

〈論 文〉

## 유선상류 유한요소법을 이용한 유동장의 해석

최형권\* · 유정열\*\*

(1993년 4월 13일 접수)

### An Analysis of Fluid Flow Using the Streamline Upwinding Finite Element Method

Hyung Gweon Choi and Jung Yul Yoo

**Key Words :** Finite Element Method(유한요소법), Equal-Order Velocity-Pressure Formulation (동차 속도-압력방식), Streamline Upwinding Method(유선상류기법), Lid-Driven Cavity Flow(공동구동문제), Backward Facing Step Flow(후향계단 유동문제)

#### Abstract

A numerical method which combines equal-order velocity-pressure formulation originated from SIMPLE algorithm and streamline upwinding method has been developed. To verify the proposed numerical method, we considered the lid-driven cavity flow and backward facing step flow. The trend of convergence history is stable up to the error criterion beyond which the maximum value of error is oscillatory due to the round-off error. In the present study, all results were obtained with the single precision calculation up to the given error criterion and it was found to be sufficient for our purpose. The present results were then compared with existing experimental results using laser doppler velocimetry and numerical results using finite difference method and mixed interpolation finite element method. It has been shown that the present method gives accurate results with less memories and execution time than the conventional finite element method.

#### 기 호 설 명

$A_e$ : 요소의 면적	$P$ : 압력
$a_{ij}$ : 운동량 방정식의 계수	$p$ : 무차원화된 압력
$D$ : 채널의 수력 직경	$\bar{p}$ : Perturbation 가중함수
$e_{max}$ : 최대 오차	$r$ : 관성이완계수
$f$ : 생성항(source term)	$s$ : 경계를 따르는 좌표
$h$ : 계단높이	$U$ : 문제의 특성 속도
$K_j$ : 압력구배 성분 (pressure gradient component)	$u, v$ : $x$ 방향 속도, $y$ 방향 속도
$L$ : 공동구동 유동문제의 특성길이	$\hat{u}_i, \hat{v}_i$ : 의사속도성분 (pseudovelocity component)
$\vec{n}$ : 경계에 수직인 단위벡터	$w$ : Galerkin 가중함수
$N_i$ : 선형형상함수	$\bar{w}$ : 수정 가중함수 ( $= w + \bar{p}$ )
	$\mu$ : 점성계수
	$\rho$ : 밀도
	$\psi$ : 유동함수값

\*서울대학교 대학원

\*\*정회원, 서울대학교 기계공학과

$\psi^*$  : 무차원화된 유동함수값

하첨자

$e$  : 요소

$i$  : 절점

## 1. 서 론

유한요소법을 이용한 Navier-Stokes 방정식의 해석은 여러 방식으로 접근되어 왔다. 그들 중의 대부분은 속도-압력 혼합차수 내삽법을 이용한 방식으로서, 이 방식은 유한차분법에 비해 수치적으로 안정되어 있으며 매우 적은 반복계산 회수로도 해를 얻을 수 있다.<sup>(1)</sup> 반면에 많은 기억용량과 계산시간을 필요로 하므로, 결과적으로 많은 비용이 들게 된다. 또한 속도의 보간함수로서 선형요소를 사용할 경우 압력장이 Checker-board 현상을 보이게 되어 새로운 형태의 보간함수가 요구된다.

속도-압력 혼합차수 내삽법의 이런 단점을 극복하기 위해 Penalty method에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>(2-5)</sup> 이는 속도-압력 혼합차수 내삽법에 비해 보다 적은 기억용량과 계산시간이 드는 장점이 있으나, 압력장을 얻기 위해서 별도의 후처리과정이 필요하며, 연속방정식을 단지 근사적으로 만족시킨다.

한편, 일부의 연구자들은 SIMPLE 알고리즘<sup>(6)</sup>을 유한요소법에 적용하고자 하였다.<sup>(7-9)</sup> 이 방법은 SIMPLE 알고리즘의 장점을 그대로 살려서 기억용량과 계산시간을 상당히 감소시킬 수 있음과 동시에 유한요소법의 장점도 유지할 수 있다는 점에서 연구자들의 관심을 끌게 되었다. 하지만 이 방법을 이용해서 유동장을 해석하는 연구는 아직도 초기단계에 머물러 있으며, 발표된 논문의 경우 수치기법의 유용성을 검증하기에 충분한 만큼의 계산을 포함하고 있지 않다.

본 논문에서는 수치알고리즘으로서 Rice와 Schnipke<sup>(7)</sup>가 제안한 동차 속도-압력공식을 사용하였고, 상류도식(upwind scheme)으로는 Brooks와 Hughes<sup>(10)</sup>가 제안한 유선상류(streamline upwinding) 방식을 사용하였다. 수치기법의 타당성을 검증하기 위해 표준예제(bench mark problem)로서 자주 사용되는 공동구동문제와 후향계단 유동문제를 취급하였다. 공동구동 유동문제의 경우  $Re$  수 400부터

10,000까지 고찰하였으며, 후향계단 유동문제의 경우는 200부터 900까지 고찰하여 기존의 수치결과 및 실험결과와 비교하고자 한다. 본 논문에서 제시된 수치기법을 사용한 결과, 기존의 유한요소법보다 계산시간과 기억용량을 줄이면서도 비교적 좋은 해를 얻을 수 있음이 확인될 것이다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 지배방정식

2차원 정상 층류유동에 대한 Navier-Stokes 방정식 및 연속방정식을 사용하였으며, 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

### 2.2 유한요소 공식화

Rice와 Schnipke<sup>(7)</sup>가 제안한 방식을 따라서 운동량방정식의 압력구배는 원천항으로 처리하며, Brooks와 Hughes<sup>(10)</sup>가 제안한 유선상류 도식(streamline upwind scheme)을 운동량방정식에 적용한다. 지배방정식에 가중유수법(weighted residual method)을 적용한 후 weak form으로 바꾸면 아래와 같은 식이 유도된다.

$x$  운동량방정식에 대해서,

$$\begin{aligned} \int [(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x})w + \frac{\partial w}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial w}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y})] dA_e \\ + \int \bar{p} [\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y})] dA_e \\ = \int (\bar{\sigma} \cdot \bar{n}) ds \\ \bar{p} = c_1 \frac{\partial w}{\partial x} + c_2 \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{\sigma} = (w \mu \frac{\partial u}{\partial x}) i + (w \mu \frac{\partial u}{\partial y}) j \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $w$ 는 Galerkin 가중함수,  $\bar{p}$ 는 Perturbation 가중함수이고  $\bar{n}$ 은 경계에 수직인 벡터이다.  $\bar{p}$ 는 유선상류 도식(streamline upwind scheme)에 관계된 양으로서, 다차원의 경우 Tensor형태의 인공 점성항으로부터 도출되고, 결과적으로 이 양에 의해서 상류효과는 유동방향, 즉, 다차원적으로 적

용된다. 유한차분법의 경우(예 : QUICK 도식), 다차원 문제에 대해서도 상류효과를 각각의 일차원 성분을 따라 고려하므로 본질적으로 오류확산(false diffusion)이 유선상류 도식보다 크다고 할 수 있다.  $\bar{p}$ 의 유도는 Brooks와 Hughes<sup>(10)</sup>에 상세히 기술되어 있으며, 본 연구에서는 전체 유선상류(consistent streamline upwinding) 방식을 사용하여  $\bar{p}$ 를 운동량식의 모든 항에 적용하였다. 압력과 속도를 일차 선형함수로 보간하고,  $\mu$ 는 상수로 보므로 식(2)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \int [(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}) \bar{w} + \frac{\partial w}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial w}{\partial y} (\mu \frac{\partial u}{\partial y})] dA_e \\ &= - \int \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dA_e + \int (\bar{\sigma} \cdot \bar{n}) ds \\ & \bar{w} = w + \bar{p} \end{aligned} \quad (3)$$

y방향 운동량방정식도 이와 같은 방식으로 정리된다. 한편,  $u, v, p$ 는 임의의 요소에서 선형 형상함수로 보간되므로 다음 식과 같이 표시된다.

$$u = \sum_{j=1}^4 N_j u_j, \quad v = \sum_{j=1}^4 N_j v_j, \quad p = \sum_{j=1}^4 N_j p_j \quad (4)$$

식(4)의  $u, v, p$ 를 식(3)에 대입하면, 각각의 요소에 대하여  $u, v, p$ 에 대한 이산화된 방정식이 얻어진다. 그후에 각각의 요소들에 대한 식을 모아서 전체 유동장에 대한 이산화된 방정식을 구성한다. 그러면, 운동량방정식의 경우 임의의 절점  $i$ 에 대해서 다음과 같은 이산화된 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} a_{ii} u_i &= - \sum_{j=1}^8 a_{ij} u_j + f_i^u \\ a_{ii} v_i &= - \sum_{j=1}^8 a_{ij} v_j + f_i^v \\ f_i^u &= - \int_{A_e} \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dA_e, \quad f_i^v = - \int_{A_e} \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} dA_e \end{aligned} \quad (5)$$

본 연구에서는 선형요소를 사용하므로 유동영역 내부에서 임의의 절점  $i$ 에 대한 주변의 절점의 수는 8개가 된다. 여기서,  $a_{ij}$ 는 이산화된 운동량방정식의 계수이며,  $f_i$ 는 압력구배에 기인하는 생성항이다. 한편, 한 요소내에서 압력구배가 일정하다고 가정하면  $f_i$ 항에서 압력구배가 적분 밖으로 나오게 된다. 그런 후에, 식(5)를  $u_i, v_i$ 에 대해 정리하면 다음의 식이 얻어진다. 여기서,  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$ 는 SIMPLER 알고리즘의 의사속도(pseudovelocity)에 해당하는 양이다.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i - K_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad v_i = \bar{v}_i - K_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ \bar{u}_i &= \frac{- \sum_j a_{ij} u_j}{a_{ii}}, \quad \bar{v}_i = \frac{- \sum_j a_{ij} v_j}{a_{ii}} \\ K_j &= \frac{\int \bar{w} dA_e}{a_{ii}} \end{aligned} \quad (6)$$

한편, 연속방정식을 weak form으로 바꾸면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \int_{A_e} w (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) dA_e &= - \int_{A_e} (\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v) dA_e \\ &+ \int_s w (\bar{u} \cdot \bar{n}) ds \end{aligned}$$

압력구배와 의사속도로 표시된 식(6)의  $u_i, v_i$ 를 식(4)에 넣은 후,  $u, v$ 를 위식에 대입하면 다음의 압력방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \int [ \frac{\partial w_i}{\partial x} (N_j K_j \frac{\partial N_k}{\partial x} p_k) + \frac{\partial w_i}{\partial y} (N_j K_j \frac{\partial N_k}{\partial y} p_k) ] dA_e \\ &= \int (\frac{\partial w_i}{\partial x} N_j \bar{u}_j + \frac{\partial w_i}{\partial y} N_j \bar{v}_j) dA_e - \int (w_i \bar{u} \cdot \bar{n}) ds \end{aligned} \quad (7)$$

위의 압력방정식을 풀어서 구한 압력을 운동량방정식에 넣고 이를 다시 한번 풀어 속도장을 보정해주는 과정까지가 한번의 계산회수가 된다. 압력방정식의 유도, 경계조건 및 알고리즘에 대한 더 자세한 내용에 대해서는 Rice와 Schnipke<sup>(7)</sup>를 참고할 수 있다. 다만, 그들의 경우에는 상류도식으로서 단조 유선상류 도식(monotone streamline upwinding)을 채택한 반면에, 본 연구에서는 유선상류 도식(streamline upwinding)을 채택하였으므로 Galerkin 가중함수 대신에 SU/PG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 가중함수를 사용하고, 따라서 식(6)의  $K_j$ 의 값이 다르게 정의된다.

### 3. 계산결과

본 논문에서 제시된 알고리즘과 기존의 혼합차수 유한요소법에 의한 동시해법(simultaneous solution method using mixed order finite element method)의 계산 특성을 비교하기 위해 채널내의 층류발달 유동(laminar developing flow)를 두가지 방식으로 계산하여 그 결과를 Table 1에 제시하였다. 동시해법은 속도와 압력이 couple되면서 전체 변수를

**Table 1** Comparison of CPU time required for calculating the laminar developing flow

	Computing time	Number of iterations	Total number of variables	Node type
Present algorithm	59.2 sec	72	2304	4 node
Mixed order scheme	238.3 sec	9	2303	8 node

Computer used : HP730

Error criterion :  $10^{-4}$

구해내므로 반복계산 회수는 적지만, 한번 반복계산시 많은 계산시간이 소요되므로 전체적인 계산시간은 더 많아지게 되며 많은 양의 기억용량을 필요로 하게 된다. Table 1에 제시된 바와 같이 본 논문에서 제안된 알고리즘이 기존의 혼합차수법보다 적은 계산시간을 요함을 알 수 있다. 그러나, 두 기법의 계산시간 비교는 유동장의 특성 및 Matrix solver로서 어떤 것을 택하느냐는 문제와도 매우 밀접하게 관련되어 있고 프로그램의 코딩에도 영향을 받으므로, Table 1에 제시된 결과가 두 가지 수치기법의 특성을 완전하게 나타낸다고 볼 수는 없으며, 단지 하나의 참고자료로 인식되어야 할 것이다.

**3.1 공동구동 유동문제**

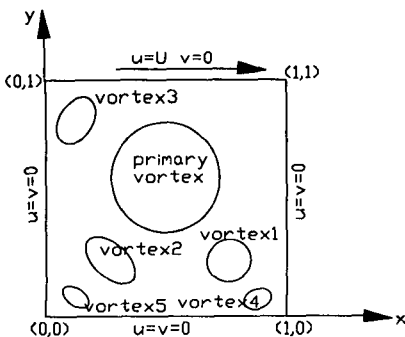
이 문제의 유동영역 및 경계조건은 Fig. 1에서 볼 수 있다. 본 연구에서는  $51 \times 51$ 의 비균일 격자계(Fig. 2)를 사용하여  $Re$ 수 400부터 10,000까지 계산을 수행하였다. 속도의 경계조건으로는 위벽에서는  $u=U, v=0$ , 나머지 벽에서는 점착조건이 주어진다. 압력의 경계조건으로는 모든 경계에서

속도가 주어지므로  $K_j$ 의 값이 0으로 지정되며, 기준값으로  $x=y=0$ 에서의 압력을 0으로 지정하였다.  $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ 에서  $U$ 는 위판의 속도,  $L$ 은 공동벽의 길이가 된다. 계산은  $Re=400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10,000$ 에 대하여 수행되었으며, 운동량방정식은 TDMA solver<sup>(11)</sup>로 풀고, 압력식은 Frontal solver<sup>(12)</sup>로 풀었다.  $Re=400$ 에 대한 초기치를  $u=v=p=0$ 으로 한 후 수렴된 해를 얻고, 이 수렴된 해를  $Re=1000$ 에 대한 초기치로 하여 계산해 나가는 방식을 택했다. 본 수치기법의 수렴이력의 특성을 고찰하기 위하여  $Re=400$ 에 대하여  $u=v=p=0$ 을 초기치로 하여 계산을 수행하였다. 해는 매 계산단계마다 이완계수(underrelaxation factor)  $\alpha$ 를 사용하여 보정되었으며, 운동량방정식의 경우에는 관성이완계수(inertial relaxation factor)를  $r$ 를 함께 사용하였다.

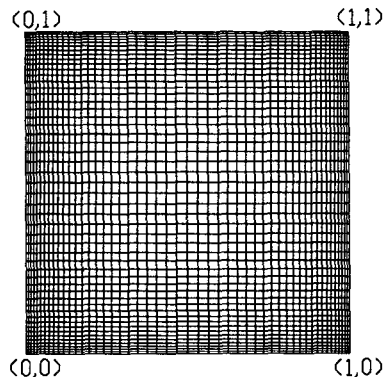
$$\phi^n = \alpha \phi^n + (1 - \alpha) \phi^{n-1} \tag{8}$$

$$(a_{ii} + r) \phi_i = \sum_j a_{ij} \phi_j + f_i + r \phi_i^{old} \tag{9}$$

모든 계산 경우에 대해서,  $r = \int_{A_o} \bar{w} dA_o$ 의 값을 사



**Fig. 1** Schematic description of lid-driven cavity flow field with various secondary vortices<sup>(1)</sup>



**Fig. 2** Mesh configuration for lid-driven cavity flow problem ( $51 \times 51$  grids)

용하였다. 속도는 특성속도  $U$ , 압력은  $\rho U^2$ 으로 무차원화했을 때 이들 변수량들의 전 단계와의 차이가 오차 한도보다 작을 경우, 수렴된 해로 간주하였다.

$$e_{\max} = \max_{i=1, N_i} |\phi_i^n - \phi_i^{n-1}| < 10^{-4} \quad (10)$$

여기서,  $i$ 는 절점(node)을 나타내며,  $N_i$ 는 절점의 총 개수이고,  $\phi$ 는 무차원화된  $u, v, p$ 를 나타낸다. Table 2는 각 계산 경우마다의 이완계수의 값 및 반복계산 회수를 보여주고 있다.

Fig. 3은 공동구동 문제에서 모든 변수의 초기치를 0으로 했을 때,  $Re=400$ 에서의 수렴이력 과정을

을 나타낸다. 오차한도까지는 수렴이력 과정이 좋으나, 오차한도를 벗어나서는 진동하는 형태를 보인다. 동일한 문제를 동일한 조건하에서 2배 정도(double precision)로 계산했을 때의 수렴이력 과정을 Fig. 4가 보이고 있다. 수렴이력 과정은 매우 안정되어 있으며  $10^{-10}$ 까지도 균일하게 떨어짐을 볼 수 있다. 즉, Fig. 3에서  $10^{-4}$ 을 넘어서는 진동은 round-off 오차로부터 기인함을 알 수 있다. 그러므로, 본 연구에서는 1배 정도(single precision)로 계산하면서 오차한도는  $10^{-4}$ 으로 지정하여 모든

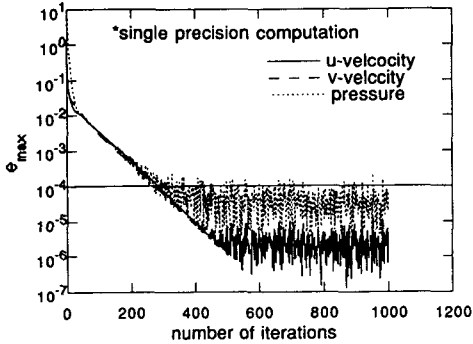


Fig. 3 Convergence history for lid-driven cavity flow(single precision calculation) for  $Re=400$

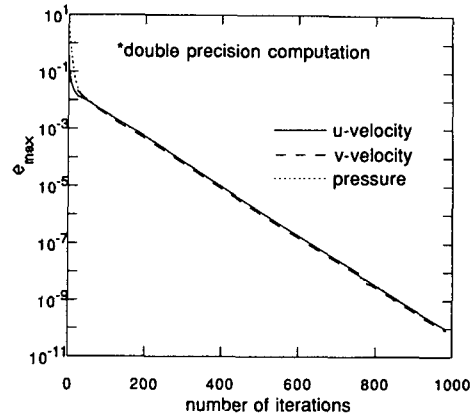


Fig. 4 Convergence history for lid-driven cavity flow(double precision calculation) for  $Re=400$

Table 2 Relaxation parameters and number of iterations

	Re	$\alpha_u$	$\alpha_p$	Number of iterations
lid-driven cavity flow	400	0.6	0.3	285
	1000	0.6	0.3	160
	3200	0.6	0.3	197
	5000	0.6	0.3	137
	7500	0.6	0.3	179
	10000	0.6	0.3	201
Backward facing step flow	200	0.3	0.2	184
	400	0.5	0.3	259
	600	0.5	0.3	434
	800	0.5	0.3	587
	900	0.5	0.3	516

결과를 얻었으며, 결과는 수렴된 해로 보기에 충분함을 알 수 있다. 한편, 오차한도가 변함에 따라 해가 진동하는 경우도 생기게 되므로 이를 확인하기 위해  $Re=400$ 에 대해서 오차한도를  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $5 \times 10^{-6}$ 으로 두고 1배 정도로 계산한 결과들 및 2배 정도로 계산한 결과를 비교하였다. Fig. 5에서는 각각의 계산결과로부터 얻은  $x=0.5$ 인 지점에서의  $u$ 속도 분포를 보여주고 있다. 네 경우 모두가 일치하는 결과를 보여주고 있다. Table 3에서는 각각의 계산결과로부터 얻은 여러 데이터를 보여주고 있는데, 오차한도의 변화에 따라 공동 구동 유동문제의 경우에는 해의 변화를 발견할 수는 없었다. 따라서 round-off 오차때문에 최대 오차는 진동하게 되지만 round-off 오차에 기인하는 최대 오차의 진동은 해의 진동에 영향을 준다고 볼 수 없다.

또한,  $Re=3,200$ 에 대하여 초기치를  $u=v=p=0$ 으로 한 후,  $31 \times 31$ ,  $41 \times 41$ ,  $51 \times 51$ 의 격자계를

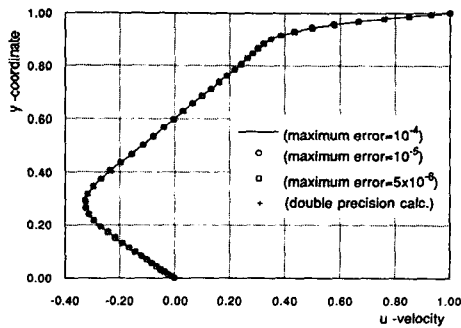


Fig. 5 U-velocity profiles at  $x=0.5$  obtained with different error criteria ( $Re=400$ )

에 대하여 계산을 수행하여 격자계의 변화에 따른 해의 변화를,  $x=0.5$ 인 지점에서의  $u$ 속도 분포를 비교함으로써 확인하였다. Fig. 6에는 이 결과를 Ghia 등<sup>(13)</sup>의 계산결과와 비교하였는데, Ghia 등<sup>(13)</sup>은 2차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 와도-유동함수 형식에 대하여 연성강성 내재적 유한 차분 다중격자방법(coupled strongly implicit finite difference multigrid method)를 채택하였다. 여기에서 보듯이 격자수가 적을수록 해는 빠르게 수렴함을 알 수 있으며, 높은  $Re$ 수에서도 정확한 해를 얻기 위해서,  $51 \times 51$  정도의 격자계를 모든 계산에 사용하였다.

Fig. 7은  $Re=1000$ ,  $3200$ ,  $10,000$ 에 대한 유선을 나타내며, Fig. 8은  $\rho U^2$ 으로 무차원화된 등압력선을 나타낸다. Fig. 9에서는  $x=0.5$ 인 지점에서의  $u$ 속도 분포를 Ghia 등<sup>(13)</sup>의 계산결과와 비교하

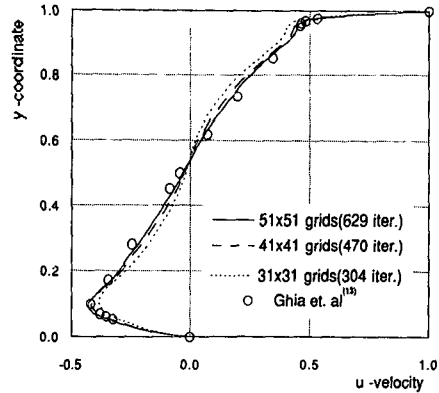
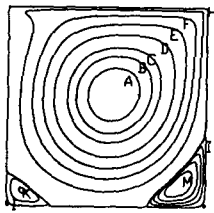


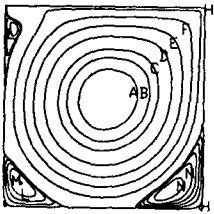
Fig. 6 U-velocity profiles at  $x=0.5$  obtained with various grid configurations ( $Re=3200$ )

Table 3 Comparison of results for various error criteria

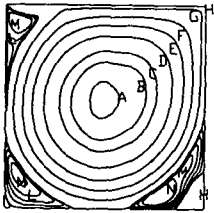
Error criterion	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-10}$ (double precision)
$P_{\max}$	5.1224	5.1224	5.1224	5.1221
$P_{\min}$	-4.0942	-4.0944	-4.0944	-4.0946
Stream function value at the center of vortex 1	-0.1132	-0.1132	-0.1132	-0.1132
Stream function value at the center of vortex 2	$6.3053 \times 10^{-4}$	$6.3125 \times 10^{-4}$	$6.3221 \times 10^{-4}$	$6.3221 \times 10^{-4}$



(a) Re=1000



(b) Re=3200



(c) Re=10,000

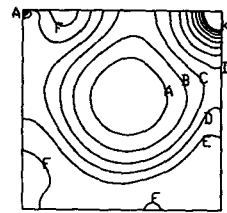
Label	$\psi$	Label	$\psi$	Label	$\psi$
A	-0.11	F	-0.03	K	$2 \times 10^{-4}$
B	-0.10	G	-0.01	L	$5 \times 10^{-4}$
C	-0.09	H	$-1 \times 10^{-10}$	M	$1 \times 10^{-3}$
D	-0.07	I	$1 \times 10^{-6}$	N	$2 \times 10^{-3}$
E	-0.05	J	$5 \times 10^{-5}$		

Fig. 7 Streamlines for cavity flow

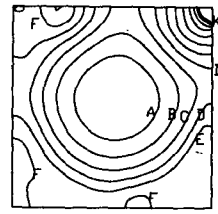
고 있으며, Table 4에서는 각각의 Vortex 중앙에서의 유선값을 Ghia 등<sup>(13)</sup>과 Kim<sup>(11)</sup>의 계산결과와 비교해서 보여주고 있는데, Kim<sup>(11)</sup>은 속도-압력 혼합차수 내삽법을 이용한 Galerkin 유한요소법을 적용하였다. 본 계산의 결과가 다른 계산의 결과와 매우 근접해 있음을 수치적으로 확인할 수 있다. 본 수치기법은 Ghia 등<sup>(13)</sup>과 Kim<sup>(11)</sup>의 계산방식에 비해서 상대적으로 적은 격자와 계산 용량으로 비교적 정확하게 속도분포를 예측하게 된다.

### 3.2 후향단계 유동문제

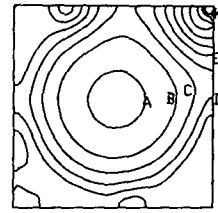
또 다른 예로서 확장비가 1 : 1.94인 경우의 후향 계단 유동문제를 고찰하였다. 이 문제는 압력 경계



(a) Re=1000



(b) Re=3200



(c) Re=10,000

Label	p	Label	p	Label	p
A	-0.10	F	0.00	K	0.10
B	-0.08	G	0.02		
C	-0.06	H	0.04		
D	-0.04	I	0.06		
E	0.02	J	0.08		

Fig. 8 Pressure contours for lid-driven cavity flow

조건이 공동구동 문제와 다르므로 본 수치기법의 타당성을 검증하는데 필요하다.  $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ 는 입구의 수력학적 지름(hydraulic diameter)  $D$ (2차원 유동의 경우, 평균간격의 2배)와, 평균 속도(bulk velocity)  $V$ 를 기준으로 하였다. 본 계산에서는  $89 \times 31$ 의 격자계(Fig. 10)를 사용하였다. 입구는 계단 높이를  $h$ 라 할 때 계단이 있는 곳에서  $3.5h$ 인 곳에 위치하며, 출구는  $45h$ 에 위치한다. 속도에 대한 경계조건으로서 입구에서 완전 발달된 채널유동 속도조건을 주고, 출구에서는 Neumann 경계조건( $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ )을 주었으며, 벽에서는 점착조건을 주었다. 압력식에 대해서는 입구에서 들어가는 유량이 있으므로 식(7)에서 선적분을 해야하며, 출구에서는 속도에 대한 경계조건이 주어졌으므로

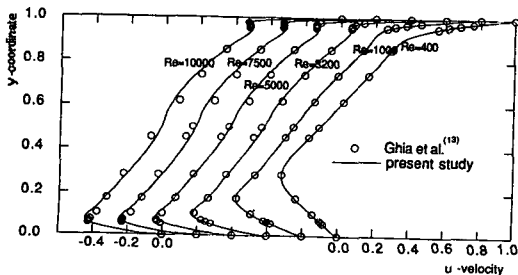
**Table 4** Stream function values at the center of vortices for lid-driven cavity flow

	Re	Ghia et al. <sup>a</sup>	Kim <sup>b</sup>	Present study <sup>c</sup>
Primary vortex	400	-0.1139	-0.1128	-0.1134
	1000	-0.1179	-0.1169	-0.1187
	3200	-0.1204	-0.1181	-0.1197
	5000	-0.1190	-0.1173	-0.1166
	7500	-0.1200	-0.1157	-0.1143
	10000	-0.1197	-0.1150	-0.1123
Vortex 1	400	$6.4235 \times 10^{-4}$	$6.1810 \times 10^{-4}$	$6.2178 \times 10^{-4}$
	1000	$1.7510 \times 10^{-3}$	$1.6594 \times 10^{-3}$	$1.6727 \times 10^{-3}$
	3200	$3.1396 \times 10^{-3}$	$2.6744 \times 10^{-3}$	$2.9474 \times 10^{-3}$
	5000	$3.0836 \times 10^{-3}$	$2.7786 \times 10^{-3}$	$3.4469 \times 10^{-3}$
	7500	$3.2848 \times 10^{-3}$	$2.7396 \times 10^{-3}$	$3.8983 \times 10^{-3}$
	10000	$3.4183 \times 10^{-3}$	$2.7528 \times 10^{-3}$	$4.1488 \times 10^{-3}$
Vortex 2	400	$1.4195 \times 10^{-5}$	$1.3577 \times 10^{-5}$	$1.2854 \times 10^{-5}$
	1000	$2.3113 \times 10^{-4}$	$2.1951 \times 10^{-4}$	$2.1885 \times 10^{-4}$
	3200	$9.7820 \times 10^{-4}$	$1.0465 \times 10^{-3}$	$1.0328 \times 10^{-3}$
	5000	$1.3612 \times 10^{-3}$	$1.2675 \times 10^{-3}$	$1.2299 \times 10^{-3}$
	7500	$1.4671 \times 10^{-3}$	$1.3597 \times 10^{-3}$	$1.3509 \times 10^{-3}$
	10000	$1.5183 \times 10^{-3}$	$1.4055 \times 10^{-3}$	$1.3575 \times 10^{-3}$
Vortex 3	3200	$7.2786 \times 10^{-4}$	$6.4440 \times 10^{-4}$	$6.7383 \times 10^{-4}$
	5000	$1.4564 \times 10^{-3}$	$1.3045 \times 10^{-3}$	$1.1679 \times 10^{-3}$
	7500	$2.0462 \times 10^{-3}$	$1.8426 \times 10^{-3}$	$1.6256 \times 10^{-3}$
	10000	$2.4210 \times 10^{-3}$	$2.1817 \times 10^{-3}$	$1.9490 \times 10^{-3}$

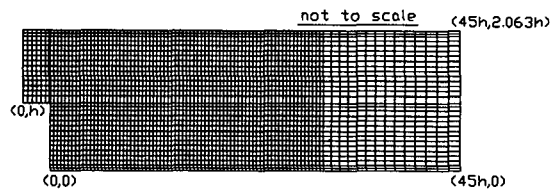
<sup>a</sup> 257 × 257 grids for Re=400, 5000, 7500 and 10,000 and 129 × 129 grids for Re=1000 and 3200

<sup>b</sup> 65 × 65 grids for all Reynolds numbers

<sup>c</sup> 51 × 51 grids for all Reynolds numbers

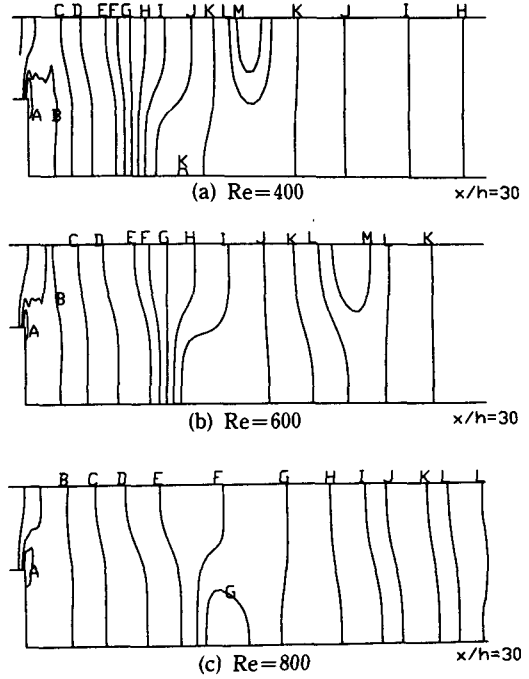
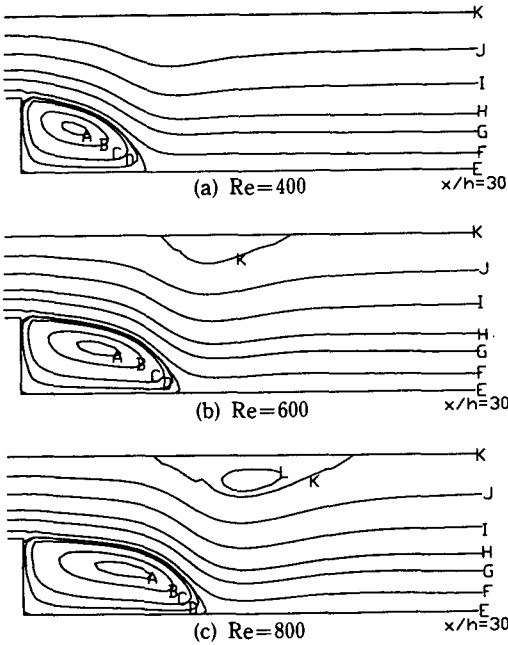


**Fig. 9** Comparison of u-velocity profiles at  $x=0.5$  for various Reynolds numbers



**Fig. 10** Mesh configuration for backward-facing step flow (89 × 31)





Label	$\psi$	Label	$\psi$	Label	$\psi$
A	-0.0408	F	0.0204	K	0.7040
B	-0.0305	G	0.1020	L	0.7120
C	-0.0102	H	0.2041		
D	-0.0020	I	0.4082		
E	0.0000	J	0.6122		

Label	Re=400	Re=600	Re=800
A	-0.0035	-0.0035	-0.0017
B	0.0017	0.0017	0.0022
C	0.0111	0.0111	0.0110
D	0.0315	0.0315	0.0314
E	0.0750	0.0750	0.0755
F	0.0980	0.0980	0.1249
G	0.1200	0.1200	0.1556
H	0.1420	0.1420	0.1821
I	0.1640	0.1640	0.1956
J	0.1870	0.1870	0.2000
K	0.2000	0.2000	0.2044
L	0.2050	0.2050	0.2053
M	0.2062	0.2062	

Fig. 11 Streamlines for backward-facing step flow

Fig. 12 Pressure contours for backward-facing step flow

수학적으로 압력에 대한 별도의 경계조건은 불필요하나, 출구가 충분히 멀리 떨어져 있어 유동장이 완전히 발달되었다고 보아서, 기준 압력으로서 단면 전체에 대해서 압력을 일정한 값으로 지정하였다. 벽에서는 공동구동 문제와 마찬가지로  $K_y=0$ 으로 지정된다.  $Re$ 수는 200, 400, 600, 800, 900에 대해 계산했으며,  $Re=200$ 은  $u=v=p=0$ 를 초기치로,  $Re=400$  이후는 그전 단계 수렴값을 초기치로 하여 계산하였다. Fig. 11은 계산된 유선을 나타내며, Fig. 12은 압력분포를 나타낸다. 이때의 두 값은 각각  $\psi^* = \frac{\psi}{U_{max}h}$ ,  $p = \frac{P}{(\rho U_{max}^2/2)}$ 으로 무차원화된 것이다. 여기서,  $U_{max}$ 는 입구의 최대 속도이다. 한편, 압력은 계단이 있는 곳의 구석( $x=0, y=0$ )을 기준으로 하여 상대압력을 나타냈다. 계산의 결과를 검증하기 위해 Fig. 13에서 재순환 영역의 크기를 실험치<sup>(4)</sup> 및 Kim<sup>(1)</sup>의 결과와 비교

하였다. Kim<sup>(1)</sup>은  $89 \times 31$ 의 격자를 사용하여 속도-압력 혼합차수법으로 계산하였다. 본 결과와 Kim의 결과는 거의 비슷하며 실험치와도 비교적 잘 맞으나,  $Re$ 수가 커질수록 경향은 비슷하지만 값이 차이를 보이는데 이는 실험에서  $Re$ 수가 커질수록 유동의 3차원 효과가 커지기 때문이다. Fig. 14는 벽에서의 전단응력을 나타낸 것으로서 Kim<sup>(1)</sup>의 결

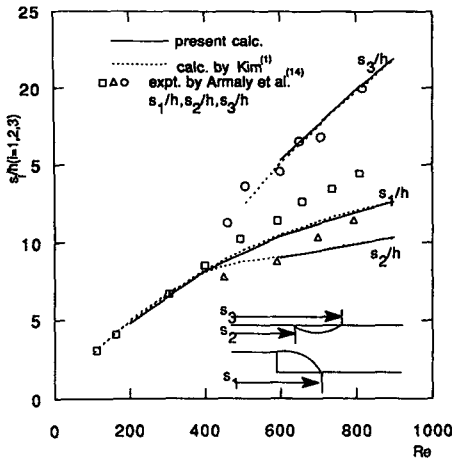


Fig. 13 Reattachment length vs. Reynolds number for backward-facing step flow

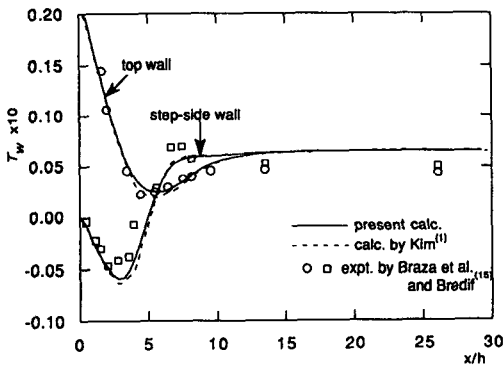


Fig. 14 Wall shear stress distribution of backward-facing step flow (Re=200)

과 및 실험치<sup>(15)</sup>와 비교하였다. 이 경우 실험조건은 계산조건과 거의 비슷하나 완전히 일치하지는 않는다. 본 결과와 Kim<sup>(1)</sup>의 결과는 거의 일치하며 실험치와 거의 유사한 거동을 보인다. 하류에서의 전단응력은 속도분포가 완전 발달되므로 계산값은 일정하지만 실험치는 조금씩 감소하는데 이는 실험에서 관의 폭이 하류에서 일정하지 않기 때문이라 한다.<sup>(15)</sup>

#### 4. 결 론

수치알고리즘으로 Rice와 Schnipke<sup>(7)</sup>의 동차속도-압력공식을 도입하고, 상류도식으로 유선상류도식<sup>(10)</sup>을 적용하여 수치해석을 수행한 결과, 경계

적이며 동시에 정확함을 알 수 있었다. 경계조건이 상이한 두개의 문제를 해석함으로써 본 수치기법의 타당성을 입증할 수 있었다. 주어진 오차한도내에서 운동량식과 연속방정식 모두가 양호한 수렴 특성을 나타냄을 볼 수 있었다. 본 수치기법은 바로 3차원으로 확장될 수 있으며 비정상 유동, 난류 유동장 및 비뉴턴 유동장을 해석하는데 유용한 도구가 되리라 생각된다.

#### 후 기

본 연구는 터보동력기계연구센터의 지원으로 수행되었으며, 본 연구를 수행하는 과정에서 도움이 되는 토론을 하여 주신 (주)금성사 가전연구소 소속 민준기씨와 KAIST의 권장혁 교수님께 감사를 포함합니다.

#### 참고문헌

- (1) Kim, S. W., 1988, "A Fine Grid Finite Element Computation of Two Dimensional High Reynolds Number Flows," *Comput. Fluids*, Vol. 16, No. 4, pp. 429~444.
- (2) Sohn, J. L. and Heinrich, J. C., 1990, "A Poisson Equation Formulation for Pressure Calculations in Penalty Finite Element Models for Viscous Incompressible Flow," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, pp. 349~361.
- (3) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, pp. 1~60.
- (4) Heinrich, J. C., and Marshall, R. S., 1981, "Viscous Incompressible Flow by a Penalty Function Finite Element Method," *Computers and Fluids*, Vol. 9, pp. 73~83.
- (5) Carey, G. F. and Oden, J. T., 1986, "Finite Elements," *Fluid Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., Vol. 6, pp. 144~158.
- (6) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, pp. 126~134.
- (7) Rice, J. G. and Schnipke, R. J., 1986, "An Equal-Order Velocity-Pressure Formulation that

- does not Exhibit Spurious Pressure Modes," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 135~149.
- (8) Benim, A. C. and Zinser, W., 1986, "A Segregated Formulation of Navier-Stokes Equations with Finite Elements," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 57, pp. 223~237.
- (9) 민준기, 1990, "최적가중함수를 이용한 대류항이 큰 전달방식의 UPWIND 유한요소해석," 한국과학기술원 석사학위논문.
- (10) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (11) Hageman, A. and Young, D. M., 1981, *Applied Iterative Methods*, Academic Press, Inc. Orlando., pp. 19~32.
- (12) Hughes, T. G. and Taylor, C., 1980, *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*, Pineridge Press, Swansea., pp. 120~153.
- (13) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (14) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. and Schönung, B., 1983, "Experimental and Theoretical Investigation of Backward Facing Step Flow," *J. Fluid. Mech.*, Vol. 127, pp. 473~496.
- (15) Morgan, K., Periaux, J. and Thomasset, F. (Editors), 1984, *Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step*, AGAMM-Workshop. Friedr Vieweg & Shon, Germany.