

〈論 文〉

LDV 스펙트럼 분석을 위한 재생방법의 비교 연구

이도환* · 성형진*

(1993년 5월 25일 접수)

A Comparative Study of Reconstruction Methods for LDV Spectral Analysis

Do Hwan Lee and Hyung Jin Sung

Key Words : Velocity Bias(속도편의), Reconstruction(재생), Data Density(데이터밀도), Estimator(추정법), Sample and Hold Interpolation Method(추출 및 유지보간법), Nonuniform Shannon Reconstruction Technique(불균일 Shannon 재생기법), Algorithm of Projection onto Convex Sets(볼록집합에서의 투사알고리즘)

Abstract

A critical evaluation is made of the spectral bias which occurs in the use of a laser doppler velocimeter(LDV). Two processing algorithms are considered for spectral estimates : the sample and hold interpolation method(SH) and the nonuniform Shannon reconstruction technique(SR). Assessment is made of these for varying data densities ($0.05 \leq d.d. \leq 5$) and turbulence levels($t.i. = 30\%, 100\%$). As an improved version of the spectral estimator, the utility of POCS (the projection onto convex sets) has been tested in the present study. This algorithm is found useful to be in the region when $d.d. \geq 3$.

기 호 설 명

B : 주파수 불선명함수
 C_a, C_i : Hilbert 공간 H 안에서의 닫힌 볼록집합
 $d.d.$: 데이터밀도
 e : 추정스펙트럼의 오차
 E_{uu} : 기대스펙트럼
 \hat{E}_{uu} : 추정스펙트럼
 f : 주파수
 f_{rms} : rms 대역 (root mean square bandwidth)
 g : 불균일 추출치로부터의 가능 해
 H : Hilbert 공간
 $P_{C_a}, P_{C_{AR}}, P_{C_i}$: 볼록집합에서의 투사 연산자
 R : 커널 (kernel) 행렬
 u, g : 측정과 재생의 행벡터
 $t.i.$: 난류강도

T_1 : Taylor의 미소척도

그리스문자

γ, τ : 변환시간좌표

λ_{av} : 평균추출율

특수문자

\wedge : 추정치

$\|\cdot\|$: L_2 노름

1. 서 론

버스트형 (burst type) 레이저도플러유속계 (laser doppler velocimeter : LDV)를 이용한 난류 섭동속도에 대한 스펙트럼의 정확한 평가는 실험적 연구에 중요한 문제가 되어 왔다.⁽¹⁻⁵⁾ LDV 버스트 데

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

이터의 중요한 특징의 하나는 산란입자의 속도섭동에 의해 랜덤(random)한 추출시간의 확률분포가 푸아송형태(poisson type)를 벗어난다는 점이다. 유동속도는 추출율(sampling rate)과 서로 상관되므로(mutually correlated) 소위 속도편의(velocity) 문제를 야기시킨다.^(2,3) 속도편의를 포함시킨 스펙트럼 추정(estimation)과 관련있는 논문들을 살펴보면 이에 대한 연구들이 상대적으로 적다는 사실을 알 수 있다.⁽¹⁻⁵⁾ 속도편의에 의해 야기되는 스펙트럼의 왜곡현상이 몇몇 연구에서 제기되었으나 이들을 추출조건(sampling condition) 또는 유동조건(flow condition)에 제한을 두었다. 즉, 추출율이 충분히 크거나 난류강도가 비교적 낮은 경우이다. 추출시간의 확률은 유동의 추출함수의 통계적 비선형성 때문에 스펙트럼 추정치(estimate)에 대한 일반적 해석의 가능성을 배제시킨다. 스펙트럼 추정치의 편의와 안정성을 실제적인 실험조건하에서 살펴보는 것은 매우 어렵기 때문에 수치모사는 스펙트럼 추정법(estimator)의 체계적인 평가를 위한 좋은 방법으로 사용되어 왔다.^(3,5)

불균일하게 추출된 신호의 재생(reconstruction)은 과학적이고 공학적인 많은 응용면에서 깊은 관심을 끌어들였다. 시간 또는 공간적인 영역(domain)안의 회복(restoration)에 대해 몇몇 시도가 있었으나,⁽⁶⁻⁸⁾ 그 회복을 이용한 스펙트럼 추정에 관한 연구는 상대적으로 거의 없다. 낮은 난류강도와 높은 데이터밀도(data density)에 대해 Adrian과 Yao⁽²⁾는 추출 및 유지재생신호(sample and hold reconstruction: SH)에 대한 스펙트럼을 이론적으로 연구했다. Tropea⁽³⁾은 높은 데이터밀도에 대해 수치모사를 기초로 정성적인 비교 연구를 수행했다. Veynante와 Candell⁽⁴⁾은 Shannon의 추출정리(sampling theorem)의 불균일형태에 초점을 맞추고 비정상유동에 대해 매개변수 스펙트럼 해석법을 제안했다.

본 논문의 목적은 다양한 스펙트럼 추정법들에 대한 사용가능 영역을 살펴보고 난류강도 또는 추출조건에 따라 야기되는 스펙트럼의 편이 현상에 대한 이해를 증진시키는 데 있다. 이러한 목적에서 여러가지 스펙트럼 추정법을 체계적으로 평가하기 위한 수치모사를 수행하고 알려진 스펙트럼과 그 결과들을 비교하였다. 산란입자의 측정체적 도착시간의 확률과정은 추출 속도장에 비독립적인 강도함수(intensity function)를 갖는 조건부 푸아송 과정

인 2중 확률 푸아송과정(doubly stochastic poisson process)으로 모형화할 수 있다.⁽²⁾ 원시속도장의 추출함수(sampling function of primary velocity)를 생성시키기 위해 자기회기모형(autoregressive model)이 채택되었으며^(2,5) 이것은 다시 역변환이 가능한 중간값 함수(mean-value function)를 사용하여 시간축을 재배열함으로써 불균일 푸아송과정(inhomogeneous poisson process)의 추출함수를 구성하는 데 사용된다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 스펙트럼 추정을 위해 두 개의 잘 알려진 재생알고리즘을 불균일 간격의 추출치들에 대해 적용하고 이들의 결과를 사용하여 스펙트럼을 평가했다. 첫번째 방법은 불규칙하게 추출된 시계열들을 추출 및 유지보간법을 사용하여 주기적으로 재추출한 후 스펙트럼을 구하기 위해 보편적으로 사용되는 피리오도그램(periodogram) 알고리즘을 적용하는 것이다(지금부터 이를 SH라 한다). 두번째는 불규칙한 추출데이터를 재구성하기 위해 사용한 불균일 Shannon 추출알고리즘(nonuniform shannon reconstruction algorithm: SR)이다. 여기서 스펙트럼을 얻기위해 사용한 스펙트럼 추정알고리즘은 상술한 피리오도그램을 이용한다.⁽⁴⁾(이후로는 이를 SR로 표시)

스펙트럼을 추정하기 위한 보다 개선된 알고리즘으로서 본 연구에서는 또다른 재구성 방법을 적용했다. 상기한 스펙트럼 추정법은 다양한 범위의 데이터밀도와 난류수준에 대해서 적절한 평가를 하지 못하므로 볼록집합에서의 투사(projection onto convex sets: POCS) 알고리즘을 제안한다. 한정된 대역(bandwidth)을 갖는 신호의 반복적인 재생에 대해 Sauer와 Allebach⁽⁶⁾ 그리고 Yeh와 Stark⁽⁷⁾의 연구가 있었다. 이들의 재생작업에는 대역 한정성(bandwidth limit)에 대한 선형적인 지식과 추출데이터와 관련된 두개의 제한집합들(constraint sets)을 기초로 했다. 본 논문에서 재생신호의 간격을 균일하게 얻기위해 POCS 보간법을 채택하였고 이 시간변역에 대한 결과를 추출 및 유지보간법(SH)과 불균일 Shannon 정리(SR)의 결과들과 비교하였다. 최종적으로 스펙트럼의 결과들과 상기의 추정치들을 비교하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 SH와 SR에 대한 간단한 재검토와 POCS에 대한 소개를 한다. 3절에서 재생작업을 통해 얻어진 스펙트럼의 추출조건과의 관계를 알아보기 위해 데이터밀도에

대한 설명을 한다. 4절에서는 스펙트럼 추정법에 대한 수치모사의 결과를 논한 후 최종적인 결론을 5절에서 도출한다.

2. 스펙트럼 처리알고리즘

이 절에서는 불균일 간격을 갖는 신호의 균일화를 위해 사용되는 두 가지 알고리즘(즉, SH와 SR)을 간단히 살펴보고 POCS 알고리즘이라고 명명된 개선된 방법을 소개한다. 균일 간격을 갖도록 재구성된 신호의 스펙트럼평가를 위해 Welch의 피리오그램을 이용한다.⁽⁹⁾

2.1 추출 및 유지보간법(SH)

추출 및 유지보간법은 시간변역에서 계속적인 계단형태의 재생성과정으로 구성된다. 즉, 각각의 데이터 값은 측정체적 안에 다음 유효한 신호로 판단된 산란입자가 지날 때까지 유지된다. 신호의 재구성은 바로 이전의 추출값에만 의존하므로 전체적인 추출시간과 추출값에 대한 지식이 필요하지 않으며 실현상의 조차이 쉽고 보간자(interpolator)의 설치가 비교적 간단하다. 산란입자의 유효 추출율이 충분히 큰 경우 순간속도의 절대량이 연속되는 두 산란입자들 사이의 시간간격에 역비례하므로 이 보간법은 난류량들의 통계치를 계산할 때 발생하는 속도편의에 의한 오차의 보정에 쓰일 수 있다고 알려져 있다.⁽¹⁰⁾

대부분의 사용 LDV 신호처리는 새로운 측정값이 얻어질 때까지 바로 전의 값들을 유지시켜 아날로그 신호를 발생토록 하는 D/A 변환기를 장착하고 있으므로 이 아날로그 출력을 스펙트럼 분석기에 연결시키면 가장 쉽게 스펙트럼을 얻을 수 있다.

2.2 불균일 Shannon 재생기법(SR)

Clark 등⁽¹¹⁾은 추출간격이 불균일한 경우에 대해 확장된 Shannon의 재생정리를 처음으로 공항에 응용했다. 이 방법의 기본원리는 불균일하게 추출된 데이터 열을 균일간격으로 일대일 대응하는 좌표계로 변환한 후 이 균일하게 변환된 좌표계의 값들을 신장-수축변환(stretching-compression transformation)을 통해 재생신호를 얻는 방법이다. 그러므로 이 방법에서 가장 중요한 문제는 적절한 좌표 축척 변환자를 구하는 일이다. 이때 신장-수축변환자는

일대일이고 연속이며 대역-한정함수(band-limited function)이어야 한다.

불균일 Shannon 추출정리는 고전적인 Shannon의 재생법에서 유도되며 이를 좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다. 시간 $t=t_n$ 에서 추출된 임의의 함수 $u(t)$ 를 생각하자. 여기서 t_n 은 임의적으로 분포된 실수이다. 만약 $n\Delta t=\gamma(t_n)$ 이고 일대일 연속인 사상(mapping) $\tau=\gamma(t)$ 이 존재하고 또한 τ 에서 t 로의 Jacobian변환이 0 혹은 ∞ 가 아니라면 $u(t)$ 의 τ -변역으로의 사상은 다음과 같이 정의된다.

$$h(\tau)=u(t) \quad (1)$$

여기서 $h(\tau)$ 는 τ -변역에서 규칙적인 간격의 점들에 대해 이미 알고 있는 값이라는 점에 주목한다. $h(\tau)$ 가 $f_c=1/2\Delta t$ 에 의해 대역이 제한된다면 최종형태의 $u(t)$ 는 $h(\tau)$ 에 대한 균일 추출정리와 전술한 관계식들에 의해 얻어질 수 있다.

$$u(t)=\sum_n u(t_n) \frac{\sin[2\pi f_c(\gamma(t)-n\Delta t)]}{2\pi f_c(\gamma(t)-n\Delta t)} \quad (2)$$

불균일하게 분포된 추출값 $u(t_n)$ 으로부터 $u(t)$ 를 재구성하기 위해서는 $\gamma(t_n)$ 이 $n\Delta t$ 와 같은 값이 되도록 역변환이 가능하고 일대일 함수인 $\gamma(t)$ 를 찾아야 한다. 그러나 실제적인 확률과정에 대해 $\tau=\gamma(t)$ 에 대한 관계식을 해석적으로 구하는 것이 어려우므로 $\gamma(t)$ 는 $\gamma(t_n)$ 점들을 이용하여 보간함으로써 얻어질 수 있다. 이때 보간시의 유일한 제한 조건은 함수 $\gamma(t)$ 가 반드시 일대일이고 역변환이 가능해야 한다는 점이다. 본 연구에서는 함수 $\gamma(t)$ 를 결정하기 위한 예비실험의 결과로부터 가장 좋은 결과를 보인 선형보간법을 사용했다.

2.3 블록집합에서의 투사알고리즘(POCS)

POCS 재구성기법은 지금까지 영상재생 문제(image restoration problem)에 많이 이용되어 왔다.^(6,7,12) POCS 재구성기법의 기본원리는 각각이 Hilbert 공간 H 안에서 하나의 블록집합을 구성하는 제한 집합 위로의 반복투사(iterative projection)를 통해 하나의 가능한 해를 구하는 것이다. 닫혀있는 블록 집합 $C \in C = \prod_{i=1}^m C_i$ 인 관계가 성립한다. g 의 수렴성은 반복관계식에 의해 생성된다. 즉,

$$g^{(k+1)}=P_{C_m}P_{C_{m-1}}\cdots P_{C_1}g^{(k)}=P_C g^{(k)} \quad (3)$$

이를 좀더 일반적으로 표현하면,

$$g^{(k+1)} = T_{c_m} P T^{m-1} \dots T_{c_1} g^{(k)} = T_c g^{(k)}, \quad k=0, 1, \dots \quad (4)$$

여기서 $T_{c_i} = I + \alpha_i (P_{c_i} - I)$, $0 < \alpha_i < 2$ 이고 α_i 는 해의 수렴을 촉진시키는 이완계수(relaxation parameter)이며 I 는 항등(identity) 연산자이다. 이론적으로 이상적인 α_i 를 도출시키는 것은 어렵기 때문에 본 연구에서는 $\alpha_i=1$ 을 사용했다.

$g(t)$ 를 $|f_c|$ 바깥영역에서 에너지양이 극히 작은 임의의 함수라 하고 만약 추출치 $u(t_n)$ 가 불규칙하게 분포된 점 t_n 에서 $g(t_n)$ 과 같다고 가정한다면 $u(t_n)$ 과 $g(t)$ 이 관계식은 푸리에(Fourier) 해석으로부터 얻어질 수 있다.

$$u(t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\sin[2\pi f_c(t_n-t)]}{\pi(t_n-t)} dt \quad (5)$$

여기서 $u(t_n)$ 은 균일간격을 갖도록 보간되어야 할 함수이다. 이 관계식은 Fredholm의 1종 적분방정식(first kind integral equation)이라고 알려져 있으며 커널(kernel) \mathbf{R} 과 함께 다음과 같이 이산형(discrete form)으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{g} \quad (6)$$

여기서, \mathbf{u} 와 \mathbf{g} 는 각각 측정값과 재구성값에 대한 행벡터이다. \mathbf{R} 의 성분은 $\mathbf{R}(i, j) = \sin[2\pi f_c(t_i - j\Delta t)]\Delta t / [\pi(t_i - j\Delta t)]$ 과 같이 표현된다.

초면들(hyperplanes)에서의 반복적인 수직투사(orthogonal projection)에 의한 선형 방정식들의 해를 구하기 위해 대수적 재구성기법(algebraic reconstruction technique: ART)을 채택할 수 있다.⁽¹²⁾

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \alpha_k \frac{u_i - r_i^T g^{(k)}}{\|r_i\|^2} r_i \quad (7)$$

여기서, r_i^T 는 $\mathbf{R}_{N \times M}$ 의 i 번째 행이다. 반복 회수는 $i = k(\text{mod } N) + 1$ 에 의해 방정식의 지수 k 와 관련된다. 여기서 각각의 방정식에 대해 해를 나타내는 초면들도 블록집합들이며 ART 알고리즘도 다음과 같이 투사연산자를 사용하여 표시할 수 있다.

$$P_{C_{ART}} g = g + \alpha \frac{u_i - r_i^T g}{\|r_i\|^2} r_i \quad (8)$$

불균일 추출값에 의해 평가된 진폭 제한집합을 함수 $g(t)$ 를 닫힌 블록집합 C_a 에 포함되도록 한다.

$$C_a = \{g(t) : \min u(t_n) \leq g(t) \leq \max u(t_n)\} \quad (9)$$

여기서 블록집합 C_a 에서의 g 의 투사는 다음과 같이 분류될 수 있다.

$$P_{C_a} g = \begin{cases} g_{\max}, & \text{if } g \geq \max u(t_n) \\ g_{\min}, & \text{if } g \leq \min u(t_n) \\ g, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

상술한 제한조건에 대한 최종 투사형태를 표시하면 다음과 같다.

$$g^{(k+1)} = P_{C_a} P_{C_{ART}} g^{(k)} \quad (11)$$

초기 추정치 $g^{(0)}$ 는 H 안의 임의의 점들로 선택할 수 있으나 측정치가 재생값의 수보다 작은 문제(under-determined problem)에서는 최종적인 재구성값에 심각한 영향을 준다. 이러한 이유를 근거로 본 연구에서는 추출 및 유지신호를 초기 추정치로 사용했다. POCS와 관련된 보다 자세한 내용은 Kuo와 Mammone⁽¹²⁾의 연구에 나타나 있다.

3. 데이터밀도

평균 추출율과 추출 속도함수에 포함된 중요한 스펙트럼의 에너지와의 관계를 살펴보기 위해서는 차원을 갖는 데이터율(data rate)보다는 무차원의 데이터밀도를 정의하는 것이 필요하다.^(2,10) 표준편차가 확률분포함수에 있어 퍼짐을 나타내는 속도(measure)라는 점을 상기하면 규격화된 스펙트럼에 대해서도 r_{ms} 대역(f_{rms} (Hz))이라 알려진 유사한 양의 정의가 가능하다.

$$f_{rms} = \sqrt{\int_0^{\infty} f^2 E_{uu}(f) df} / \sqrt{\int_0^{\infty} E_{uu}(f) df} \quad (12)$$

$T_\lambda = \sigma_u / \sqrt{\langle (du/dt)^2 \rangle}$ 로 정의된 테일러의 미소척도는 f_{rms} 과 $2\pi f_{rms} = 1/T_\lambda$ 의 반비례의 관계가 성립한다. 균일화된 신호의 스펙트럼 추정시 표현 가능한 대역과 추출율과의 관계를 도출하기 위해 데이터밀도($d.d.$)라는 무차원양을 정의할 수 있으며 이는 속도 $u(t)$ 가 단일 표준편차만큼 변하는 동안 걸리는 평균시간과 추출간의 평균시간 간격과의 비율이다.⁽²⁾

$$d.d. = \lambda_{av} T_\lambda \quad (13)$$

여기서, λ_{av} 는 데이터율(data rate) 또는 추출과정의 평균강도라 알려진 양이다. 본 연구에서는 Edwards⁽¹⁰⁾가 분류한 데이터밀도에 대한 세 가지

영역에 대해 모사결과를 기술하기로 한다.

$$\begin{aligned}
 d.d > 5, & \quad \text{for high data density} \\
 5 \geq d.d \geq 0.05, & \quad \text{for intermediate data density} \\
 0.05 \geq d.d., & \quad \text{for low data density} \quad (14)
 \end{aligned}$$

4. 결과 및 고찰

수치모사를 통해 스펙트럼의 편이에 대한 정량적인 평가를 하기 위해서는 많은 수의 시계열생성과 평균연산으로 분산오차(variability)를 줄여야 한다. 이에 대한 고려로써 본 연구에서는 256,000개의 원시 시계열을 생성했다. 균일하게 재생된 추출치들로부터 100개 이상의 레코드를 평균하여 최종적인 스펙트럼을 구하였다. 이는 95%의 신뢰구간 안에서 정규화(normalized)된 랜덤오차를 0.1보다 작게 만드는 평균회수로 알려져 있다.⁽⁹⁾ 스펙트럼 추정시 스무딩(smoothing)을 위한 특별한 윈도우함수(window function)는 사용하지 않았으며 원시 시계열의 시간간격은 차단주파수(cutoff frequency)가 0.5가 되도록 1로 정하였다. 작은 단일 블록 레코드의 길이는 컴퓨터의 기억용량(CRAY-YMP)의 고려와 적절한 FFT계산을 위해 512로 유지하였다.

스펙트럼의 편이현상에 대한 체계적인 연구를 위해 데이터밀도를 Edwards⁽¹⁰⁾의 분류에 따라 넓은 범위(0.05 ≤ d.d. ≤ 5)에서 변화시켰으며 또 하나의 중요한 인자인 난류강도는 Lee와 Sung⁽⁶⁾의 연구결과에 따라 t.i.=30%와 100%를 선택하여 비교하였다. 난류강도가 30% 이하인 유동에서는 추출과정이 정상 푸아송 확률과정으로 묘사될 수 있으므로 Roberts와 Gaster가 제안한 직접변환법의 사용이 가능해진다.^(3,5) 후방계단 뒤에 나타내는 재순환 영역에서는 난류강도가 100% 이상 되는 영역이 나타나며 이때 직접변환법은 속도편의에 의해 크게 왜곡된다.

정상 푸아송 분포를 갖는 수열을 생성한 후 중간치 함수에 의해 비정상 푸아송 분포를 갖는 추출과정이 얻어진다. 본 연구에서 사용된 추출과정과 속도 확률과정의 실현함수에 대한 자세한 설명은 Lee와 Sung⁽⁶⁾의 논문에 언급되어 있다. Fig. 1는 추출 및 유지보간법(SH)과 불균일 Shannon 정리(SR)를 적용하여 높은 난류강도(t.i.=100%)와 중간 데이터밀도(d.d.=1)에 대해 재생한 신호를 보여준다. 이 그림을 살펴보면 불균일 Shannon의 정

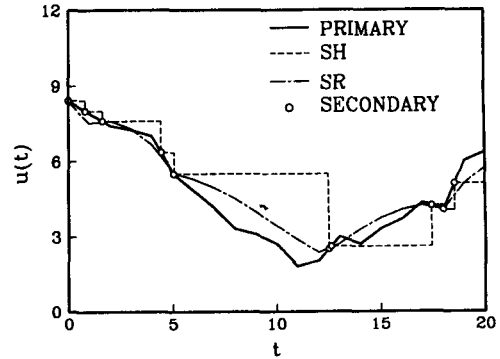


Fig. 1 Exemplary construction of the time series for d.d.=1.0 and t.i.=100%

리로부터 얻어진 재생값들은 원시신호와 좀더 잘 일치하는 것처럼 보이나, 고 주파수영역에서 추출 및 유지신호보다 에너지상실이 많다. Fig. 2~4를 비교해 보면 이러한 현상은 저 데이터밀도에서 더욱 두드러짐을 알 수 있다.

Fig. 2는 d.d.=0.05와 t.i.=30%에서 두 가지 신호처리 알고리즘을 사용하여 계산한 스펙트럼을 나타낸 것이다. SR 스펙트럼의 불일치는 저 데이터밀도에 의한 시간축에서의 데이터값의 부재가 넓은 간격에 걸쳐 존재하기 때문이다. 불균일 Shannon 재산법을 엄밀히 고찰하면 미지의 시간변환 $\gamma(t)$ 를 추정해야 한다는 것을 알 수 있다. 만약 이 $\gamma(t)$ 의 추정에 간단한 선형보간법을 사용하면 이 $\gamma(t)$ 의 추정값에 의해 스펙트럼의 고 주파수성분은

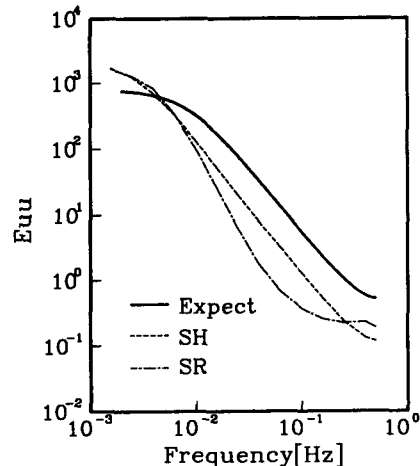


Fig. 2 Comparison of the computed spectra for d.d.=0.05 and t.i.=30%

스무딩된다. 이 $\gamma(t)$ 의 효과는 함수 $u(t)$ 와 변환 함수 $h(\tau)$ 의 관계를 주파수영역에 대해 살펴보면 설명될 수 있다.

$$H(f) = \int_{-f_c}^{f_c} U(\nu) B(f, -\nu) d\nu \quad (15)$$

여기서, $H(f)$ 와 $U(\nu)$ 는 각각 $h(\tau)$ 와 $u(t)$ 의 푸리에변환이다. B 는 $B(f, -\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma'(t) \exp[-i2\pi f\gamma(t) + i2\pi\nu t] dt$ 로 정의되며 신호의 블선명(blurring)을 야기시키는 함수이다. 푸리에변환 $H(f)$ 는 $\gamma(t)$ 와 시간 미분치 $\gamma'(t)$ 모두에 영향을 받고 결과적으로 추정된 $H(f)$ 는 주어진 γ^{-1} 에 대해 $u(t)$ 의 평가에 영향을 주게 된다. 여기서 주목할 점은 $\gamma'(t)$ 가 1이 되는 경우 블선명함수 B 는 Dirac의 delta함수가 되고 이는 균일한 Shannon의 추출정리를 의미한다. $\gamma(t)$ 의 평가를 위해 많은 보간법을 적용하였으나 고주파영역에서의 스무딩을 줄이는 데는 선형보간보다 오히려 적절하지 못했다. SR 스펙트럼의 왜곡율은 주파수에 따라 증가하는 경향을 보였다.

매우 낮은 데이터밀도에 대해 ($d.d.=0.05$) SH에 의해 예측되는 스펙트럼은 저 주파수에서 과대평가(over-prediction)되고 고 주파수에서 과소평가(under-prediction)되는 사실이 Fig. 2에 나타나 있다. 낮은 주파수영역에서의 과대평가는 계단 형태에 의한 잡음(step noise)에 의해 지배되는 반면 고 주파수 영역의 감쇠(attenuation)는 저주파 통과 필터링(low-pass filtering)에 주로 관련된다.

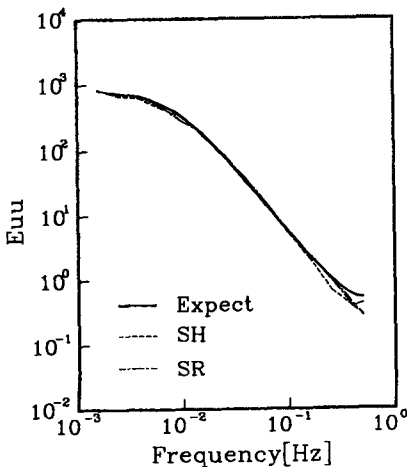


Fig. 3 Comparison of the computed spectra for d.d.=5 and t.i.=30%

Adrian과 Yao⁽²⁾에 의한 해석적 연구에서 묘사되었듯이 이 감쇠현상은 고 주파수성분의 정보상실에 의해 야기되고 백색잡음은 추출순간의 랜덤한 계단 형태에 의해 생성된다. 고 주파수영역에서 실제 스펙트럼의 정보와 그에 더해진 잡음은 심한 감쇠에 의해 크게 억제된다고 여겨진다. 그러나 데이터밀도가 커지기만 하면 저 주파수 통과 필터링과 계단 잡음의 효과는 줄어들게 된다. 본 연구에서는 추출 및 유지방법에서 나타나는 감쇠와 백색잡음의 감소를 여러가지 다른 보간법들(예, cubic spline, polygonal holder, exponential holder)의 가능성을 타진하였으나 효과적이지 못했다.

이제 난류강도를 고정시킨 상태 ($t.i.=30\%$)에서 데이터밀도를 증가시켜 ($d.d.=5$) 두 신호처리 알고리즘으로부터 구한 스펙트럼을 Fig. 3에 나타내었다. 난류강도가 낮고 데이터밀도가 높은 이 영역에서는 편이가 크게 나타나지 않는다. 이로 부터 재생방법을 통해 편이가 없는 스펙트럼의 추정을 하기 위해서는 높은 데이터밀도를 유지하는 것이 필수적임을 알 수 있다. 이러한 결론은 기존의 해석과 상응한다.⁽³⁾

$|kf_{rms}|$ 영역 밖에 존재하는 스펙트럼의 에너지에 대한 상계(upper bound)를 확률론의 Chebyshev의 부등정리(inequality theorem)를 이용하여 쉽게 유도할 수 있다. $E_{uu}(f)$ 는 항상 음이 아니므로 식(12)는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\sigma_u^2 f_{rms}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 E_{uu}(f) df \geq \int_{kf_{rms}}^{kf_{rms}} f^2 E_{uu}(f) df \geq (kf_{rms})^2 \int_{kf_{rms}} E_{uu}(f) df \quad (16)$$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{kf_{rms}}^{\infty} E_{uu}(f) df \leq \frac{\sigma_u^2}{k^2} \quad (17)$$

여기서 식(17)은 임의의 난류신호가 갖는 에너지의 90%가 3배의 f_{rms} 안에 놓이게 됨을 의미한다.

불균일하게 추출된 신호로부터의 재생은 추출정리의 Nyquist 기준을 만족해야 하므로 다음과 같은 관계식이 유도될 수 있다.

$$\frac{2kf_{rms}}{\lambda_{av}} \leq 1 \quad (18)$$

여기서 추출간격 Δt 는 평균추출 주파수에 의해 급

사되었다. 즉, $\Delta t \approx 1/\lambda_{av}$ 이다. 3절에서 보인 T_1 와 f_{rms} 의 관계식으로부터 kf_{rms} 만큼의 에너지를 포함하는 재생시의 유효경계는 다음식으로 표현될 수 있다.

$$d.d. \geq \frac{k}{\pi} \tag{19}$$

만약 식(17)의 왼쪽항이 $0.01\sigma_0^2$ 이라면 k 는 10이 하가 된다. 그러므로 LDV에 의해 얻어진 개개의 실현추출치 (individual realization)를 바탕으로 재생기법을 통해 99%만큼의 에너지 양을 갖는 스펙트럼 성분을 신뢰적으로 추정하기 위해서는 식(19)으로부터 데이터밀도가 3보다 커야함을 명백히 알 수 있다.

스펙트럼 성분의 편위의 관점에서 비추어 볼 때 Fig. 4에 비추어 볼 때 Fig. 4의 경우에는 ($d.d.=1$ 와 $t.i.=100\%$) SH가 SR보다 좀더 좋은 신호 처리 알고리즘임을 주지할 수 있다. 여기서 고 주파수 영역의 작은 감쇠도 역시 저 주파수 통과 필터링에 기인한다.

로그적으로 나타낸 스펙트럼의 특징은 난류유동장과 관련된 광범위한 척도들과 에너지양들을 살펴보는 데 유용하다는 점이다. 그러나 추정된 스펙트럼의 신뢰성을 효과적으로 비교하기 위해서는 절대량의 관점을 갖는 적절한 오차의 측정도(measurement)를 정의하는 것이 필요하다. 전형적인 난류 신호의 특징은 저 주파수성분의 에너지가 고 주파

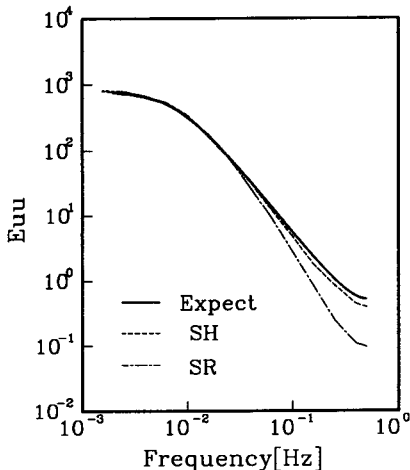


Fig. 4 Comparison of the computed spectra for $d.d.=1$ and $t.i.=100\%$

수영역으로 전달되는 형태이므로 총 스펙트럼 오차의 측정도를 다음과 같이 정의하는 것이 타당할 것이다.

$$e = \left\| \frac{E_{uu}(f) - \hat{E}_{uu}(f)}{E_{uu}(f)} \right\| \tag{20}$$

여기서 E_{uu} 와 \hat{E}_{uu} 는 각각 스펙트럼의 기대치와 추정치이다. 각 주파수에서 계산된 오차를 총계적으로 나타내기 위해 $\|\cdot\|$ 로 표시한 L_2 노름(norm)을 사용했다.

두 신호 처리알고리즘에 대한 총오차를 $t.i.=30\%$ 와 100% 에 대해 각각 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. 이들 그림으로부터 상술한 내용들을 검증할 수 있다. 데이터밀도가 1보다 클 때 SH의 추정에 대한 속도편위의 효과는 SR에 의한 것보다 덜 민감한 데 이는 추출 및 유지보간자가 시변필터(time-varying filter)로 작용하기 때문이며 이 결과

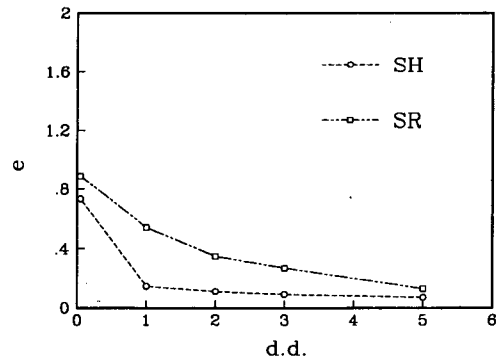


Fig. 5 Comparison of the total spectral errors for $t.i.=30\%$

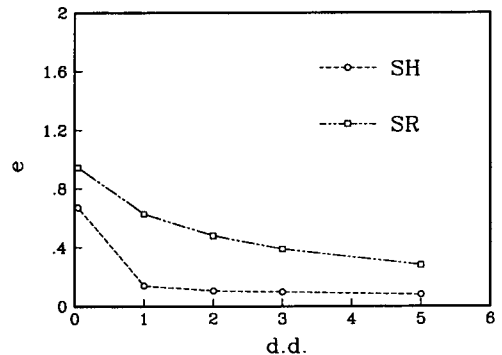


Fig. 6 Comparison of the total spectral errors for $t.i.=100\%$

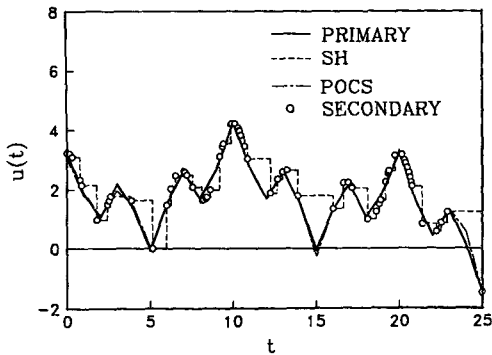


Fig. 7 Exemplary construction of the time series of the POCS interpolation for $d.d.=2.0$ and $t.i.=100\%$

들로부터 SH는 SR보다 로버스트(robust)하다고 말할 수 있다. 즉, SR은 SH보다 추출통계에 의해 좀더 많은 영향을 받으며 이는 식(2)의 $\gamma(t)$ 가 데이터밀도와 난류강도 모두에 비독립적이기 때문이다.

2절에서 묘사된 POCS 보간법을 기초로 중간 데이터밀도($d.d.=2$)와 $t.i.=100\%$ 에 대한 시계열 재생의 예를 Fig. 7에 나타내었다. 이 그림에서 POCS방법에 의한 재생과 원시 시계열사이의 두드러진 일치를 볼 수 있으며 이러한 사실은 중간 데이터밀도 영역에 대한 스펙트럼의 추정시 POCS 사용가능성의 논거를 정당화시킨다. Kuo와 Mammone⁽¹²⁾이 언급한 바대로 식(8)의 ART의 해는 반복회수가 충분히 클때 Moore-Penrose의 의사역 해(pseudo-inverse solution)에 접근하고 이는 Wingham⁽⁸⁾의 최소 노름재생법(minimum norm reconstruction)과 동일하다는 사실을 쉽게 알 수 있다.

계단잡음과 저 주파수 통과 필터링에 의해 SH와 SR은 난류의 고 주파수거동을 정밀하게 예측하는데 적절하지 못하다. 이러한 맥락에서 새로운 신호 처리기법의 개발이 요구되어 왔다. 주어진 제한 집합들에 대해 기존의 재생을 초기 추측으로 사용함으로써 좀 더 정확한 회복이 가능하다. 식(11)에 의한 POCS의 재생 가능성을 SR의 추정치와의 비교를 통해 Fig. 8에서 명확히 살펴볼 수 있다. POCS의 SH에 대한 상대적 효과를 식(20)를 근간으로 하여 Fig. 9에 도시하였다. 스펙트럼의 오차의 감소가 $d.d.=3$ 보다 큰 데이터밀도에서 나타나는 데 이 데이터밀도는 전술한 바대로 해석 주파수 영역에 99%의 에너지를 포함한다. 또한 이 그림에

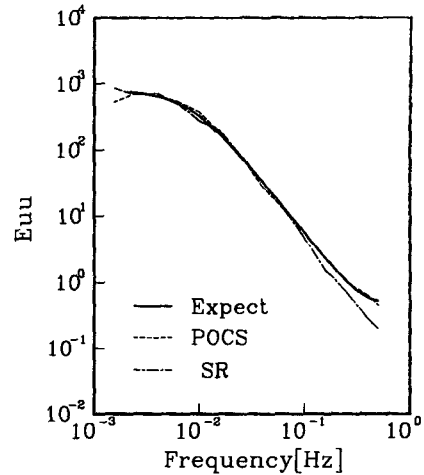


Fig. 8 Comparison of the spectrum of POCS with that of SR for $d.d.=5$ and $t.i.=100\%$

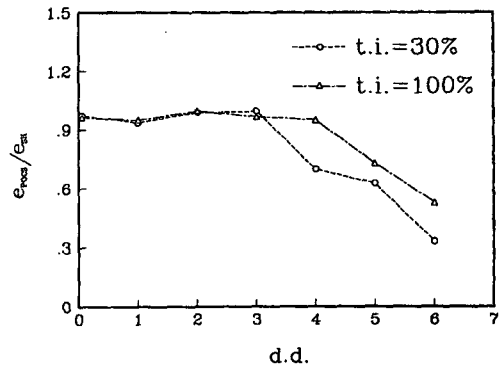


Fig. 9 Spectral error ratios of the spectra of POCS to those of SH for $t.i.=30\%$ and 100%

서 POCS에 의한 결과는 추출통계에 의해 약간 영향을 받음을 알 수 있다. 본 모사에서 수행한 가장 큰 데이터밀도($d.d.=6$)에서 POCS의 SH에 대한 스펙트럼 오차는 $t.i.=30\%$ 와 100% 에서 각각 47%와 67%의 감소를 보였다. POCS는 파워제한조건(power constraint), 스무딩 또는 필터링의 효과를 가함으로써 향상될 수 있다고 알려져 있으며 초기 스펙트럼 추정치로써 SH 등을 사용하여 스펙트럼 영역의 직접적인 재생기법으로 확장될 수 있을 것으로 보여진다.

5. 결 론

두 스펙트럼 처리알고리즘 즉, SH와 SR을 사용

하여 광범위한 영역의 데이터밀도($0.05 \leq d.d. \leq 5$)와 난류강도($t.i. = 30\%, 100\%$)에 대해 수치모사를 수행했다. 낮은 데이터밀도에 대해 SR 스펙트럼의 불일치는 주로 추출시간 간격이 크기 때문에 발생한다. SH에 의해 추정된 스펙트럼은 저 주파수에서는 계단잡음에 의해 과대평가되고 고 주파수에서는 저 주파수 통과 필터링에 의해 보다 많은 영향을 받는다. 데이터밀도가 충분히 클 때($d.d. \geq 1$) SH 스펙트럼은 SR에 의한 추정보다 좀 더 로버스한 결과를 나타내는데 이는 SR에 의한 추정치가 추출통계에 심한 영향을 받기 때문이다. 재생기법 사용자 유용한 데이터밀도의 유효경계를 해석적으로 유도했으며 임의의 난류신호에 대해 99%에너지 양을 포함하는 스펙트럼 성분의 신뢰성있는 추정을 위해서는 데이터밀도가 3보다 커야함을 보였다. 이러한 결과들의 정량적인 평가로서 총 스펙트럼 오차들을 구하고 확인하였다. 스펙트럼 알고리즘의 확장으로 POCS 기법을 스펙트럼 추정에 적용하였고 이 방법은 중간 정도의 데이터밀도 영역($d.d. \geq 3$)에서 추정치의 정확도 향상에 효과적임을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Boyer, L. and Searby, G., 1986, "Random Sampling : Distortion and Reconstruction of Velocity Spectra from Fast Fourier-Transform Analysis of the Analog Signal of a Laser Doppler Processor," J. Appl. Phys., Vol. 60, pp. 2699~2709.
- (2) Adrian, R. J. and Yao, C. S., 1987, "Power Spectra of Fluid Velocities Measured by Laser Doppler Velocimetry," Exp. Fluids, Vol. 5, pp. 17~28.
- (3) Tropea, C., 1987, "Turbulence-Induced Spectral Bias in Laser Anemometry," AIAA J., Vol. 25, pp. 306~309.
- (4) Veynante, D. and Candel, S. M., 1988, "A Promising Approach Laser Doppler Velocimetry Data Processing: Signal Reconstruction and Nonlinear Spectral Analysis," Signal Process., Vol. 14, pp. 295~300.
- (5) Lee, D. H. and Sung, H. J., 1992, "Assessment of Turbulent Spectral Estimators in LDV," KSME, Vol. 16, pp. 1788~1795.
- (6) Sauer, K. D. and Alebach, J. P., 1987, "Iterative Reconstruction of Band-Limited Images from Nonuniformly Spaced Samples," IEEE Trans. Circ., Syst., Vol. 34, pp. 1497~1506.
- (7) Yeh, S. and Stark, H., 1990, "Iterative and One-Step Reconstruction from Nonuniform Samples by Convex Projections," J. Opt. Soc. Am. Ser. A., Vol. 7, pp. 491~499.
- (8) Wingham, D. J., 1992, "The Reconstruction of a Band-Limited Function and its Fourier Transform from a Finite Number of Samples at Arbitrary Locations by Singular Value Decomposition," IEEE Trans. Signal Process., Vol. 40, pp. 559~570.
- (9) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1986, "Random Data : Analysis and Measurement Procedures," New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore : Wiley Interscience.
- (10) Edwards, R. V., 1987, "Report of the Special Panel on Statistical Particle Bias Problems in Laser Anemometry," J. Fluids Eng., Vol. 109, pp. 89~93.
- (11) Clark, J. J., Parmer, M. R. and Lawrence, P. D., 1985, "A Transformation Method for the Reconstruction of Functions from Nonuniformly Spaced Samples," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., Vol. 33, pp. 1151~1165.
- (12) Kuo, S. and Mammone, R. J., 1992, "Image Restoration by Convex Projections Using Adaptive Constraints and the L_1 Norm," IEEE Trans. Signal Process., Vol. 40, pp. 159~168.