔적을 남기지 않고 없어진다. Fig. 1은 출구 속도 분포가 $u_0(\phi) = U_0$ 일 때의 경우로서 위와 같은 점 근 양상을 잘 나타내어 주고 있다.

6. 결 론

임의의 출구 속도분포를 가지는 2차원 층류제트에 대하여 Schlichting의 기본 상사해는 먼 하류 즉, 초기 조건에 더 이상 영향을 받지 않는 영역에서만 하나의 근사해로 쓰일 수 있다. 본 연구에서는 문제의 부분적 불변성에 착안, 기본 상사해를 이용하여 비 상사적 근사해를 구하였다. 이해는 이동된 상사해에 섭동된 초기 조건의 효과가 중첩되어 나타남을 보여주며 기본 상사해가 근사해로 쓰일 수 없는 영역에서도 좋은 근사값을 제공한다. 또한 해의 점근과정을 통해 기본상사해가 본 문제의 중간 점근해임을 증명하였다. 조제된 초기 속도 분포를 가진 평면제트에 대한 실험치가 없는 관계로 실험에 의한 확인은 이루어지지 못하였으나 본 근사해가 기본 상사해보다 좋은 근사값을 가지리라는 것은 수학적으로 명백하다. 제트에 대한 본 해석과정은 약간의 수정을 거쳐 다른 경계층 문제에도 적용될 수 있으리라 본다. 예를 들어, 임의의 상류 속도분포를 가진 고체벽면위의 2차원 층류유동이 하류로 감에 따른 발달과정문제(the downstream continuation problem) 등에 적용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Birkhoff, G. and Zarantonello, E. H., 1957, "Jet, Wakes, and Cavities," Academic Press, New York, San Fransisco, London.
- (2) von Mises, R., 1927, "Bemerkungen zur Hydrodynamik," Z. Angew. Math. 7, pp. 425.
- (3) MacCamy, R.C., 1985, "Degenerate Diffusion Problems in Physical Mathematics and Non-linear PDE," Lightbourne J. H. III and Rankin S. M. Editors, Mercel Dekker Inc. New York and

- Brassel.
- (4) Oleinik, O. A., Kalashnikov, A. S. and Chzhou Yui-Lin, 1958, "The Cauchy Problem and Boundary Problems for Equations of the Type of Unsteady Filtration," Izv. Akad. Nauk SSSR Sic. Mat, 22, pp. 491~704.
- (5) Kalashnikov, A. S., 1967, "On the Occurance of Singularities in Solution of non-steady Seepage Equation," USSR Comput. Math and Phys. 7, pp. 269~275.
- (6) Aronson, D. G., 1967, "Regularity Properties of Flows Throught Porous Media" SIAM J. Appl. Math., 17, pp. 461~467.
- (7) Knerr, B. F., 1977, "The Porous Media Equation in one Dimension," Trans. Amer. Math. Soc., 234, pp. 381~415.
- (8) Schlichting, M., 1933, Laminare Strahlenansbreitung, Zamm, 13, pp. 260~263.
- (9) Zeldovich, Y. B. and Kompaneets, A. S., 1950, "On the Propagation of Heat for nonlinear Heat Conduction," Collection Dedicated to the 70th Birthday of Academician A. F. Ioffe, P. I. Lukirkii Editor Izd. AN SSSR, pp. 61~71.
- (10) Serrin, J., 1967, "Asymptotic Behavior of Velocity Profile in the Prandtl Boundary Layer Theory," Proc. Roy. Soc. A, 299, pp. 491~507.
- (11) Barenblatt, G. I. and Zeldovich, Y. B. 1972, "Self-similar Solutions as Intermediate Asymptotics," Ann. Rev. Fluid Mech. 4 pp. 285~312.
- (12) Zeldovich, Y. B. and Barenblatt, G. I., 1958, "The Asymptotic Properties of Self Modeling Solutions of the Nonsteady Gas Filtration Equations," Soviet Phy. Doklady(engl. Transl.) 3, pp. 44~47.
- (13) Andre, E. N. and Tsien, L. C., 1937, "The Velocity-Distribution in a Liquid-Into-Liquid Jet," Proc. Phys. Soc., 49, p. 381.
- (14) Andre, E. N., 1939, "The Velocity-Distribution in a Liquid-Into-Liquid Jet, Part 2: The Plane Jet," Proc. Phys. Soc., 49, p. 381.
- (15) Esch, R., 1983, "Functional approximation," Handbook of Applied Mathematics, C. E. Pearson(Ed), Van Nostrand Reinhold.