184 大韓機械學會論文集 第18卷 第1號, pp. 184~192, 1994

〈論　文〉

이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수의 제안

명　현　국*

(1993년 7월 5일 접수)

Proposal of a New Parameter for Extra Straining Effects

Hyon Kook Myong

Key Words: Extra Straining Effect(이차적인 변형률효과), Tensor Invariant Condition(텐서 불변성 조건), Turbulent Richardson Number(난류 Richardson수), k-ε Turbulence Model(k-ε 난류모델), Stability Parameter(안정성 변수)

Abstract

The parameters such as Richardson numbers or stability parameters are widely used to account for the extra straining effects due to three-dimensionality, curvature, rotation, swirl and others arising in paractical complex flows. Existing expressions for the extra strain in turbulence models such as k-ε models, however, do not satisfy the tensor invariant condition representing the coordinate indifference. In the present paper, considering the characteristics of both the mean strain rate and the mean vorticity, a new parameter to deal with the extra straining effects is proposed. The new parameter has a simple form and satisfies the tensor invariant condition. A semi-quantitative analysis between the present and previous parameters for several typical complex flows suggests that the newly proposed parameter is more general and adequate in representing the extra straining effects than the previous ad-hoc parameters.

I. 서　론

많은 공학적인 문제에 나타나는 난류 전단유동은 일반적으로 3차원성, 곡률(curvature), 회전(rotation), 선회(swirl), 유동박리(flow separation) 및 재부착 등 매우 복잡한 유동현상을 포함하고 있으며, 이러한 유동현상에 대한 정확한 예측은 공학적인 측면에서 매우 중요하다. 그러나, 복잡한 전단유동(complex shear flow)은 일반적으로 주된 변형률이 하나뿐인 단순 전단유동(simple shear flow)과는 달리 추가적인 속도구배 및 곡률, 회전 등에 의해 야기되는 이차적인 변형률효과(extra straining effect)로 인하여 난류구조가 크게 변하게 되므로, 이러한 복합적인 효과들을 예측모델에 적절히 반영시켜야만 한다.

한편, 난류유동을 예측하는데 이용되고 있는 표준 k-ε 난류모델은 모델자체가 단순하면서도 예측성능이 우수하며, 또한 좌표계에 의존하지 않는 텐서 불변성조건(tensor invariant condition)을 만족하고 있기 때문에 현재 각종 상용 CFD(computational fluid dynamics)코드에 도입되어 여러가지 복잡한 유동 예측에 널리 사용되고 있다. 그러나, 이 표준 난류모델은 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 충분히 반영하지 못하고 있다고 알려져 있다. 따라서, 이 모델에 다소 경험적인 수정을 하여 곡률 및 회전 등에 의한 이차적인 변형률효과를 반영시킨 수정 k-ε 난류모델들[1~5]이 제안되어,

*정회원, 국민대학교 기계공학과

여러가지 유동현상에 대해서 비교적 좋은 결과를 예측하고 있다. 이들 수정모델들은 거의 공통적으로 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로 몇가지 형태의 Richardson수 또는 안정성변수(stability parameter)를 사용하고 있으며, 모델상수 등을 이들 변수의 선형함수형태로 수정하여 이차적인 변형률효과를 반영시키고 있다. 그러나, 이들 변수의 형태는 좌표계에 의존하지 않는 텐서 불변성조건을 만족하지 않으며, 또한 일반적으로 3차원으로의 확장이 어렵다. 결과적으로 이들 수정모델들은 일반성의 면에서 볼 때 적절하지 못하며, 이러한 이유로 상용 CFD코드에는 아직 적극적으로 도입되지 않고 있다. 따라서, 이차적인 변형률효과를 적절히 반영시킬 수 있게 k-ϵ 난류모델을 개량한다는 것은 공학적으로도 매우 바람직할 것이다.

본 연구에서는 이러한 배경하에 먼저 곡률 및 회전 등에 의한 이차적인 변형률효과를 나타내는 기존 변수들과 이 변수들을 사용해서 이차적인 변형률효과를 반영시킨 기존의 수정 k-ϵ 난류모델을 검토하여 기존 변수 및 수정 난류모델이 가지고 있는 문제점을 명확히 제시한 후에, 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수형태를 제안한다. 그리고, 새로운 변수형태를 몇가지 대표적인 복잡한 유동현상에 대해서 기존의 변수형태들과 비교하여 이 변수의 타당성 및 기존 변수들이 이 새로운 변수로 대체될 수 있음을 제시하고자 한다.

2. 이차적인 변형률효과를 나타내는 기존 변수의 검토

곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 현재까지 많은 연구자들에 의해 사용되는 것은 Richardson수로, 이 변수의 개념은 원래 Bradshaw[6]가 난류 전단류에서 유선곡률과 부력사이의 상사성을 가정하여 단순한 형태로 제안한 것이다. 즉, Bradshaw는 곡률유동인 경우에 성층화된 경계층내의 유동입자가 상하로 진동하는 Brunt-Väisälä 진동수와 유사하게 유선곡률반경 R인 유동장내의 유체입자가 표면에 수직한 방향으로 움직이는 진동수 ω_{BV}를 다음과 같이 표현하였다.

$$\omega_{BV}=\left[2\frac{U}{R^2}\frac{\partial}{\partial y}(UR)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

위 식에서 y는 표면에 수직한 방향의 좌표이고, U는 주 유선방향의 속도성분이다. Bradshaw는 이 식을 사용하여 구배 Richardson수 R_i를 난류 전단류에서 유선곡률과 부력사이의 상사성을 가정하여 아래와 같이 전단류의 대표적인 스케일에 대한 ω_{BV} 비율의 제곱으로 제안하였다.

$$R_i=\frac{2\frac{U}{R^2}\frac{\partial(UR)}{\partial y}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=2S_{cur}(1+S_{cur}) \tag{2}$$

여기서, 무차원수 S_{cur}은 곡률에 대한 안정성변수(stability parameter)로서 곡률에 의해 생기는 이차적인 변형률을 주된 변형률로 나눈 값으로 아래와 같이 표현되며,

$$S_{cur}=\frac{(U/R)}{(\partial U/\partial y)} \tag{3}$$

Prandtl 및 여러 연구자들에 의해 혼합거리모델(mix-ing length model), 1-방정식모델(one-equation model) 및 k-ϵ 난류모델 등에 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 사용되어 왔다.[6]

한편, 플럭스 Richardson수(flux Richardson number) R_f는 부력에 의한 난류에너지 생성항을 전단력에 의한 생성항으로 나눈 비율로서, Bradshaw는 곡률유동인 경우에 다음과 같이 S_{cur}과 관계된다고 제시하였다.

$$R_f=\frac{2S_{cur}}{(1+S_{cur})}=2\frac{U}{R}\Big/\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{U}{R}\right) \tag{4}$$

식(2)와 식(4)는 작은 S_{cur} 값 즉, 곡률효과가 작은 경우에는 근사적으로 $R_i=R_f=2S_{cur}$로 되어 두 Richardson수는 기존에 사용되어 온 안정성 변수와 같게 된다.

다음으로, Bradshaw는 유동장(x-y 평면)에 수직한 방향으로 각회전(angular rotation) Ω로 회전하는 회전유동인 경우에 Brunt-Väisälä 진동수를 다음과 같이 표현하고,

$$\omega_{BV}^2=-2\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial y}-2\Omega\right) \tag{5}$$

두 Richardson수 R_i 및 R_f는 각각 다음과 같이 된다고 제시하였다.

$$R_i=\frac{-2\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial y}-2\Omega\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=S_{rot}(1+S_{rot}) \tag{6}$$

$$R_f = \frac{-2\Omega}{\left(\frac{\partial U}{\partial y} - 2\Omega\right)} = \frac{S_{rot}}{(1+S_{rot})} \tag{7}$$

여기서, 무차원수 S_{rot}는 회전유동에 대한 안정성변수로, 아래와 같이 회전에 의해 생기는 이차적인 변형률을 주된 변형률로 나눈 비율로 표현되며,

$$S_{rot} = \frac{-2\Omega}{(\partial U/\partial y)} \tag{8}$$

여러 연구자들에 의해 곡률유동에 대한 안정성변수 식(3)과 함께 사용되어 왔다. 식(6)과 식(7)로부터 S_{rot}값이 작은 경우 즉, 회전효과가 작은 경우에 두 Richardson수는 근사적으로 $R_i = R_t = 2S_{rot}$로 되어 무차원 안정성변수와 같게 됨을 알 수 있다.

위에서 살펴본 Bradshaw의 개념은 그후 많은 연구자들에 의해 받아들여져 현재 이차적인 변형률 효과를 나타내는 변수로서 실험적 및 해석적 연구에 널리 사용되고 있다. 그러나 위의 식들은 난류 전단류에서 유선곡률 또는 회전유동과 부력사이의 상사성을 가정하여 단순한 형태로 제안한 것으로, 일반적으로 좌표계에 의존하지 않는 조건인 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못하며, 특히 유선곡률 좌표계에 의존하기 때문에 3차원으로의 확장이 어렵다. 또한, 여러가지 이차적인 변형률이 복합적으로 영향을 미치는 경우에는 일반적으로 적용하기가 어렵다.

이러한 문제점에도 불구하고, 위의 식들은 연구자들에 의해 약간씩 변형된 형태로써 난류모델에 도입되어 사용되고 있다. 대표적인 것으로는 Launder 등[1]이 사용한 구배 Richardson수 및 Rodi[2]가 사용한 플럭스 Richardson수를 들 수 있으며, 이 두 변수는 뒤에서 고찰하는 바와 같이 수정 k-ε 난류모델에 널리 사용되고 있다. 먼저, Launder 등은 기본적으로는 Bradshaw의 개념을 사용하면서 식(2)의 분모항인 전단류의 대표적인 진동수 스케일(또는 주된 변형률)을 보다 일반성을 가지는 아래의 평균 변형률(mean strain rate)로 대체하므로써,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{9}$$

결과적으로 식(2)의 구배 Richardson수 R_i를 아래와 같이 표현하였다.

$$R_i = \frac{\frac{U}{R^2}\frac{\partial(UR)}{\partial y}}{(S_{ij})^2} \tag{10}$$

또한, 이들은 식(10)의 분모에 나타나는 평균 변형률의 제곱항이 시간 스케일의 제곱의 역수인 것에 착안하여, k-ε 난류모델의 모델화 과정에서와 같이 대표적인 시간 스케일로 평균 변형률 대신에 난류의 특성 스케일에 의한 시간 스케일(k/ε)을 사용하여 아래와 같은 난류구배 Richardson수(trubulent gradient Richardson number) R_{it}를 제안하였다.

$$R_{it} = 2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \frac{U}{R^2}\frac{\partial(UR)}{\partial y} = 2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \frac{U}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R}\right) \tag{11}$$

한편, Rodi[2]는 선회유동과 같은 3차원적 유동에의 적용을 고려해서 Bradshaw 및 Launder 등의 개념을 응용하여 플럭스 Richardson수 R_f를 다음과 같이 원통좌표계(x-r-θ 좌표계)를 사용해서 제시하였다.

$$R_f = \frac{W\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)}{(S_{ij})^2} = \frac{\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r}\right)}{(S_{ij})^2} \tag{12}$$

식(12)는 원통좌표계(x-r-θ 좌표계)로 나타낸 식(3)의 곡률에 대한 안정성변수 S_{cur}의 분모항의 주된 변형률을 보다 일반적인 평균 변형률로 사용한 아래의 식(13)에서, 분자에 나타나는 평균 변형률 항 중에서 주된 변형률 항만을 취한 것으로 해석될 수 있어, 결과적으로 식(13)의 특수한 형태로 볼 수 있다.

$$2S_{cur} = \frac{2(W/r)S_{ij}}{(S_{ij})^2} \tag{13}$$

위에서 살펴본 Launder 등 및 Rodi가 제안한 Richardson수들은 Bradshaw가 제안한 식들보다는 주된 변형률로 텐서 불변성조건을 만족하는 식(9)의 평균 변형률 또는 난류의 특성 시간 스케일(k/ε)을 사용하므로써 다소 일반성을 나타내고 있다. 그러나, 이 변수들은 기본적으로는 Bradshaw가 제안한 Brunt-Bäisälä 진동수 ω_{BV}에 기초하고 있기 때문에, 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못하다. 또한, 기존부터 사용되어 온 안정성변수 S_{cur}도 Richardson수와 마찬가지로 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못하다. 결과적으로, 이차적인 변형

률효과를 나타내는 이들 기존 변수들은 일반성의 면에서 볼 때 적절하지 못함을 알 수 있다.

3. 기존의 수정 k-ε 난류모델의 검토

본 절에서는 현재 난류유동 예측에 널리 사용되고 있는 표준 k-ε 난류모델에 곡률 및 회전 등에 의한 이차적인 변형률효과를 반영시킨 수정 k-ε 난류모델들[1~5]에 대해서 간단히 살펴보면서 문제점을 기술한다.

일반적으로 고 레이놀즈수형 표준 k-ε 난류모델은 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{Dk}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]-\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\varepsilon \tag{14}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] -C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{15}$$

여기서,

$$\overline{u_i u_j}=\frac{2}{3}k\delta_{ij}-2\nu_t S_{ij} =\frac{2}{3}k\delta_{ij}-\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{16}$$

$$\nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{17}$$

$$C_\mu=0.09,\quad \sigma_k=1.0,\quad \sigma_\varepsilon=1.3,\quad C_{\varepsilon 1}=1.44,\quad C_{\varepsilon 2}=1.92 \tag{18}$$

위의 표준 k-ε 난류모델은 전술한 바와 같이 좌표계에 의존하지 않는 텐서 불변성조건을 만족하고 있으나 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 충분히 반영하지 못하고 있으므로, 많은 연구자들[1~5]이 이 모델에 곡률효과 등을 반영시킨 수정모델을 제안하였다. 이들 수정모델은 다음과 같이 크게 세가지로 분류될 수 있다. 첫째는 Launder 등[1] 및 Rodi[2]와 같이 난류에너지 소산율방정식의 모델상수를 수정하여 결과적으로 길이 스케일을 바꾸는 방법이다. 즉, Launder 등은 식(15)의 소산항에 나타나는 모델상수 $C_{\varepsilon 2}$를 이차적인 변형률 효과를 나타내는 변수로서 에너지를 포함한 에디(eddy)의 시간 스케일에 기초한 난류구배 Richardson수 R_{it}를 사용해서 선형함수형태로 수정하였다. 반면, Rodi[2]는 식(15)의 생성항에 나타나는 모델상수 $C_{\varepsilon 1}$을 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로 식(12)의 플럭스 Richardson수 R_f를 사용하여 선형함수 형태로 수정하였다. 둘째는 Lezchziner-Rodi[3]와 같이 와(또는 난류)점성계수에 나타나는 C_μ를 수정하여 곡률효과를 고려하는 방법으로, 이들은 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 유선 곡률좌표계로 표현한 난류구배 Richardson수를 사용하였다. 셋째는, Park-Chung[4]과 같이 식(14)와 식(5)로 표현되는 난류에너지 및 소산율방정식의 난류확산항 중의 난류 프란틀 수(turbulent prandtl number) σ_k 및 σ_ε을 수정하여 곡률효과를 고려하는 방법으로, 이들은 Lezchziner-Rodi와 같이 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 유선곡률좌표계에 의존하는 난류구배 Richardson수를 사용하였으며, 또한 식(15)의 소산상에 나타나는 모델상수 $C_{\varepsilon 2}$도 비슷한 방법으로 수정하였다.

이상과 같이 기존의 수정 k-ε 난류모델에서는 거의 공통적으로 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 앞절에서 살펴본 바와 같이 좌표계에 의존하지 않는 조건인 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못한 Richardson수(또는 안정성변수)들을 사용하고 있다. 따라서, 이들 수정모델은 결과적으로 텐서 불변성조건을 만족하지 못하며, 특히 유선곡률 좌표계에 의존하는 난류구배 Richardson수는 3차원으로의 확장이 어렵다. 또한, 여러가지 이차적인 변형률이 복합적으로 영향을 미치는 경우에는 일반적으로 적용하기가 어렵다. 이러한 이유로, 이들 수정모델들은 일반성의 면에서 볼 때 적절하지 못함을 알 수 있다. 그러나, 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수형태를 이들 기존 변수 대신에 사용한다면 이들 수정모델은 텐서 불변성조건을 만족하게 되어 일반성을 가지게 되므로, 적용 영역을 크게 확장시킬 수 있는 가능성을 가지게 된다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 배경하에 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 적절히 나타낼 수 있는 새로운 변수 형태를 모색한다.

4. 이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수의 제안

일반적으로, 복잡한 전단유동은 주된 변형률이 하나뿐인 단순 전단유동과는 달리 추가적인 속도구배 및 곡률, 회전 등에 의해 야기되는 이차적인 변형률효과로 인하여 난류구조가 크게 바뀌게 된다.

한편, 유체역학분야에서 유동현상을 기술하는데 널리 사용되고 있는 식(9)와 같이 표현되는 평균 변형률 S_{ij} 및 아래와 같이 표현되는 평균 와도(mean vorticity) Ω_{ij}는,

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{19}$$

주된 변형률이 하나뿐인 단순 전단유동에서는 똑같은 진동수(또는 시간 스케일)를 가지나, 복잡한 유동에서는 추가적인 속도구배 및 곡률, 회전 등에 의해 야기되는 이차적인 변형률로 인해 상대적으로 다른 진동수를 가지게 된다. 본 연구에서는 평균 변형률과 평균 와도가 가지고 있는 이러한 특성으로부터, 이차적인 변형률효과가 평균 변형률과 평균 와도에 의해 단순하게 정해진다고 가정하고, 새로운 변수 M_f를 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$M_f=func(S_{ij}, \Omega_{ij}) \tag{20}$$

이 변수 M_f는 이차적인 변형률효과가 없는 단순 전단유동에서는 0의 값을 가지며, 텐서 불변성조건을 만족해야 하며, 또한 무차원수이므로 대표적인 스케일을 사용해서 무차원화해야 한다. 본 연구에서는 먼저 대표적인(진동수) 스케일로 Launder 등[1]과 같이 평균 변형률을 취하고, 나머지 두 조건을 모두 충족시키면서도 단순한 형태를 가지는 변수 M_f를 다음과 같이 평균 와도 및 평균 변형률 진동수의 제곱의 차를 평균 변형률 진동수의 제곱으로 나눈 비율로 제안한다.

$$M_f=\frac{(\Omega_{ij}^2-S_{ij}^2)}{2S_{ij}^2} \tag{21}$$

이 새로운 변수 M_f는 이차적인 변형률효과에 대한 진동수(또는 시간 스케일)를 유동장에서의 난류의 특성 진동수(또는 시간 스케일)로 나눈 것으로, 물리적으로는 유동장에서의 이차적인 변형률효과에 따른 진동수(또는 시간) 스케일의 변화로 해석할 수 있다. 또한, 이 변수는 Bradshaw[6]가 사용한 식(1) 또는 식(5)와 같이 표현되는 Brunt-Väisälä 진동수 ω_{BV}의 제곱 대신에, 평균 와도 및 평균 변형률 진동수의 제곱의 차을 사용하고, 분모에 나타나는 주된 변형률 대신에 보다 일반적인 평균 변형률을 사용한 것으로 해석할 수도 있다. 그러나, 새로운 변수 M_f가 텐서 불변성조건을 만족하고 있는데 반해, 기존 변수인 안정성 변수와 Bradshaw가 제시한 Richardson수는 이 조건을 만족하지 못하고 있다.

이와 함께, 식(21)은 Launder등[1]과 같이 분모에 나타나는 평균 변형률 대신에 난류의 특성 스케일에 의한 시간 스케일(k/ε)을 사용하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{ft}=\frac{k^2}{\varepsilon^2}(\Omega_{ij}^2-S_{ij}^2) \tag{22}$$

결과적으로, 식(21)과 식(22)가 본 연구에서 제안하는 이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수 M_f 및 M_{ft}로, 이 두 새로운 변수는 단순한 함수형태를 취하면서도, 이차적인 변형률효과가 없는 단순 전단유동에서는 0의 값을 가지고, 또한 텐서 불변성조건을 만족하고 있다. 따라서, 이 두 변수는 기존 변수인 Richardson수 및 안정성변수가 가지고 있는 문제점을 완전히 해결하고 있음을 알 수 있다.

5. 고 찰

표준 k-ε 난류모델에 곡률 및 회전 등에 의한 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 Richardson수를 사용하여 이들 효과를 반영시킨 수정모델들은 전술한 바와 같이 텐서 불변성조건을 만족하지 못하나 여러가지 특수한 유동현상에 대해서는 비교적 좋은 결과를 얻고 있다.[1~5] 또한, 안정성변수도 텐서 불변성조건을 만족하지 못하나 혼합거리 모델, 1-방정식 모델 및 k-ε 난류모델 등에 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 자주 사용되어 왔다. 이것은 이들 모델에 사용된 Richardson수 및 안정성 변수가 특수한 유동현상에 대해서는 어느정도 이차적인 변형률효과를 적절히 반영시키고 있다는 것으로 해석될 수 있다. 따라서, 여기서는 본 연구에서 제안한 텐서 불변성조건을 만족하는 식(21) 및 식(22)의 새로운 변수를 이러한 유동현상에 대해서 적용시켜 기존 변수들의 형태와 비교검토함으로써 새로운 변수의 타당성 및 기존 변수들이 이 새로운 변수로 대체될 수 있음을 제시하고자 한다.

5.1 회전유동에 적용한 경우

유동장(x-y 평면)에 수직한 방향으로 각회전(angular rotation) Ω로 회전하는 단순한 회전덕트유동인 경우, Bradshaw[6] 및 Launder 등[1]이

제안한 식(6)의 구배 Richardson수 R_i, 식(8)의 안정성 변수 S_{rot} 및 식(21)의 새로운 변수 M_f는 회전 좌표계에서 각각 다음과 같이 표현된다.

$$R_i=\frac{-2\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial y}-2\Omega\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{23}$$

$$2S_{rot}=R_f=\frac{-2\Omega}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}=\frac{-2\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial y}-0\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{24}$$

$$M_f=\frac{-2\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\Omega\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{25}$$

참고로, 식(25)는 관성좌표계와 회전좌표계 사이에 성립하는 변환 관계식[7]

$$U_{i,j}\rightarrow U_{i,j}+\varepsilon_{ikj}\Omega_k \tag{26}$$

을 사용하면 식(21)로부터 용이하게 구해지며, 식(26)에서 ε_{ikj}는 permutation 텐서이다.

식(25)로 표현되는 본 연구에서 제시한 새로운 변수 M_f의 결과식은 기존 변수인 Richardson수 R_i 및 안정성변수 S_{rot}와 매우 유사함을 알 수 있다. 특히, S_{rot}값이 작은 경우, 즉 회전효과가 작은 경우에는 근사적으로 $R_i=M_f=2S_{rot}$로 된다. 위의 식 중, 주의할 점은 식(24)의 플럭스 Richardson수 R_f은 Rodi[2]가 제시한 식(12)를 단순한 회전유동인 회전덕트유동의 경우에 적용시킨 것으로, Bradshaw가 제시한 식(7)과는 형태가 다르다는 사실이다.

다음으로, 위의 식들에서 분모에 나타나는 평균 변형률을 난류의 특성 시간 스케일로 대체한 난류 구배 Richardson수 R_{it}, 이에 대응하는 안정성변수 S_{rot}또는 난류 플럭스 Richardson수 R_{ft}) 및 식(22)의 새로운 변수 M_{ft}는 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$R_{it}=-2\Omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}-2\Omega\right) \tag{27}$$

$$2S_{rot}=R_{ft}=-2\Omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}-0\right) \tag{28}$$

$$M_{ft}=-2\Omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\Omega\right) \tag{29}$$

이상의 결과는 본 연구에서 제안한 새로운 변수가 기존 변수들 대신에 사용될 수 있는 가능성이 매우 높은 것을 의미하고 있으며, 한편으로는 텐서 불변성조건을 만족하는 새로운 변수의 입장에서 볼 때 기존 변수들이 단순한 회전 유동인 회전덕트유동의 경우에 비교적 적절한 형태를 가지고 있음을 보여주고 있다고 해석될 수 있다.

한편, 터보기계에서의 로터블레이드(rotor blade), 헬리콥터 로터 및 기상유동(meteorological flow) 등 공학적으로 중요한 회전유동에서는 일반적으로 회전체 주위의 전단류가 3차원성 및 Coriolis 힘에 의해 생기는 이차적인 변형률의 형향을 동시에 받으므로, 이들 효과들을 복합적으로 고려해야 한다. 그러나, 기존 변수들에서는 이러한 복합적인 효과를 나타내기 어렵고, 또한 가능하더라도 텐서 불변성조건을 만족하지 못하여 일반성을 잃게 된다. 반면, 본 연구에서 제안한 변수는 텐서 불변성조건을 만족하고 있으므로 일반성을 가지면서도 식(21) 또는 식(22)로부터 이들 복합적인 효과를 용이하게 나타낼 수 있다.

5.2 선회유동 및 와동

회전하는 2중 원관내의 쿠에트 유동과 같이 단순한 경우에는 Launder 등[1]이 제안한 구배 Richardson수 R_i, Rodi[2]가 제안한 플럭스 Richardson수 R_f 및 새로운 변수 M_f는 원통좌표계(x-r-θ 좌표계)로 나타내면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}R_i&=2\frac{W}{r^2}\frac{\partial(Wr)}{\partial r}\Big/\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right)^2\\&=2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{W}{r}\right)\Big/\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right)^2\end{aligned} \tag{31}$$

$$R_f=2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right)\Big/\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right)^2 \tag{32}$$

$$M_f=2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)\Big/\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right)^2 \tag{33}$$

위 식 중에서 식(31)의 플럭스 Richardson수 R_f는 Bradshaw[7]가 제안한 플럭스 Richardson수 R_f와는 식 형태가 다르며, 식(3)의 안정성변수 S_{cur}의 분모항, 즉 전단류의 대표적인 진동수 스케일인 주된 변형률을 Launder 등[1] 및 본 연구에서와 같이 식(9)의 평균 변형률로 대체한 것으로 해석될 수 있다.

위의 세가지 식들로부터 본 연구에서 제시한 새로운 변수 M_f는 기존의 두가지 Richardson수 R_i 및 R_f와 매우 유사함을 알 수 있다. 특히, S_{cur}값이 작은 경우, 즉 곡률효과가 작은 경우에는 근사적으로 $R_i=R_f=M_f$로 되어 세 변수는 기존에 사

용되어 온 안정성변수와 같게 된다. 또한, 이들 식의 분모에 나타나는 평균 변형률을 난류의 특성시간 스케일로 대체한 난류구배 Richardson수 R_{it}와 난류 플럭스 Richardson수 R_{ft} 및 이것들과 대응하는 본 연구에서 제안한 변수 M_{ft}는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$R_{it}=2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{W}{r}\right) \quad (33)$$

$$R_{ft}=2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r}\right) \quad (34)$$

$$M_{ft}=2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{W}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) \quad (35)$$

식(33)의 형태는 기존의 수정 k-ε 난류모델들에서 많이 사용되고 있는 식 형태로서, 유선곡률 좌표계(s-n 좌표계)로 나타내면 식 중의 W, ∂r 및 r이 각각 U_s, ∂n 및 곡률반경 R로 되기 때문에 이 식의 형태는 Lezchziner-Rodi[3] 및 Park-Chung[4] 등의 수정 난류모델에서 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로 사용한 난류구배 Richardson수의 형태이기도 하다. 특히, Lezchziner-Rodi는 이 변수형태를 대수 응력모델로부터 출발하여 구함으로써 결과적으로 이 식 형태의 일반성을 높여주게 되었다. 그러나 최근, Lee 등[8]은 Lezchziner-Rodi의 유도과정 중에 오류가 있음을 지적하고, 정확한 형태가 본 연구에서 제안한 식(35)와 같이 된다고 보고하고 있다. 또한, 식(35)는 Kim-Chung[9]이 재순환을 동반하지 않는 약선회(weak swirl) 난류유동을 예측할 수 있는 새로운 와점성 모델을 대수응력모델로부터 출발하여 유도하는 과정에서 얻어진 결과와도 동일한 형태를 가진다.

이상의 결과들은 본 연구에서 제안한 새로운 변수의 타당성을 입증해 주고 있으며, 새로운 변수가 전술한 단순한 회전유동인 회전덕트유동에서와 마찬가지로 회전하는 2중 원관내의 쿠에트 유동에서도 기존 변수들 대신에 사용될 수 있음을 의미하고 있다고 해석될 수 있다.

한편, 선회유동 및 와동은 연소기 버너, 회전기기 및 태풍 등에 나타나는 공학적으로 중요한 유동으로, 이 전단류는 일반적으로 곡률 및 선회에 의해 생기는 이차적인 변형률의 영향을 동시에 받는 3차원 유동이므로 이 효과들은 복합적으로 적절히 고려해야 한다. 그러나, 기존 변수들에서는 이 효과들을 복합적으로 나타내기 어려우며, 가능하더라도 텐서 불변성조건을 만족하지 못하여 일반성을 잃게 된다. 한 예로 Rodi[2]는 자신이 제안한 식(12)의 플럭스 Richardson수 R_f가 원통좌표계(x-r-θ 좌표계)로 나타내면 다음과 같이 표현되므로,

$$R_f=\frac{2W\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)}{2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{V}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)\right]^2} \quad (36)$$

이 효과들을 복합적으로 고려하고 있다고 보고하고 있다. 반면, 텐서 불변성조건을 만족하는 새로운 변수 M_f는 식(21)로부터 이들 복합적인 효과를 원통좌표계(x-r-θ 좌표계)로 나타내면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$M_f=\frac{2\frac{W}{r}\frac{\partial W}{\partial r}-2\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial x}-\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{V}{r}\right)^2\right]}{2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{V}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)\right]^2} \quad (37)$$

위의 두 식의 결과로부터 Rodi[2]가 제안한 플럭스 Richardson수 R_f는 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못하며, 또한 주로 곡률에 의해 생기는 이차적인 변형률효과만을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나, 본 연구에서 제안한 변수는 텐서 불변성조건을 만족하고 있으므로 일반성을 가지면서도 식(21) 또는 식(22)로부터 식(37)과 같이 이들 복합적인 효과를 나타내기 위해 필요한 추가적인 변형률항을 용이하게 취할 수 있다.

5.3 박리 및 재부착 유동

일반적으로 공기역학적 유동에서 유동의 박리가 수반되지 않는 경우나 박리가 우려되지 않는 경우는 거의 없을 정도이므로, 유동의 박리와 재부착 현상에 대한 정확한 예측은 공학적으로 매우 중요하다. 그러나, 유동의 박리 및 재부착현상을 나타내는 단순한 유동의 하나인 후향계단 유동을 보더라도, 전단층의 박리 및 재부착, 새로운 전단층의

발달, 재순환 유동, 후향계단의 상단부에서 발달하는 경계층 등 매우 복잡한 유동현상을 포함하고 있으므로, 이들 유동현상으로부터 생기는 이차적인 변형률효과들을 복합적으로 적절히 고려해야 한다.

한편, 이러한 유동에 대한 기존의 연구들을 보면 거의 공통적으로 Launder 등[1] 및 Lezchziner-Rodi[3]가 제시한 유선곡률 좌표계로 나타낸 식(11)형태의 난류구배 Richardson수 R_{it}를 이차적인 변형률 효과를 나타내는 변수로 사용하고 있다. 그러나, 이 변수는 전술한 바와 같이 텐서 불변성조건을 만족하지 않아 일반성을 가지고 있지 못하며, 또한 유선곡률 좌표계에 의존하므로 사용상 불편하고 일반적으로 3차원으로의 확장이 어렵다. 이와 함께, 이 변수는 곡률 이외의 이차적인 변형률효과를 포함하고 있지 않아, 여러가지 유동현상으로부터 생기는 이차적인 변형률효과들을 복합적으로 적절히 고려하고 있지 못하다. 이와는 달리, 본 연구에서 제안한 새로운 변수 M_{ft}는 박리 및 재부착현상을 나타내는 복잡한 유동에 대해 직교좌표계로 나타낼 수 있어 사용상 편리하며, 또한 텐서 불변성조건을 만족하고 있으므로 3차원으로의 확장도 용이하다.

위의 사실을 입증하기 위해, 본 연구에서 제안한 새로운 변수 M_{ft}을 이차원 유동인 경우에 적용시키면, 식(22)로부터 아래와 같이 직교 좌표계로 나타낼 수 있으며,

$$M_{ft}=-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\left[2\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] \tag{38}$$

또한 식(22)를 곡률좌표계(s-n 좌표계)로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$M_{ft}=-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\left[2\left(\frac{\partial U_n}{\partial s}-\frac{U_s}{R}\right)\frac{\partial U_s}{\partial n}+\left(\frac{\partial U_s}{\partial s}+\frac{U_n}{R}\right)^2+\left(\frac{\partial U_n}{\partial n}\right)^2\right] \tag{39}$$

위 식에서 첨자 s 및 n은 유동방향 및 유동에 수직한 방향을, R은 곡률반경을 각각 나타내고 있다. 또한, 식(39)의 자세한 유도과정은 지면 관계상 여기서는 생략하나 참고문헌[10]으로부터 비교적 용이하게 구해질 수 있다.

식(39)는 2차원 유동에서의 텐서 불변성 조건을 만족하는 일반적인 변수 형태로, Lezchziner-Rodi[3]가 유선곡률 좌표계로 나타낸 식(11) 또는 식(33)의 난류구배 Richardson수 형태와는 상당히 다르다. 그러나, 유선곡률 좌표계인 경우 정의로부터 $\partial U_n/\partial s=0$이 되며, Lezchziner-Rodi가 난류구배 Richardson수를 대수 응력모델로부터 출발하여 유선곡률 좌표계로 구할 때 가정한 아래의 관계를 사용하여 정리하면,

$$\frac{U_n}{R}=\frac{\partial U_s}{\partial s}=\frac{\partial U_n}{\partial n}=0 \tag{40}$$

식(39)는 결과적으로 다음과 같이 표현되어,

$$M_{ft}=2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial U_s}{\partial n}\frac{U_s}{R} \tag{41}$$

좌표계를 고려하면 앞에서 기술한 식(35)와 결과적으로 같은 형태로 된다. 이것은 전술한 바와 같이 Lee 등[8]이 Lezchziner-Rodi의 유도과정 중에 생긴 오류를 고친 정확한 변수형태와도 동일한 것으로, 결과적으로 본 연구에서 제안한 새로운 변수 M_{ft}의 타당성을 한층 더 높여주고 있음을 의미한다.

6. 결 론

본 연구에서는 공학적으로 중요한 복잡한 난류전단 유동현상에서 나타나는 3차원성, 곡률, 회전, 선회 등에 의한 이차적인 변형률효과를 나타내는 Richardson수 및 안정성변수와 같이 기존 변수들과 이 변수들을 사용해서 이차적인 변형률효과를 반영시킨 수정 k-ε 난류모델을 검토하여, 기존 변수 및 수정모델 들이 좌표계에 의존하지 않는 조건인 텐서 불변성조건을 만족하지 못함을 명확히 하였다. 그리고, 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수를 단순한 함수형태로서 제안하였다. 이 새로운 변수 M_f 및 M_{ft}는 식(21) 및 식(22)와 같이 평균 와도 및 평균 변형률의 제곱의 차를 평균 변형률의 제곱 및 난류의 특성 시간 스케일(k/ε)의 제곱으로 각각 나눈 것으로 정의할 수 있다. 또한, 본 연구에서 제안한 새로운 변수를 회전유동, 선회유동 및 와동, 박리 및 재부착 유동 등 공학적으로 중요한 복잡한 전단유동에 대해서 기존 변수들과 비교 검토하여 새로운 변수가 기존 변수들 대신에 사용될 수 있음을 제시하였다.

본 연구결과로부터 현재 수정모델들이 가지고 있는 텐서 불변성조건의 문제점이 해결될 수 있게 되었으므로, 향후의 연구는 곡률, 회전, 선회현상 등

이 복합적으로 작용하는 복잡한 유동에 본 연구에서 제안한 새로운 변수로 대체된 수정모델들을 적용하여 예측정도의 개선을 확인하고자 한다.

참고문헌

(1) Launder, B. E., Priddin, C. H. and Sharma, B. L., 1977, "The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces," Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 99, pp. 231~239.

(2) Rodi, W., 1978, "Influence of Buoyancy and Rotation on Equations for the Turbulent Length Scale," Proc. of 2nd Symp. of Turbulent Shear Flows, Imperial College, London, pp. 10.37~10.42.

(3) Leschziner, M. A. and Rodi, W., 1981, "Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Varous Discretization Schemes and Turbulence Model Variations," Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 103, pp. 352~360.

(4) Park, S. W. and Chung, M. K., 1989, "Curvature-Dependent Two-Equation Model for Prediction of Turbulent Recirculating Flows," AIAA J., Vol. 27, No. 3, pp. 340~344.

(5) Howard, J. H. G., Patankar, S. V. and Bordynuik, R. M., 1980, "Flow Prediction in Rotating Ducts Using Coriolis-Modified Turbulence Models," Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 102, pp. 456~461.

(6) Bradshaw, P., 1969, "The Analogy Between Streamline Curvature and Buoyancy in Turbulent Shear Flow," J. Fluid Mech., Vol. 36, pp. 177~191.

(7) Lakshminarayana, B., 1986, " Turbulence Modeling for Complex Shear Flows," AIAA J., Vol. 24, No. 12, pp. 1900~1917.

(8) Lee, B. K., Cho, N. H. and Choi, Y. D., 1988, "Analysis of Periodically Fully Developed Turbulent Flow and Heat Transfer by k-ε Equation Model in Artificially Roughened Annulus," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, pp. 1797~1806.

(9) Kim, K. Y. and Chung, M. K., 1987, "New Eddy Viscosity Model for Computation of Swirling Turbulent Flows," AIAA J., Vol. 25, pp. 1020~1022.

(10) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, 1984, Computational Fluid Mechancs and Heat Transfer, MacGraw-Hill, pp. 193~197.