

〈論 文〉

층간균열이 존재하는 균일 열유동하의 섬유강화 적층복합재료의 열응력해석

최형집* · 오준성** · 이강용***

(1993년 12월 23일 접수)

Thermal Stresses in a Laminated Fiber-Reinforced Composite Containing an Interlaminar Crack Under a Uniform Heat Flow

Hyung Jip Choi, Joon Sung Oh and Kang Yong Lee

Key Words : Laminated Fiber-Reinforced Composite Materials(섬유강화 적층복합재료), Interlaminar Crack(층간균열), Matrix Interlayer(기지중간층), Flexibility/Stiffness Matrix Method(연성/강성행렬방법), Singular Integral Equations(특이 적분방정식), Thermal Stress Intensity Factor(열응력세기계수)

Abstract

Within the framework of anisotropic thermoelasticity, the problem of an interlaminar crack in a laminated fiber-reinforced composite subjected to a uniform heat flow is investigated. Under a state of generalized plane deformation, dissimilar anisotropic half-spaces with different fiber orientations are considered to be bound together by a matrix interlayer containing the crack. The interlayer models the matrix-rich interlaminar region of the fibrous composite laminate. Based on the flexibility/stiffness matrix approach, formulation of the current crack problem results in having to solve two sets of singular integral equations for temperature and thermal stress analyses. Numerical results are obtained, illustrating the parametric effects of laminate stacking sequence, relative crack size, crack location, crack surface partial insulation, and fiber volume fraction on the values of mixed mode thermal stress intensity factors.

1. 서 론

균열을 포함하는 섬유강화 복합재료 (fiber reinforced composite materials)의 열탄성학적 거동에 대한 이해는 이러한 재료가 가혹한 열적환경에 빈번히 노출됨으로 인하여, 그 중요성이 날로 증대되고 있다. 이러한 관점에서 균일 열유동하의

각종 무한 이방체내의 균열문제에 대한 해가 제시 되었으며,⁽¹⁻⁴⁾ 이때 균열선단 열응력은 기계적하중이나 등방성재료 균열문제와 마찬가지로 역평방 특이성 (inverse square-root singularity)으로 특징됨을 보였다. 최근에는 등온⁽⁵⁾ 및 비등온⁽⁶⁾하중하의 섬유강화 이방성 균질 스트립에 대해서 외부경계면과의 상호작용과 함께 균열의 크기와 위치 그리고 섬유방향이 해당 응력세기계수에 미치는 영향을 정량적으로 검토된 바 있다. 그밖에도 유한이방성 평판의 균열에 대한 열응력해석을 들 수 있다.⁽⁷⁾

이종재료의 열탄성 균열문제로서 이종등방성 (isotro-

*정회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

**현대자동차 마복리 연구소

***정회원, 연세대학교 기계공학과

pic bimerials)⁽⁸⁻¹⁰⁾ 및 이중이방성 재료 (anisotropic bimerials)⁽¹¹⁻¹³⁾의 계면균열(interface crack)을 들 수 있다. 상기의 연구⁽⁸⁻¹³⁾는 기계적 하중하의 계면균열문제와⁽¹⁴⁾ 마찬가지로 균열면간섭(crack surface interpenetration)을 유발하는 진동특이성(oscillatory singularities)이 수반됨을 보였다. 이는 비록 균열첨단 주위의 매우 국부적인 거동이지만, 두 재료 사이의 두께가 없는 계면에 균열이 존재하는 이상적 모델에 선형탄성이론을 적용할 경우 불가피한 결과로 인식된다.⁽¹⁴⁾ 계면균열선단의 응력장 진동특이성을 제거하기 위한 시도의 대표적 예로서, 마찰이 없는 균열선단닫힘(frictionless crack-tip closure) 모델이 기계⁽¹⁵⁾ 및 열적⁽¹⁶⁾ 하중하에서 제안된 바 있다. 그러나 섬유강화 적층복합재료의 경우 층간균열(interlaminar crack)은 섬유강화층(fibrous layers or laminae) 사이의 기지충분 층간영역(matrix-rich interlaminar region) 손상형태로 발생한다는 현상에 근거하여,^(17,18) 유한요소⁽¹⁹⁾ 및 이론적해석이^(20,21) 수행되었다. 위의 연구들⁽¹⁹⁻²¹⁾에서는 기계적 하중하의 균열을 층간기지영역 내부에 위치시켜, 진동특이성이 없는 종래의 균열첨단 특이성을 회복하였다.

본 논문에서는 균일 열유동하의 섬유강화 적층복합재료 층간균열의 열탄성학적 거동을 각종 물리적 변수들에 대해 고찰한다. 기지충분 층간영역의 두께는 보통 섬유강화층 두께의 1/10과 1/20 사이라는 관찰로부터,⁽¹⁷⁾ 층간기지영역을 유한한 두께의 등방성 기지중간층(matrix interlayer)으로 모델화하였고, 상하의 섬유강화층은 이중이방성 반무한체로 모델화 하였다. 균열은 기지중간층 내부에 존재한다. 선형 이방성 열탄성이론을 기초로 하여, 다층재료(multilayered media)의 효율적 열응력해석을 위해 고안된 연성/강성행렬방법(flexibility/stiffness matrix method)⁽²²⁾을 본 층간균열문제의 해석에 확대, 적용한다. 이어서 열전도와 열응력해석의 혼합경계치문제(mixed boundary value problems)는 제1종 특이 적분방정식계(a system of singular integral equations of the first kind)를 유도하여 수식화 하였다. 수치결과로서, 혼합형 열응력세기계수(thermal stress intensity factor)를 적층순서(stacking sequence) 및 섬유자도, 균열의 크기와 위치, 균열면 부분단열 그리고 섬유부피율(fiber volume fraction)의 함수로 산출하였다.

2. 문제의 정의 및 지배방정식

균일 열유동하의 섬유강화 적층복합재료 열탄성 균열문제에 대한 모델은 Fig. 1에서 도식적으로 보여준다. 여기서 섬유강화층은 이중이방성 반무한체로, 반무한체 사이의 기지충분 층간영역은 길이 $2a$ 의 층간균열이 내재된 균일한 두께 $2h$ 의 기지중간층으로 모델화 하였다. 따라서 기지중간층은 균열면으로부터 위($0 < z < h_1$), 아래($-h_2 < z < 0$) 두 영역으로 구성된 별개의 층으로 간주한다. 섬유자도 $\theta_i, i=1,2$ 는 x - y 평면 상에서 x 축으로부터 반시계 방향으로 측정된다.

크기 q_0 의 열유동이 균열면에 수직으로 무한대에서 z 축 음의 방향으로 가해진다고 가정하면, 문제의 선형성으로부터 전체 온도장은 균열 부재시의 온도장 $T_0(z)$ 와 균열의 존재로 인한 교란된 온도장 $\Theta(x, z)$ 의 합으로 표현될 수 있다.

$$T(x, z) = T_0(z) + \Theta(x, z) \quad (1)$$

균열첨단 주위에서의 열응력 특이성은 상기의 교란된 온도장 $\Theta(x, z)$ 에만 포함되므로, 이때의 열탄성 변위성분들은 단사정 섬유배열(off-axis monoclinic fiber alignment)에 대한 일반 평면변형(generalized plane deformation)⁽²³⁾ 상태에서 다음과 같다.

$$u = u(x, z), \quad v = v(x, z), \quad w = w(x, z) \quad (2)$$

여기서, u, v 그리고 w 는 각각 x, y , 그리고 z -방향 변위성분을 나타낸다.

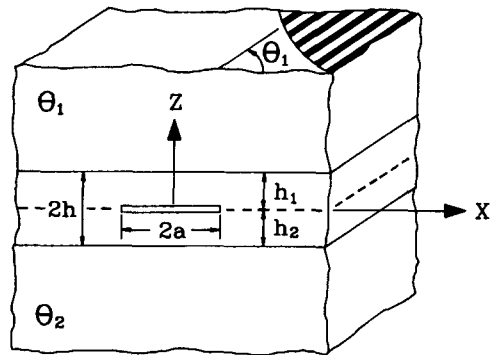


Fig. 1 Schematic of a $[\theta_1/\theta_2]$ composite laminate containing an interlaminar crack in a matrix interlayer

단사정 이방성재료에 대한 열전도 지배방정식은 아래와 같고⁽²⁴⁾

$$\kappa_{xx} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \kappa_{zz} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

해당 열탄성 지배방정식은 변위의 항으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \bar{C}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{C}_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{C}_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{C}_{45} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \beta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ & \bar{C}_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{C}_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{C}_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + (\bar{C}_{36} + \bar{C}_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \beta_6 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ & (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\bar{C}_{36} + \bar{C}_{45}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\ & + \bar{C}_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{C}_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \beta_3 \frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, κ_{ij} , $i, j = x, y, z$ 와 C_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 6$ 는 각각 x - y - z 구조좌표계 (structural coordinate)에서의 열전도계수 (thermal conductivity coefficient) 및 탄성강성계수 (elastic stiffness constants)로서 1-2-3 재료좌표계 (material coordinates)에서의 값인 κ_{il} , $l = 1, 2, 3$ 와 C_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 6$ 그리고 섬유각도 θ_i , $i = 1, 2$ 의 함수로 나타낼수 있다.⁽¹⁸⁾ 열탄성 물성치 (thermal modulus) β_i , $i = 1, 3, 6$ 는 다음과 같다.

$$\beta_i = \bar{C}_{i1} a_{xx} + \bar{C}_{i2} a_{yy} + \bar{C}_{i3} a_{zz} + \bar{C}_{i6} a_{xy} \quad i = 1, 3, 6 \quad (5)$$

이때 a_{ij} , $i, j = x, y, z$ 는 구조좌표계에서의 열팽창계수 (thermal expansion coefficient)로서 재료좌표계에서의 값 a_{il} , $l = 1, 2, 3$ 과 섬유각도 θ_i , $i = 1, 2$ 의 함수이다.⁽¹⁸⁾

이하의 수식 전개에서는 이방성 열탄성이론의 선형성에 근거하여, 문제의 열전도해석으로부터 온도장을 먼저 결정한다. 그리고 이러한 온도장은 열역력해석에 가중항으로 이용된다.

3. 열전도해석

균열면으로부터 기지중간층의 위/아래영역을 동일한 열적성질을 갖는 별개의 층으로 간주하여 (Fig. 1), 전체 적층체는 4개의 층으로 구성한다. 따라서 위/아래 이방성 반무한체는 첫번/네번째 층

으로, 그리고 기지중간층의 위/아래 영역은 두번/세번째 층으로 한다.

아래와 같이 z 방향 열유동 성분 $q_z(x, z)$ 를 정의하면

$$q_z = -\kappa_{zz} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (6)$$

열적평형을 만족하기 위한 연속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Theta_{\bar{k}} &= \Theta_{\bar{k}+1}^+ & ; |x| < \infty, k = 1, 3 \\ (q_z)_{\bar{k}} &= (q_z)_{\bar{k}+1}^+ & ; |x| < \infty, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 하첨자 k 혹은 $k+1$ 은 층의 순서를 의미하고 상첨자 $+/-$ 은 각 층의 위/아래 표면을 나타낸다. 그리고 무한대에서의 정규조건 (regularity condition)은 아래와 같이 부과한다.

$$(q_z)_{\bar{i}} = 0, (q_z)_{\bar{i}} = 0; \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (8)$$

균열이 있는 두번째와 세번째 층 사이의 계면에서, 혼합 열경계조건 (mixed thermal boundary condition)은 다음과 같다.

$$\Theta_{\bar{2}} = \Theta_{\bar{3}}^+ & ; a < |x| < \infty \quad (9a)$$

$$(q_z)_{\bar{2}} = q_0 - h_c (\Theta_{\bar{2}} - \Theta_{\bar{3}}^+) & ; |x| < a \quad (9b)$$

여기서, h_c 는 균열면 열전도계수 (crack surface heat conductance)로 정의된다. 이때 $h_c > 0$ 는 균열면 사이의 국부적 온도차에 비례하여 열유동을 허용하는 부분단열 (partially insulated) 균열면 조건을 의미하고, $h_c = 0$ 는 완전단열 (perfectly insulated) 균열면 조건을 나타낸다.

본 열전도 혼합 경계치문제의 추가적 조건으로, 다음과 같이 정의되는 보조함수 (auxiliary function)를 도입하면

$$\phi_0(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Theta_{\bar{2}} - \Theta_{\bar{3}}^+); |x| < \infty \quad (10)$$

균열면 외부에서 온도의 연속성과 유일성 (single-valuedness)은 상기의 보조함수 항으로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_0(x) = 0; a < |x| < \infty \quad (11a)$$

$$\int_{-a}^a \phi_0(x) dx = 0 \quad (11b)$$

온도 일반해는 식 (8)을 만족시키면서 Fourier 적분변환기법에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Theta_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds \\ &\quad ; k=1, 4 \\ \Theta_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A_k \cosh sz + B_k \sinh sz) e^{-isx} ds \\ &\quad ; k=2, 3 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서, s 는 Fourier 변수, $A_k(s)$, $k=1, 2, 3, 4$, $B_k(s)$, $k=2, 3$ 는 미지함수, $\gamma = (\kappa_{xx}/\kappa_{zz})^{1/2}$ 그리고 $i = (-1)^{1/2}$ 이다. Θ_k , $k=2, 3$ 에서는 기지중간층의 등방성 $\kappa_m = \kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33}$ 에 의하여 $\gamma=1$ 이다. 이때 하첨자 m 은 섬유강화 복합재료의 기지상(matrix phase)을 의미한다.

3.1 연성행렬방법

식(7)의 열전도 경계 및 계면조건을 적용하는 효과적 방법으로서, 연성행렬방법(flexibility matrix method)⁽²⁵⁾을 이용한다. 식(6)과 (12)에서, 각 구성층 위(+)/아래(-) 표면의 Fourier 변환된 온도 일반해 $\bar{\Theta}_k^{\pm}(s)$ 는 동일 표면에서의 열유동 성분 \bar{q}_k^{\pm} ($s \equiv (\bar{q}_z)_k^{\pm}(s)$ 의 함으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} -\bar{\Theta}_1^- &= F_{22}^{(1)} \bar{q}_1^- \\ \begin{Bmatrix} \bar{\Theta}_k^+ \\ -\bar{\Theta}_k^- \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11}^{(k)} & F_{12}^{(k)} \\ F_{12}^{(k)} & F_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_k^+ \\ \bar{q}_k^- \end{Bmatrix} ; k=2, 3 \\ \bar{\Theta}_4^+ &= F_{11}^{(4)} \bar{q}_4^+ \end{aligned} \tag{13}$$

여기서, $F_{ij}^{(k)}(s)$, $i, j=1, 2$ 는 k 번째 층에 대한 국부연성행렬의 요소(elements of the local flexibility matrix)로 정의된다.

이어서, $\bar{q}_k(s) \equiv \bar{q}_k^- = q_{k+1}^+$, $k=1, 2, 3$ 을 k 번째와 $(k+1)$ 번째 층 사이의 연속인 계면 열유동 성분으로 표시하고 식(7)을 적용하면, 전체 연성행렬식(global flexibility matrix equations)이 아래와 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} F_{22}^{(1)} + F_{11}^{(2)} & F_{12}^{(2)} & 0 \\ K_{12}^{(2)} & F_{22}^{(2)} + F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} \\ 0 & F_{12}^{(3)} & F_{22}^{(3)} + F_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta\bar{\Theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

여기서, $\Delta\bar{\Theta}(s) \equiv \bar{\Theta}_2^-(s) - \bar{\Theta}_3^+(s)$ 는 Fourier 영역에서의 균열면 온도차(temperature jump across the crack surface)로서 식(11a)을 만족시키면서 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\bar{\Theta}(s) = \frac{i}{s} \int_{-a}^a \phi_0(t) e^{ist} dt \tag{15}$$

위의 행렬식을 간단히 표기하면 아래와 같다.

$$F\bar{q} = -\Delta\bar{\Theta}_0 \tag{16}$$

여기서, $F(s)$ 는 대칭인 3×3 의 전체연성행렬, $\bar{q}(s)$ 는 계면에서의 열유동 성분을 포함하는 벡터, 그리고 $\Delta\bar{\Theta}_0(s)$ 는 균열면 온도차를 포함하는 벡터이다.

3.2 열전도 특이적분방정식

열유동 성분 $\bar{q}_2(s)$ 를 식(14)로부터 구한후 역 Fourier 변환을 취하고, 식(9b)의 균열면 조건을 적용하면, 보조함수 ϕ_0 에 대한 적분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} q_0 - hc[\Theta_2^-(x) - \Theta_3^+(x)] \\ = \int_{-a}^a R(x, t) \phi_0(t) dt ; |x| < a \end{aligned} \tag{17}$$

여기서, $R(x, t)$ 은 적분핵(kernel)으로서 다음의 식으로 정의된다.

$$R(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} G_{22}(s) e^{is(t-x)} ds \tag{18}$$

이때 $G_{22}(s)$ 는 전도된 전체연성행렬 $G(t) \equiv F^{-1}(s)$ 의 요소이다.

두번째와 세번째 층은 균열이 내재된 기지중간층을 구성하므로, $G_{22}(s)$ 는 $|s| \rightarrow \infty$ 일 때 다음의 점근값(asymptotic value)을 가짐을 알 수 있다.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{s} G_{22}(s) = -\text{sgn}(s) \frac{\kappa_m}{2} \tag{19}$$

상기의 결과는 적분방정식 (17)의 특이성이 $s^{-1}G_{22}$ 의 점근적 거동에 기인함을 나타내므로, 식(18)에서 특이부분(singular part)을 분리하면 Cauchy형 제1종 특이적분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} -hc \int_{-a}^x \phi_0(t) dt + \frac{\kappa_m}{2\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + k(x, t) \right] \phi_0(t) dt \\ = -q_0 ; |x| < a \end{aligned} \tag{20}$$

여기서, $k(x, t)$ 는 유한한 Fredholm 적분핵으로 다음과 같다.

$$k(x, t) = -\int_0^{\infty} \left[\frac{2}{s\kappa_m} G_{22}(s) + 1 \right] \text{sins}(t-x) ds \tag{21}$$

식(20)에서 Cauchy형 특이적분핵 $1/(t-x)$ 이 지배적 함으로 존재하므로, 보조함수 ϕ_0 의 특이성

은 제1종 Chebyshev 다항식의 가중함수(weight function) 로 대변됨을 알 수 있다.^(26,27) 따라서 적분방정식의 해는 문제의 특이성을 보존하면서 $\xi = x/a$ 과 $\tau = t/a$ 의 치환된 구간에서 다음의 급수전개에 나타낸다.

$$\phi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_{2n-1}(\tau) ; |\tau| < 1 \quad (22)$$

여기서, $a_n, n \geq 1$ 는 결정해야 할 미지계수, T_n 는 제1종 Chebyshev 다항식, $1/(1-\tau^2)^{1/2}$ 는 해당 가중함수이다.⁽²⁸⁾ 위의 급수전개는 식(11b)의 적합조건(compatibility condition)을 만족한다.

식(22)를 식(20)에 대입하면 적분방정식은 특이성이 제거된 아래의 형태로 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_b}{2n-1} \sin[(2n-1)\cos^{-1}\xi] + \frac{1}{2} U_{2n-2}(\xi) + D_n(\xi) \right\} a_n = -\frac{q_0}{\kappa_m} ; |\xi| < 1 \quad (23)$$

여기서, $\lambda_b \equiv h_c a / \kappa_m$ 는 균열면 부분 단열효과를 정량적으로 나타내는 무차원 Biot수(dimensionless Biot number),⁽²⁴⁾ U_n 은 제2종 Chebyshev 다항식⁽²⁸⁾ 그리고 함수 $D_n(\xi)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$D_n(\xi) = \frac{a}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{k(\xi, \tau) T_{2n-1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (24)$$

이어서, U_n 의 직교성(orthogonality)⁽²⁸⁾에 의하여, 식(23)은 미지계수 a_n 에 대한 선형 대수방정식으로 단순화시킬 수 있다.

$$\frac{\pi}{4} a_k + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn} a_n = \delta_k ; k=1, 2, \dots, \quad (25)$$

여기서, 상수 Y_{kn} 과 δ_k 는 아래와 같다.

$$Y_{kn} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\lambda_b}{2n-1} \sin[(2n-1)\cos^{-1}\xi] + D_n(\xi) \right\} U_{2k-2}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi \quad (26)$$

$$\delta_k = \begin{cases} -\frac{\pi q_0}{2\kappa_m} ; k=1 \\ 0 ; k \geq 2 \end{cases} \quad (27)$$

실제의 계산과정에서는, 식(22)의 급수로부터 처음의 N 개 항만을 취하여 $a_n, 1 \leq n \leq N$ 에 대한 N 개의 유한 선형 대수방정식이 구성된다. 이때 N 은 정확한 수렴해를 얻기위해 충분히 커야 한다. 식(25)의 해로서 $a_n, 1 \leq n \leq N$ 가 결정되면, 해당 열응력해석에 유용할 수 있도록 적층복합체 내부의 온도장을 결정하여야 한다. 이러한 온도장을 산출

하는 해석적 절차는 참고문헌(25)에서 찾을 수 있다.

4. 열응력해석

기저중간층을 균열면으로부터 위와 아래의 두 영역으로 분리하면(Fig. 1), 변위연속과 트랙션평형 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_k^- &= u_{k+1}^+, v_k^- = v_{k+1}^+, w_k^- = w_{k+1}^+ \\ & ; |x| < \infty, k=1, 3 \\ (\sigma_{zz})_k^- &= (\sigma_{zz})_{k+1}^+, (\tau_{xz})_k^- = (\tau_{xz})_{k+1}^+, \\ (\tau_{yz})_k^- &= (\tau_{yz})_{k+1}^+ ; |x| < \infty, k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (28)$$

또한 무한대에서의 유한해를 얻기위한 아래의 조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{zz})_1^+ &= 0, (\tau_{xz})_1^+ = 0, (\tau_{yz})_1^+ = 0 ; \sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty \\ (\sigma_{zz})_4^- &= 0, (\tau_{xz})_4^- = 0, (\tau_{yz})_4^- = 0 ; \sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (29)$$

비트랙션(traction-free) 균열을 포함하는 계면에서의 혼합 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_2^- &= u_3^+, v_2^- = v_3^+, w_2^- = w_3^+ ; a < |x| < \infty \\ (\sigma_{zz})_2^+ &= 0, (\tau_{xz})_2^+ = 0, (\tau_{yz})_2^+ = 0 ; |x| < a \end{aligned} \quad (30)$$

응력해석 혼합경계치문제의 해결을 위한 별도의 함수로, 균열면 변위의 도함수로 표시되는 보조함수들을 정의한다.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x} (w_2^- - w_3^+) ; |x| < \infty \\ \phi_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x} (u_2^- - u_3^+) ; |x| < \infty \\ \phi_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x} (v_2^- - v_3^+) ; |x| < \infty \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, 균열면 외부에서 변위의 연속성과 유일성을 보장하기 위한 적합조건은 다음과 같다.

$$\phi_k(x) = 0 ; a < |x| < \infty \quad (32a)$$

$$\int_{-a}^a \phi_k(x) dx = 0 ; k=1, 2, 3 \quad (32b)$$

이방성 반무한체에 대한 변위일반해는 식(29)의 정규조건과 함께 Fourier적분 변환기법에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-j1}^{\infty-j1} F_{kj} e^{(-1)^j |s| z_j} e^{-isx} ds$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\eta_1}{s} A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds \\
 v_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 F_{kj} L_j e^{(-1)^k |s| \lambda_j z - isx} ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\eta_2}{s} A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds \\
 w_k &= \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 i F_{kj} R_j e^{(-1)^k |s| \lambda_j z - isx} ds ds \\
 & + \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_3}{s} A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds
 \end{aligned}$$

; $k=1, 4$ (33)

여기서, $F_{kj}(s)$, $k=1, 4$, $j=1, 2, 3$ 는 미지함수, λ_j , $j=1, 2, 3$ 는 다음의 특성방정식(characteristic equation)의 양의 근이다.

$$\det D = 0 \tag{34}$$

여기서, $D(\lambda)$ 는 다음의 요소로 구성된 3×3 대칭 행렬이다.

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \tilde{C}_{55} \lambda^2 - \tilde{C}_{11}, & d_{12} &= d_{21} = \tilde{C}_{45} \lambda^2 - \tilde{C}_{16} \\
 d_{13} &= d_{31} = -i(\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_{55}) \lambda, & d_{22} &= \tilde{C}_{44} \lambda^2 - \tilde{C}_{66} \\
 d_{23} &= d_{32} = -i(\tilde{C}_{36} + \tilde{C}_{45}) \lambda, & d_{33} &= \tilde{C}_{33} \lambda^2 - \tilde{C}_{55}
 \end{aligned}$$

(35)

그리고 L_j , R_j , η_j , $j=1, 2, 3$ 는 아래의 재료상수이다.

$$\begin{aligned}
 L_j &= \frac{d_{12} d_{13} - d_{11} d_{23}}{d_{12} d_{23} - d_{22} d_{13}}, & R_j &= \frac{i(d_{12}^2 - d_{11} d_{22})}{d_{12} d_{23} - d_{22} d_{13}} \\
 \eta_1 &= \frac{(\beta_1 l_4 - \beta_6 l_2) + \eta_3 (l_3 l_4 - l_2 l_6)}{l_2^2 - l_1 l_4} \\
 \eta_2 &= \frac{(\beta_6 l_1 - \beta_1 l_2) + \eta_3 (l_1 l_6 - l_2 l_3)}{l_2^2 - l_1 l_4} \\
 \eta_3 &= \frac{\beta_1 (l_3 l_4 - l_2 l_6) + \beta_6 (l_1 l_6 - l_2 l_3) + \beta_3 \gamma (l_2^2 - l_1 l_4)}{l_6 (2 l_2 l_3 - l_1 l_6) + l_5 (l_2^2 - l_1 l_4) - l_3^2 l_4}
 \end{aligned}$$

(36)

이때 l_j , $j=1, 2, \dots, 6$ 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \tilde{C}_{55} \gamma^2 - \tilde{C}_{11}, & l_2 &= \tilde{C}_{45} \gamma^2 - \tilde{C}_{16} \\
 l_3 &= -(\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_{55}) \gamma, & l_4 &= \tilde{C}_{44} \gamma^2 - \tilde{C}_{66} \\
 l_5 &= \tilde{C}_{33} \gamma^2 - \tilde{C}_{55}, & l_6 &= -(\tilde{C}_{36} + \tilde{C}_{45}) \gamma
 \end{aligned}$$

(38)

트랙션 성분 σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} 에 대한 일반해는 해당 구성방정식⁽²⁴⁾으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{zz})_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 is (\tilde{C}_{33} \lambda_j R_j - \tilde{C}_{13} - \tilde{C}_{35} L_j) \cdot F_{kj} e^{(-1)^k |s| \lambda_j z - isx} ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{C}_{13} \eta_1 + \tilde{C}_{36} \eta_2 + \tilde{C}_{33} \eta_3 \gamma - \beta_3) A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds \\
 (\sigma_n)_k &= \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 s [\tilde{C}_{44} \lambda_j L_j + \tilde{C}_{55} (R_j + \lambda_j)] F_{kj} e^{(-1)^k |s| \lambda_j z - isx} ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i [\tilde{C}_{44} \eta_2 \gamma + \tilde{C}_{55} (\eta_1 \gamma - \eta_3)] A_k e^{(-1)^k |s| \gamma z - isx} ds \\
 & ; n=4, 5, k=1, 4 \tag{39}
 \end{aligned}$$

여기서, $\sigma_n(x, z)$, $n=4, 5$ 는 각각 τ_{yz} 와 τ_{xz} 를 의미한다.

등방성 기지중간층의 경우, 2개의 탄성강성계수만이 존재한다. 즉, $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 2\mu_m(1 - \nu_m) / (1 - 2\nu_m)$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 2\mu_m\nu_m / (1 - 2\nu_m)$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu_m = E_m / 2(\nu_m + 1)$. 그리고 열팽창계수는 $\alpha_m = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$ 이다. 여기서, μ_m , E_m , ν_m , α_m 는 각각 섬유강화 복합재료 기지상의 전단계수, 탄성계수, 푸아송비, 열팽창계수이다. 이때 특성방정식인 식(34)의 근은 단위크기의 중근이 되며, 해당 변위 및 트랙션 성분의 일반해는 아래와 같다.⁽²⁹⁾

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(H_{k1} + zH_{k2}) \cosh sz + (I_{k1} + zI_{k2}) \sinh sz] e^{-isx} ds \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \eta_m z (A_k \sinh sz + B_k \cosh sz) e^{-isx} ds \\
 v_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (H_{k3} \cosh sz + I_{k3} \sinh sz) e^{-isx} ds \\
 w_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \left[(H_{k1} + zH_{k2} - \frac{R_m}{s} I_{k2}) \sinh sz \right. \\
 & + \left. (I_{k1} + zI_{k2} - \frac{R_m}{s} H_{k2}) \cosh sz \right] e^{-isx} ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_m \left[\left(\frac{B_k}{s} + zA_k \right) \cosh sz \right. \\
 & + \left. \left(\frac{A_k}{s} + zB_k \right) \sinh sz \right] e^{-isx} ds ; k=2, 3
 \end{aligned}$$

(40a)

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{zz})_k &= \frac{\mu_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \{ [2s(H_{k1} + zH_{k2}) - (R_m + 1) I_{k2}] \cosh sz \\
 & + [2s(I_{k1} + zI_{k2}) - (R_m + 1) H_{k2}] \sinh sz \} e^{-isx} ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_m s z (A_k \sinh sz + B_k \cosh sz) e^{-isx} ds \\
 (\tau_{xz})_k &= \frac{\mu_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ [2s(I_{k1} + zI_{k2}) + (1 - R_m) H_{k2}] \cosh sz \\
 & + [2s(H_{k1} + zH_{k2}) + (1 - R_m) I_{k2}] \sinh sz \} e^{-isx} ds \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \beta_m [(sz A_k + B_k) \cosh sz + (sz B_k + A_k) \sinh sz] e^{-isx} ds \\
 (\tau_{yz})_k &= \frac{\mu_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s (H_{k3} \sinh sz + I_{k3} \cosh sz) e^{-isx} ds ; k=2, 3
 \end{aligned}$$

(40b)

여기서, $H_{kj}(s)$ 와 $I_{kj}(s)$, $k=2, 3$, $j=1, 2, 3$ 은 미지함수이고, 상수 η_m , β_m , R_m 은 다음과 같다.

$$\eta_m = \frac{\alpha_m}{2} \left(\frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m} \right)$$

$$\beta_m = \alpha_m \mu_m \left(\frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m} \right)$$

$$R_m = 3 - 4\nu_m \quad (41)$$

4.1 강성행렬방법

전체 4개층 적층체에 대하여 존재하는 총 18개의 미지수 (각 반무한체에 대한 3개의 미지함수 F_{kj} , $k=1, 4, j=1, 2, 3$ 그리고 지지점합층의 각 영역에 대한 6개의 미지수 $H_{kj}, I_{kj}, k=2, 3, j=1, 2, 3$)는 식(28)과 (31)로부터 보조함수 $\phi_k, k=1, 2, 3$ 의 항으로 구할 수 있다. 여기에 수반되는 수식 전개 과정의 복잡성을 극복하는 체계적 방법으로서, 강성행렬방법(stiffness matrix method)⁽²²⁾을 본 열탄성층간균열문제의 해석에 확대, 적용한다.

이를 위하여 \bar{d}_k 와 $\bar{\sigma}_k$ 를 각각 Fourier 영역(s, z)에서 k 번째 층의 변위와 트랙션을 포함하는 벡터로 표기하면

$$\bar{d}_k(s, z) = [-i\bar{w}_k \quad \bar{u}_k \quad \bar{v}_k]^T$$

$$\bar{\sigma}_k(s, z) = [-i(\bar{\sigma}_{zz})_k \quad (\bar{r}_{xz})_k \quad (\bar{r}_{yz})_k]^T \quad (42)$$

해당층의 위(+)/아래(-) 표면에서의 트랙션 $\bar{\sigma}_k^{\pm}(s)$ 은 동일 표면에서의 변위 $\bar{d}_k^{\pm}(s)$ 의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²²⁾

$$-\bar{\sigma}_1^- = K_{22}^{(1)} \bar{d}_1^- - \bar{r}_1^-$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_k^+ \\ -\bar{\sigma}_k^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} & K_{12}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} & K_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_k^+ \\ -\bar{d}_k^- \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{r}_k^+ \\ \bar{r}_k^- \end{Bmatrix}$$

; $k=2, 3$

$$\bar{\sigma}_4^+ = K_{11}^{(4)} \bar{d}_4^+ - \bar{r}_4^+ \quad (43)$$

여기서, $K_{ii}^{(k)}(s), i=1, 2, k=1, 4$ 는 이방성 반무한체의 대칭인 3×3 국부 강성행렬(local stiffness matrix), $K_{ij}^{(k)}(s), i, j=1, 2, k=2, 3$ 는 지지중간층의 대칭인 6×6 국부 강성행렬을 구성하는 3×3 소행렬(submatrices), 그리고 $\bar{r}_k^{\pm}(s), k=1, 2, 3, 4$ 는 열탄성효과를 포함하는 벡터이다.⁽²²⁾

또한 Fourier 변수 $|s|$ 에 대하여, 다음의 점근적 거동을 가짐을 알 수 있다.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{s} K_{ij}^{(k)}(s) = \begin{cases} K_{ij}^{(k)}(s) & ; i=j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad (44)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \bar{r}_k^{\pm}(s) = 0 ; k=1, 2, 3, 4 \quad (45)$$

여기서, $K_{ij}^{(k)}$ 는 영이 아닌 3×3 대칭소행렬이다.

이어서 완전 접착된 계면의 변위로서 $\bar{\delta}_k(s) \equiv \bar{d}_k^+(s) = \bar{d}_{k+1}^-(s), k=1, 3$ 를 정의하면, 균열을 포함하는 평면에서의 트랙션 평형조건은 다음과 같다.

$$K_{21}^{(2)} \bar{\delta}_1 + K_{22}^{(2)} \bar{d}_2^- + K_{11}^{(3)} \bar{d}_3^+ + K_{12}^{(3)} \bar{\delta}_3 = \bar{r}_2^- + \bar{r}_3^+ \quad (46)$$

여기서, 균열면 변위벡터의 차 $\Delta \bar{d}(s) \equiv \bar{d}_2^-(s) - \bar{d}_3^+(s)$ 는 식(31), (32a) 그리고 (42)로부터 보조함수의 항으로 표현될 수 있다.

$$\Delta \bar{d}(s) = \frac{i}{s} \int_{-a}^a \Phi(t) e^{isr} dt \quad (47)$$

이때 벡터 Φ 는 아래와 같다.

$$\Phi = [-i\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^T \quad (48)$$

상기의 식(46)에서 균열면 변위벡터 $\bar{d}_2^-(s)$ 와 $\bar{d}_3^+(s)$ 는 균열부재시 서로 연속인 계면변위 $\bar{\delta}_2(s)$ 와 균열의 존재로 인한 추가적 변형의 합으로 나타낼 수 있으므로, 식(44)와 (45)의 점근적 거동과 함께 식(46)과 (47)로부터, 이들 변위벡터는 아래와 같이 분리할 수 있다.^(20,21)

$$\bar{d}_2^- = \bar{\delta}_2 + L_{\infty} K_{11}^{(3)} \Delta \bar{d}$$

$$\bar{d}_3^+ = \bar{\delta}_2 - L_{\infty} K_{22}^{(2)} \Delta \bar{d} \quad (49)$$

여기서, L_{∞} 는 대칭인 3×3 의 상수행렬이다.

$$L_{\infty} = [K_{11}^{(3)} + K_{22}^{(2)}]^{-1} \quad (50)$$

식(28)과 (49)를 식(43)의 국부 강성행렬식에 적용하면, 층간균열이 있는 적층복합체에 대한 전체 강성행렬식(global stiffness matrix equation)을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1^- + \bar{r}_2^+ \\ \bar{r}_2^- + \bar{r}_3^+ \\ \bar{r}_3^- + \bar{r}_4^+ \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

여기서, $g_i(s), i=1, 2, 3$ 는 3단 벡터로서 다음과 같다.

$$g_1 = -K_{12}^{(2)} L_{\infty} K_{11}^{(3)} \Delta \bar{d}$$

$$g_2 = (K_{11}^{(3)} L_{\infty} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(2)} L_{\infty} K_{11}^{(3)}) \Delta \bar{d}$$

$$g_3 = K_{21}^{(3)} L_{\infty} K_{22}^{(2)} \Delta \bar{d} \quad (52)$$

위의 행렬식을 단축표기법으로 아래와 같이 나타낸다.

$$K \bar{\delta} = \bar{r} + g \quad (53)$$

여기서, $K(s)$ 는 대칭인 9×9 전체 강성행렬, $\bar{\delta}(s)$ 는 미지의 계면변위를 포함하는 9단 벡터, \bar{r}

(s)는 열하중을 포함하는 9단 벡터, $\mathbf{g}(s)$ 는 기저 중간층의 두께, 탄성물성치 그리고 균열면 변위차의 함수인 9단 벡터이다.

4.2 열응력 특이적분방정식

식(49)의 균열면 변위벡터를 식(43)에 대입하고 계면변위 δ 를 식(53)으로부터 결정하면, 균열이 존재하는 평면(z=0)에서의 트랙션 성분인 $\sigma_3^+(x)$ 는 역 Fourier 변환에 의해 다음의 형태로 구할 수 있다.

$$\sigma_3^+(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-a}^a \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \mathbf{M}(s) e^{is(t-x)} ds \right] \Phi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\mu}(s) e^{-isx} ds; |x| < \infty \quad (54)$$

여기서, $\mathbf{M}(s)$ 는 3×3 행렬 그리고 $\boldsymbol{\mu}(s)$ 는 3단의 가중벡터로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\mathbf{K}_{11}^{(3)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{22}^{(2)} + \mathbf{K}_{11}^{(3)} \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}_{12}^{(3)} \mathbf{H}_2 \quad (55) \\ \boldsymbol{\mu} &= -\bar{\mathbf{r}}_3^+ + \left[\mathbf{K}_{11}^{(3)} \sum_{k=1}^3 \mathbf{L}_{2k} + \mathbf{K}_{12}^{(3)} \sum_{k=1}^3 \mathbf{L}_{3k} \right] (\bar{\mathbf{r}}_k^- + \bar{\mathbf{r}}_{k+1}^+) \quad (56) \end{aligned}$$

이때 $L_{ij}(s)$, $i, j=1,2,3$ 는 $\mathbf{L}(s) \equiv \mathbf{K}^{-1}(s)$ 를 구성하는 3×3의 소행렬이고, $\mathbf{H}_n(s)$, $n=1,2$ 는 3×3 행렬로서 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n &= -\mathbf{L}_{(1+n)1} \mathbf{K}_{12}^{(2)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{11}^{(3)} \\ &+ \mathbf{L}_{(1+n)2} (\mathbf{K}_{11}^{(3)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{22}^{(2)} - \mathbf{K}_{22}^{(2)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{11}^{(3)}) \\ &+ \mathbf{L}_{(1+n)3} \mathbf{K}_{21}^{(3)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{22}^{(2)}; n=1,2 \quad (57) \end{aligned}$$

위의 행렬 $\mathbf{M}(s)$ 과 벡터 $\boldsymbol{\mu}(s)$ 는 식(44), (45), (57)로부터, 다음의 점근값을 가짐을 알 수 있다.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \mathbf{M}(s) = -\mathbf{K}_{11}^{(3)} \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{K}_{22}^{(2)} = -\text{sgn}(s) \begin{bmatrix} m_{11^-} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22^-} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33^-} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\mu}(s) = \mathbf{0} \quad (59)$$

여기서, 두번째와 세번째 층은 하나의 기저중간층을 형성하므로, 점근값 m_{ll^-} , $l=1,2,3$ 은 다음과 같이 얻어진다.

$$m_{11^-} = m_{22^-} = \frac{E_m}{4(1-\nu_m^2)}, \quad m_{33^-} = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \quad (60)$$

따라서 피적분함수 $s^{-1}\mathbf{M}(s)$ 의 $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 점근적 거동이 적분방정식(54)의 특이성을 유발함을 알 수 있다. 결국 식(54)로부터 특이부분을 분

리하면, 다음의 Cauchy형 제1종 특이적분방정식계가 유도된다.

$$\begin{aligned} &\frac{E_m}{4\pi(1-\nu_m^2)} \int_{-a}^a \frac{\phi_1(t)}{t-x} dt + \int_{-a}^a \sum_{n=1}^3 k_{1n}(x, t) \phi_n(t) dt = f_1(x); |x| < a \\ &\frac{E_m}{4\pi(1-\nu_m^2)} \int_{-a}^a \frac{\phi_2(t)}{t-x} dt + \int_{-a}^a \sum_{n=1}^3 k_{2n}(x, t) \phi_n(t) dt = f_2(x); |x| < a \\ &\frac{E_m}{4\pi(1-\nu_m)} \int_{-a}^a \frac{\phi_3(t)}{t-x} dt + \int_{-a}^a \sum_{n=1}^3 k_{3n}(x, t) \phi_n(t) dt = f_3(x); |x| < a \quad (61) \end{aligned}$$

여기서, $k_{ij}(x, t)$, $i, j=1,2,3$ 는 유한한 Fredholm 적분핵으로서 아래와 같다.

$$\begin{aligned} k_{ij}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{s} m_{ij}(s) + m_{ij^-} \right] \text{sins}(t-x) ds \\ &; (i, j) = (1,1), (2,2), (3,3) \\ k_{ij}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} m_{ij}(s) \text{sins}(t-x) ds \\ &; (i, j) = (2,3), (3,2) \\ k_{ij}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} m_{ij}(s) \text{coss}(t-x) ds \\ &; (i, j) = (1,2), (1,3) \\ k_{ij}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} m_{ij}(s) \text{coss}(t-x) ds \\ &; (i, j) = (2,1), (3,1) \quad (62) \end{aligned}$$

이때 $f_i(x)$, $i=1,2,3$ 는 열하중을 포함하는 가중항들이다.

$$f_i(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(s) e^{-isx} ds; i=1,2,3 \quad (63)$$

상기의 관계에서 $m_{ij}(s)$, $i, j=1,2,3$ 는 식(55)의 행렬 \mathbf{M} 의 요소, $\mu_i(s)$, $i=1,2,3$ 는 식(56)의 벡터의 요소를 나타낸다.

열전도해석과 마찬가지로 $\xi=x/a$ 과 $\tau=t/a$ 의 치환된 구간에서 보조함수 ϕ_k , $k=1,2,3$ 는 제1종 Chebyshev 다항식의 급수로 아래와 같이 전개하여 본 균열문제의 특이성을 보존할 수 있다.

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \\ \phi_3(\tau) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} b_n T_{2n-1}(\tau) \\ c_n T_{2n}(\tau) \\ d_n T_{2n}(\tau) \end{matrix} \right\}; |\tau| < 1 \quad (64)$$

여기서, b_n, c_n, d_n , $n \geq 1$ 는 결정해야 할 미지계수이다. 위의 급수는 식(32b)를 만족시킨다.

식(64)를 식(61)에 대입 후, 열전도문제에서 기

술된 절차에 따라 특이적분방정식계는 b_n, c_n, d_n 을 미지수로 하는 선형 대수방정식계로 전환시킬 수 있다. 즉,

$$\frac{\pi}{2} \begin{Bmatrix} m_{11}-b_k \\ m_{22}-c_k \\ m_{33}-d_k \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Y_{kn}^{11} & Y_{kn}^{12} & Y_{kn}^{13} \\ Y_{kn}^{21} & Y_{kn}^{22} & Y_{kn}^{23} \\ Y_{kn}^{31} & Y_{kn}^{32} & Y_{kn}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_k^1 \\ \delta_k^2 \\ \delta_k^3 \end{Bmatrix} ; k=1,2,\dots \quad (65)$$

여기서, 상수 Y_{kn}^{ij} 와 δ_k^i 는 다음과 같다.

$$Y_{kn}^{ij} = \int_{-1}^1 D_n^{ij}(\xi) U_{2k-2}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi ; (i, j) = (1,1), (1,2), (1,3)$$

$$Y_{kn}^{ij} = \int_{-1}^1 D_n^{ij}(\xi) U_{2k-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi ; (i, j) = (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \quad (66)$$

$$\delta_k^1 = \int_{-1}^1 f_1(\xi) U_{2k-2}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi$$

$$\delta_k^i = \int_{-1}^1 f_j(\xi) U_{2k-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi ; j=2,3 \quad (67)$$

이때 함수 $D_n^{ij}(\xi)$ 는 아래의 형태로 표현된다.

$$D_n^{ij}(\xi) = a \int_{-1}^1 \frac{k_{ij}(\xi, \tau) T_{2n-1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau ; (i, j) = (1,1), (2,1), (3,1)$$

$$D_n^{ij}(\xi) = a \int_{-1}^1 \frac{k_{ij}(\xi, \tau) T_{2n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau ; (i, j) = (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \quad (68)$$

식(64)에서도 처음의 N 개 항만을 취하여 미지계수 $b_n, c_n, d_n, 1 \leq n \leq N$ 에 대한 $3N$ 의 유한 선형 대수방정식을 구성하게 된다.

4.3 열응력세기계수

특이적분방정식계의 해로서 미지계수 값들이 식(65)로부터 결정되면 균열선단 $|\xi| > 1$ 에서의 특이 트랙선에 대한 지배적항들은 식(54)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$(\sigma_{zz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = \frac{E_m}{4(1-\nu_m^2)} \sum_{n=1}^N b_n S_{2n-1}(\xi) + O(1)$$

$$(\tau_{xz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = \frac{E_m}{4(1-\nu_m^2)} \sum_{n=1}^N c_n S_{2n}(\xi) + O(1)$$

$$(\tau_{yz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \sum_{n=1}^N d_n S_{2n}(\xi) + O(1)$$

$$; |\xi| > 1 \quad (69)$$

여기서, $O(\cdot)$ 는 고차항을 의미하며 $S_n(\xi)$ 은 아래와 같이 정의되는 특이함수이다.

$$S_n(\xi) = -\frac{[\xi - \text{sgn}(\xi)\sqrt{\xi^2-1}]^n}{\text{sgn}(\xi)\sqrt{\xi^2-1}} ; |\xi| > 1 \quad (70)$$

결국 균열첨단 열응력세기계수는 상기의 특이 열응력장으로부터 다음과 같이 산출할 수 있다.

$$K_I \equiv \lim_{|\xi| \rightarrow 1} \sqrt{\xi^2-1} (\sigma_{zz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = -\frac{E_m}{4(1-\nu_m^2)} \sum_{n=1}^N b_n$$

$$K_{II} \equiv \lim_{|\xi| \rightarrow 1} \sqrt{\xi^2-1} (\tau_{xz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = \mp \frac{E_m}{4(1-\nu_m^2)} \sum_{n=1}^N c_n$$

$$K_{III} \equiv \lim_{|\xi| \rightarrow 1} \sqrt{\xi^2-1} (\tau_{yz})_{\frac{1}{3}}^{\pm}(\xi) = \mp \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \sum_{n=1}^N d_n \quad (71)$$

여기서, K_I, K_{II} 및 K_{III} 는 각각 열림형 (in-plane normal mode I), 면내 전단형 (in-plane shear mode II) 및 면외 전단형 (anti-plane shear mode III) 응력세기계수이며 \mp 부호는 자기 오른쪽 그리고 왼쪽 균열첨단에서의 값들을 의미한다.

5. 결과 및 고찰

본 논문의 수치결과를 산출하기 위하여 다음의 섬유와 기지 열탄성 물성치⁽³⁰⁾를 가지는 섬유강화 복합재료를 선정하였다.

섬유 (T300 graphite fibers)

$$E_{f1} = 220.6 \text{ GPa}, \nu_{f1} = 0.2, \mu_{f1} = 8.9 \text{ GPa}$$

$$\kappa_{f1} = 84 \text{ W/m.K}, \alpha_{f1} = -0.98 \times 10^{-6} \text{ cm/cm/K}$$

$$E_{f2} = 13.8 \text{ GPa}, \nu_{f2} = 0.25, \mu_{f2} = 4.8 \text{ GPa}$$

$$\kappa_{f2} = 8.4 \text{ W/m.K}, \alpha_{f2} = 10 \times 10^{-6} \text{ cm/cm/K}$$

기지 (epoxy matrix) :

$$E_m = 3.45 \text{ GPa}, \nu_m = 0.35, \mu_m = 1.28 \text{ GPa}$$

$$\kappa_m = 0.18 \text{ W/m.K}, \alpha_m = 64.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm/K}$$

여기서, 하첨자 $f1$ 과 $f2$ 는 섬유상 (fiber phase)의 길이 (longitudinal) 및 횡 (transverse) 방향을 가리킨다.

섬유강화 복합재료의 거동을 균질, 이방성이라고 가정하면, 1-2-3 재료좌표계에서의 유효 열탄성 물성치는 미시역학공식 (micromechanics equation)⁽³⁰⁾으로부터 섬유부피율 $V_f = 0.5$ 에 대하여 아래와 같이 얻어진다.

$$C_{11} = 114 \text{ GPa}, C_{12} = C_{13} = 3.3 \text{ GPa},$$

$$C_{22} = C_{33} = 8.7 \text{ GPa}, C_{23} = 3.4 \text{ GPa},$$

$$C_{44}=2.7 \text{ GPa}, C_{55}=C_{66}=3.2 \text{ GPa}$$

$$\kappa_{11}=42.1 \text{ W/m.K}, \kappa_{22}=\kappa_{33}=0.466 \text{ W/m.K},$$

$$\alpha_{11}=0.025 \times 10^{-6} \text{ cm/cm/K}$$

$$\alpha_{22}=\alpha_{33}=32.4 \times 10^{-6} \text{ cm/cm/K}$$

여기서, 섬유각도 $\theta_i, i=1,2$ 의 변화에 대한 x-y-z 좌표계에서의 열탄성 물성치는 변환공식⁽¹⁸⁾으로부터 얻어진다.

식(24)와 (26) 등과 같은 적분항들은 Gauss-Chebyshev 수치적분공식⁽²⁸⁾ 그리고 식(21) 등과 같이 무한구간을 포함하는 적분항들은 Gauss-Legendre 수치적분 공식⁽²⁸⁾에 의해 계산하였다. 이때 식(22)와 (64)의 Chebyshev 다항식 급수는 12항까지 전개하여 주어진 물성치와 기하학적 조건에 대해 수렴해를 얻을 수 있었다.

이어서 각종 물리적 변수들에 대한 층간균열의 열탄성학적 거동을 검토하기 위하여 적층순서 $[\theta_1/\theta_2]$, 균열의 상대적 크기 h/a 및 위치 $h_1/2h$, 균열면 부분단열조건 $\lambda_b \equiv h_c a / \kappa_m$ 그리고 섬유부피율 V_f 등의 변화가 열응력세기계수에 미치는 영향을 기술한다. 결과로서 혼합형 열응력세기계수는 오른쪽 균열첨단에서 산출하였으며 다음의 값으로 무차원화 하였다.⁽³¹⁾

$$K_m = \frac{q_0 a^{3/2} \alpha_m E_m}{4(1-\nu_m) \kappa_m} \quad (72)$$

여기서, K_m 은 등방성 기지의 무한평판내 완전단열

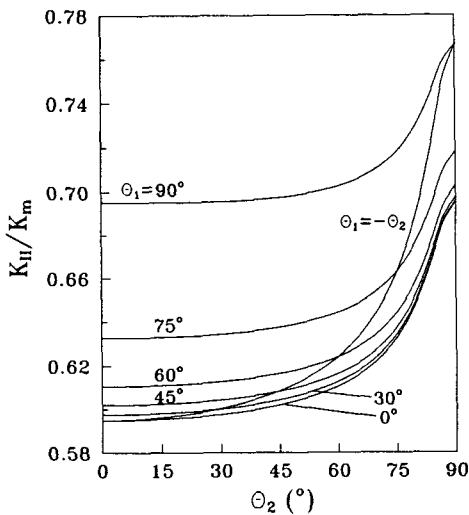


Fig. 2 Variation of thermal stress intensity factor K_{II} in a $[\theta_1/\theta_2]$ composite for $h/a=1, h_1/h_2=1, \lambda_b=0$, and $V_f=0.5$

균열에 대한 면내 전단형 열응력세기계수이다.

적층순서와 섬유각도 $[\theta_1/\theta_2]$ 의 영향을 검토하기 위하여 균열면 완전단열조건 $\lambda_b=0$ 하에서 $h/a=1, h_1/2h=0.5, V_f=0.5$ 에 대한 열응력세기계수를 Figs. 2~4에 보이고 있다. 부과된 열하중에 대한 주 열응력세기계수(major thermal stress intensity factor)로서, Fig. 2의 면내 전단형 열응력세기계수

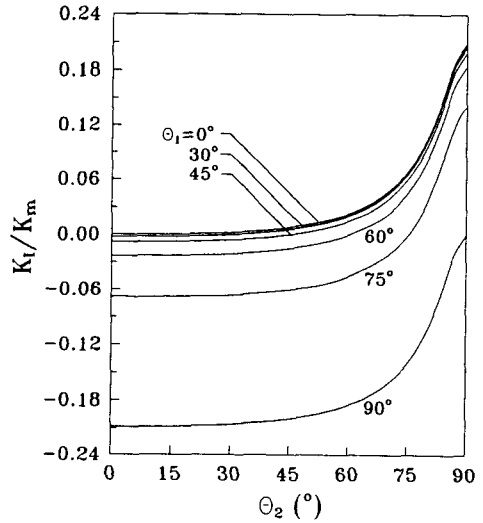


Fig. 3 Variation of thermal stress intensity factor K_I in a $[\theta_1/\theta_2]$ composite for $h/a=1, h_1/h_2=1, \lambda_b=0$, and $V_f=0.5$

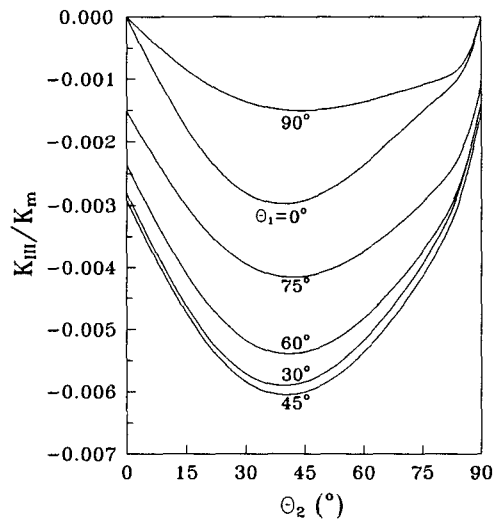


Fig. 4 Variation of thermal stress intensity factor K_{III} in a $[\theta_1/\theta_2]$ composite for $h/a=1, h_1/h_2=1, \lambda_b=0$, and $V_f=0.5$

K_{II} 는 하단(θ_2) 및 상단(θ_1)의 섬유각도 증가에 따라 단조로이 증가함을 보인다. 이는 $\theta_i, i=1,2$ 의 값이 커질수록 복합재의 x 방향 강성감소와 같은 방향 열팽창계수 증가에 주로 기인하는 것으로 해석된다.

Fig. 3과 Fig. 4는 각각 섬유강화 적층복합재료의 이방성 및 인접 구성층간의 물성치 불일치

(property mismatch) 로 인한 부수적 열응력세기 계수(coupling thermal stress intensity factor) K_I 과 K_{III} 값들을 나타내고 있다. 이들 그림에서 $[\theta]_2$ 의 단방향(unidirectional) 적층순서에 대해서 열림형 열응력세기계수 K_I 은 발생하지 않음을 알 수 있고, $[0^\circ]_2$ 혹은 $[90^\circ]_2$ 의 직교이방성(orthotropic) 그리고 $[0^\circ/90^\circ]$ 혹은 $[90^\circ/0^\circ]$ 의 Cross-ply 적층순

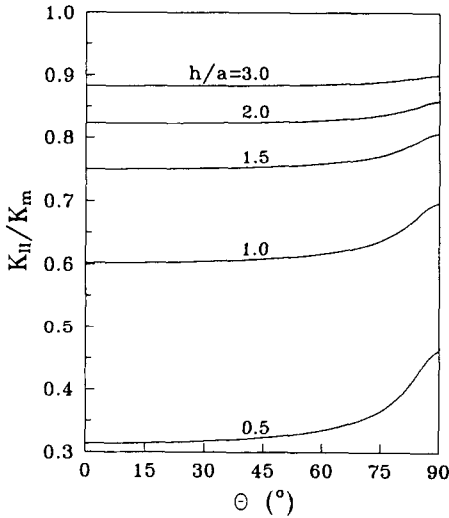


Fig. 5 Effect of relative crack size h/a on thermal stress intensity factor K_{II} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h_1/h_2=1, \lambda_b=0,$ and $V_f=0.5$

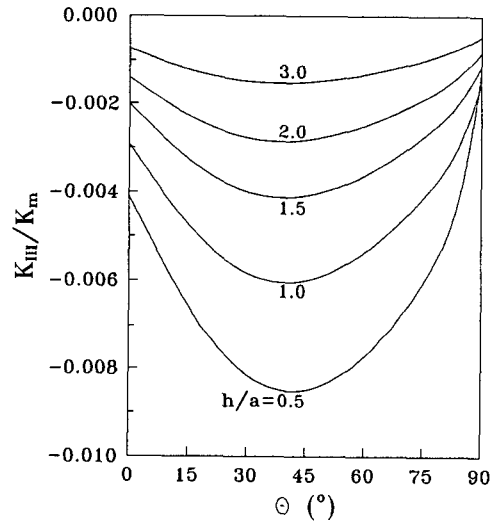


Fig. 7 Effect of relative crack size h/a on thermal stress intensity factor K_{III} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h_1/h_2=1, \lambda_b=0,$ and $V_f=0.5$

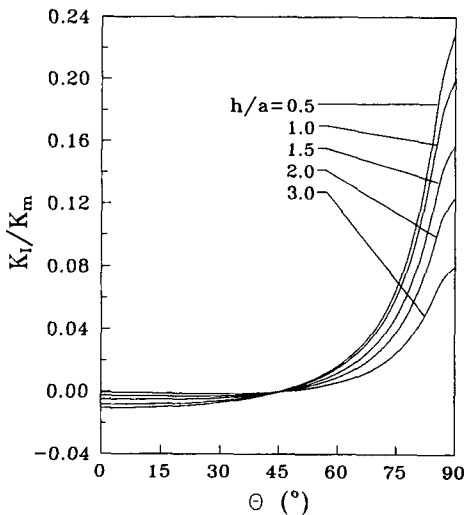


Fig. 6 Effect of relative crack size h/a on thermal stress intensity factor K_I in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h_1/h_2=1, \lambda_b=0,$ and $V_f=0.5$

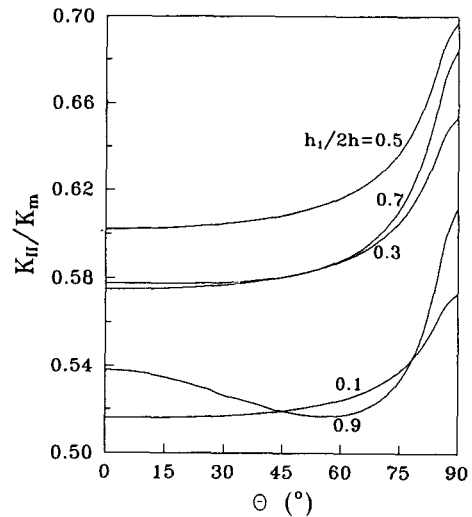


Fig. 8 Effect of relative crack location $h_1/2h$ on thermal stress intensity factor K_{II} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1, \lambda_b=0,$ and $V_f=0.5$

서에 대해서는 면의 전단형 열응력세기계수 K_{III} 가 발생하지 않음을 알 수 있다. 또한 $[\pm\theta]$ 의 angle-ply 적층체의 경우 K_{II} 만이 발생함을 보인다.

특히 Fig. 3에서 주목할 것은 응력세기계수 K_I 의 부호는 적층순서와 섬유방향에 따라 변화함을 나타낸다. 이때 음의 K_I 값은 균열닫힘(crack closure) 현상을 의미하므로 영으로 간주할 수도 있고, 한편으로는 비마찰 열림형 균열모델(frictionless, open crack model)이라는 초기의 목시적 가정을 위배할 수도 있다. 그러나 실제의 일반적 하중상태에서 충분히 큰 인장하중이 작용하는 경우, 중첩된 K_I 값은 양의 값을 줄 수 있으므로 상기의 음의 K_I 은 나름대로의 물리적 의미를 지니고 있다. Fig. 4의 응력세기계수 K_{III} 는 $\theta_i, i=1,2$ 의 변화에 대하여 단조롭지 못한 경향을 준다. 그러나 해당 크기는 K_{II} 그리고 K_I 과 비교하여 매우 작음을 알 수 있다.

균열의 상대적 크기 h/a 와 열응력세기계수 사이의 관계는 Figs. 5~7에 보이고 있다. 이때 균열은 $[45^\circ/\theta]$ 복합적층체의 기지중간층 중심면 $h_1/2h=0.5$ 에 완전단열조건 $\lambda_b=0$ 으로 위치시켰고 섬유부피율은 $V_f=0.5$ 로 하였다. Fig. 5에서 주 열응력세기계수 K_{II} 는 식(72)의 K_m 을 상한값으로 하여 h/a 에 비례하여 증가함을 나타낸다. 이는 열하중하에

서 h/a 의 증가에 따라 강성이 상대적으로 큰 위/아래 섬유강화층의 균열진전에 대한 억제효과가 완화되어 파괴저항이 감소함을 의미한다. 반면에, 부수적 열응력세기계수 K_I 과 K_{III} 는 각기 Fig. 6과 Fig. 7에서 h/a 에 대하여 반대의 경향을 보인다.

기지중간층 내부에서 균열위치 $h_1/2h$ 의 변화에

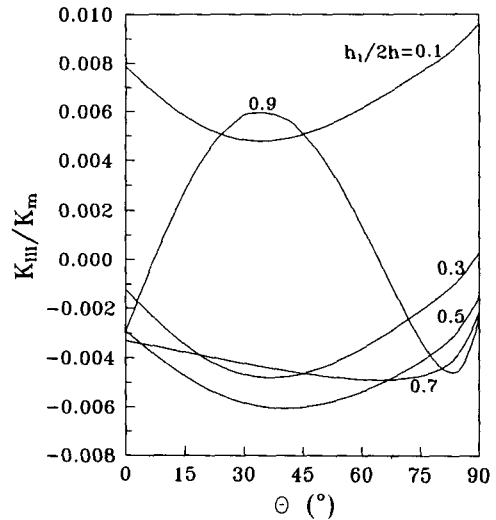


Fig. 10 Effect of relative crack location $h_1/2h$ on thermal stress intensity factor K_{III} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1, \lambda_b=0$, and $V_f=0.5$

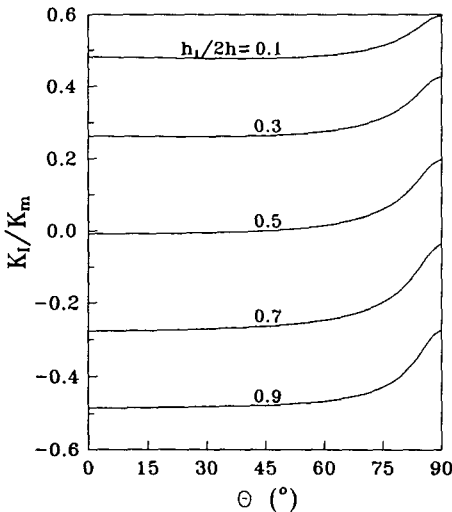


Fig. 9 Effect of relative crack location $h_1/2h$ on thermal stress intensity factor K_I in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1, \lambda_b=0$, and $V_f=0.5$

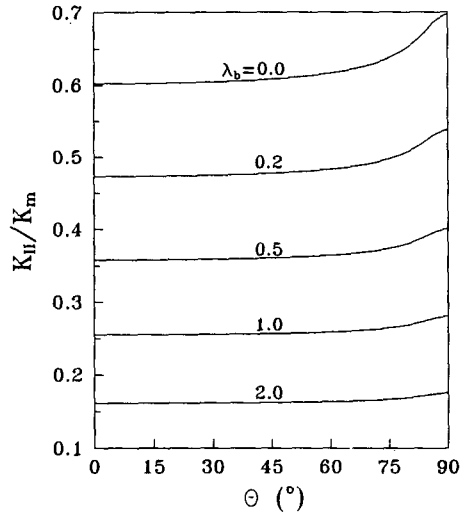


Fig. 11 Effect of crack surface partial insulation λ_b on thermal stress intensity factor K_{II} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1, h_1/h_2=1$, and $V_f=0.5$

다른 영향을 설명하기 위하여, $[45^\circ/\theta]$ 의 복합적층체에서 $h/a=1$, $\lambda_b=0$, $V_f=0.5$ 등으로 기타 조건들을 고정시켰다. 해당 열응력세기계수의 변화는 Figs. 8~10에 제시하였다. Fig. 8의 주 열응력세기계수 K_{II} 최대치는 기지중간층 중심면인 $h_1/2h=0.5$ 에 균열이 위치한 경우 발생하며, 균열이 반무

한 이방체와의 계면에 접근할수록 감소함을 보인다. 또한 섬유각도의 확연한 영향이 $h_1/2h=0.9$ 일 때 관찰된다. 그러나 Fig. 9의 부수적 열응력세기계수 K_I 은 기지중간층 중심면에서 균열이 벗어날수록 크기가 증대함을 알 수 있다. Fig. 10에서의 K_{III} 는 균열위치의 변화에 대하여 이전의 결과처럼 일관성있는 경향을 주지 않으나, $h_1/2h=0.9$ 일 때 섬유각도에 역시 많은 영향을 받음을 알 수 있다.

여기서 언급할 것은 균열의 기하학적 조건으로서 $h_1/2h=0$ 혹은 1 그리고 $h/a=0$ 일 경우 식 (61)의 적분방정식계는 제1종에서 제2종으로 변환되며, 이때의 균열첨단 열응력장은 진동특이성을 수반함을 보일 수 있다. 이러한 이상적 계면균열문제는 해당 열응력세기계수가 다른 형태로 정의되는 다른 부류의 문제로 간주되므로^(11~13) 본 논문에서는 고려되지 않는다.

부분단열 균열면조건이 균열선단 특이 열응력장에 미치는 영향을 검토하기 위하여, 무차원 Biot수 $\lambda_b \geq 0$ 에 대한 열응력세기계수 변화를 Figs. 11~13에서 보이고 있다. 이때 $[45^\circ/\theta]$ 의 복합적층체에서 $h/a=1$, $h_1/2h=0.5$ 그리고 $V_f=0.5$ 로 하였다. 이들 그림에서, λ_b 값에 비례하여 균열면 사이의 열유동이 증대함에 따라 해당 열응력세기계수의 크기는 완전 단열조건($\lambda_b=0$)에서 보다 저하되는 추세를 보인다. 이러한 현상은 균열면 부분단열로 인한

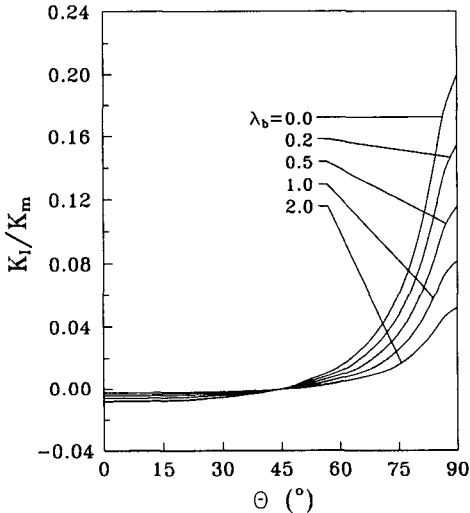


Fig. 12 Effect of crack surface partial insulation λ_b on thermal stress intensity factor K_I in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1$, $h_1/h_2=1$, and $V_f=0.5$

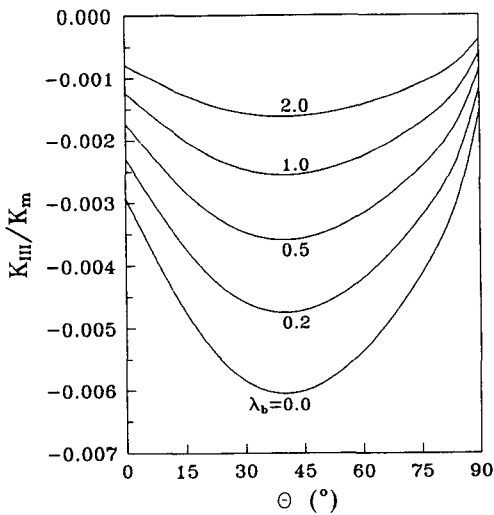


Fig. 13 Effect of crack surface partial insulation λ_b on thermal stress intensity factor K_{III} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1$, $h_1/h_2=1$, and $V_f=0.5$

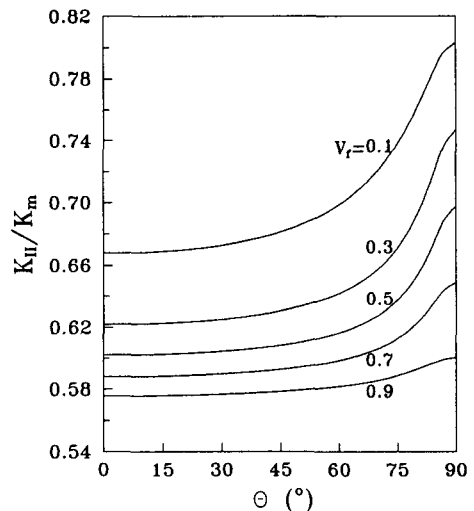


Fig. 14 Effect of fiber volume fraction V_f on thermal stress intensity factor K_{II} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1$, $h_1/h_2=1$, and $\lambda_b=0$

여 균열주위 온도장 교란이 완화되기 때문이다. 따라서 파괴역학적인 설계치를 선정하는 경우, 완전 단열 균열로 가정하는 것이 부분단열 균열로 가정하는 것보다 보수적인 결과를 준다.

섬유부피율 V_f 의 변화와 열응력세기계수와와의 상관관계는 Figs. 14~16에서 보이고 있다. 이때도 적층순서는 $[45^\circ/\theta]$ 로 하였고 완전단열 균열 $\lambda_b=0$ 에 대한 기타 조건은 $h/a=1$ 과 $h_1/2h=0.5$ 로 하였

다. 결과로서, 섬유부피율이 증가함에 따라 세가지 모드의 열응력세기계수 크기가 공통적으로 감소하는 경향을 나타낸다. 이러한 균열첨단에서의 거동은 섬유부피율에 비례하여 섬유강화 복합체의 강성과 열전도계수의 증가 그리고 열팽창계수의 감소에 주로 기인하는 것으로 해석된다.

6. 결 론

섬유강화 적층복합재료의 기지층분영역에 존재하는 층간균열의 열탄성학적 거동을 연구하기 위하여, 균열 열유동하에 있는 이종이방성 반무한체가 균열이 있는 기지층간층을 매개로 하여 접합된 모델을 제시하였다. 상기의 혼합 경계치문제에 대한 특이적분방정식계를 유도하여, 적층순서, 섬유각도, 균열의 상대적 크기 및 위치, 균열면 부분단열 조건, 섬유부피율 등의 물리적 변수들이 혼합형 열응력세기계수에 미치는 영향을 검토하였다. 이러한 연구를 통하여 다음의 주요 결론을 얻었다.

(1) 혼합형 열응력세기계수 K_i , $i=I, II, III$ 는 적층순서와 섬유각도의 변화에 많은 영향을 받음을 보였다. 특히 섬유각도가 증가함에 따라 주 열응력세기계수 K_{II} 는 증가하는 현상을 나타내었다.

(2) 층간균열의 상대적 크기 h/a 에 비례하여 주 열응력세기계수 K_{II} 는 등방성 기지의 무한평판 열응력세기계수인 K_m 를 상한값으로 하여 증가하나, 부수적 열응력세기계수인 K_I 과 K_{III} 는 감소하는 경향을 주었다.

(3) 층간균열의 상대적 위치가 기지층간층의 중심면으로 접근할수록, 주 열응력세기계수 K_{II} 는 증가하나, 부수적 열응력세기계수인 K_I 과 K_{III} 는 감소하였다.

(4) 균열면 부분단열 조건하의 혼합형 열응력세기계수 크기는 균열면 완전단열 조건하에서의 크기보다 저하되는 결과를 얻었다.

(5) 섬유부피율 증가로 인한 유효 열탄성 물성치의 변화는 혼합형 열응력세기계수의 크기를 감소시키는 결과를 주었다.

참고문헌

(1) Atkinson, C and Clements, D. L., 1977, "On Some Crack Problems in Anisotropic Thermoelasticity," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 13,

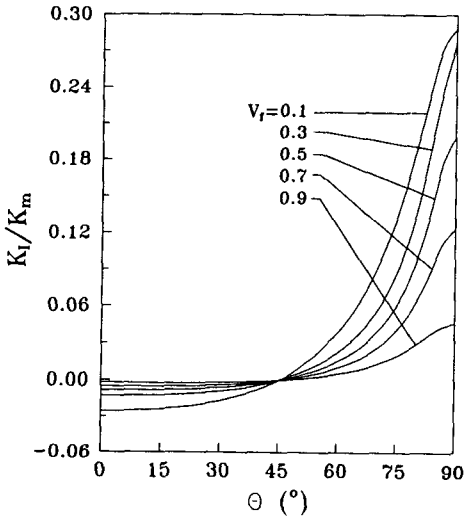


Fig. 15 Effect of fiber volume fraction V_f on thermal stress intensity factor K_I in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1$, $h_1/h_2=1$, and $\lambda_b=0$

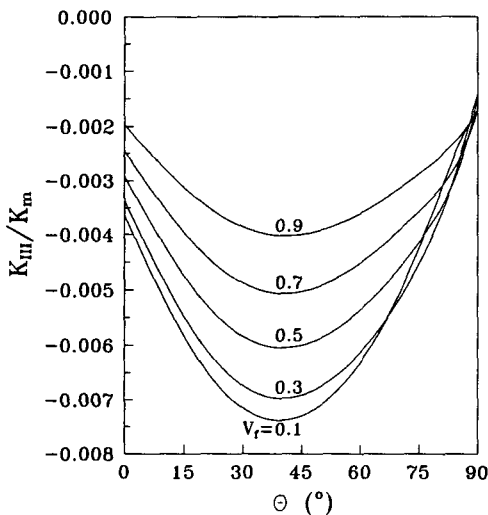


Fig. 16 Effect of fiber volume fraction V_f on thermal stress intensity factor K_{III} in a $[45^\circ/\theta]$ composite laminate for $h/a=1$, $h_1/h_2=1$, and $\lambda_b=0$

- pp. 855~864.
- (2) Wu, C. H., 1984, "Plane Anisotropic Thermoelasticity," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 724~726.
- (3) Sturla, F. A. and Barber, J. R., 1988, "Thermal Stresses Due to a Plane Crack in General Anisotropic Material," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 372~376.
- (4) Kerr, G., Melrose, G., and Tweed, J., 1992, "The Disturbance of a Uniform Heat Flow by a Line Crack in an Infinite Anisotropic Thermoelastic Solid," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 30, pp. 1301~1313.
- (5) Choi, H. J. and Thangjitham, S., 1992, "Singular Crack-Tip Response in an Anisotropic Medium," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 43, pp. 487~500.
- (6) Thangjitham, S. and Choi, H. J., 1993, "Thermal Stress Singularities in an Anisotropic Slab Containing a Crack", *Mech. of Mater.*, Vol. 14, pp. 223~238.
- (7) Chao, C. K. and Chang, R. C., 1992, "Crack Trajectories Influenced by Mechanical and Thermal Disturbance in Anisotropic Materials," *Theoret. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 17, pp. 177~187.
- (8) Kuo, A.-Y., 1990, "Interface Crack Between Two Dissimilar Half Spaces Subjected to a Uniform Heat Flow at Infinity-Open Crack," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 359-364.
- (9) Lee, K. Y. and Shul, C. W., 1991, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for the Interface Crack Between Dissimilar Materials Under the Uniform Heat Flow," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 40, pp. 1067~1074.
- (10) Meyer, M. and Schmauder, S., 1992, "Thermal Stress Intensity Factors of Interface Cracks in Bimaterials," *Int. J. Fract.*, Vol. 57, pp. 381~388.
- (11) Clements, D. L., 1983, "A Thermoelastic Problem for a Crack Between Dissimilar Anisotropic Media," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 19, pp. 121~130.
- (12) Hwu, C., 1992, "Thermoelastic Interface Crack Problems in Dissimilar Anisotropic Media," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 29, pp. 2077~2090.
- (13) Yan, G. and Ting, T. C. T., 1993, "The $r^{-\frac{1}{2}}$ (lnr) Singularities at Interface Cracks in Monoclinic and Isotropic Bimaterials Due to Heat Flow," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 60, pp. 432~437.
- (14) Rice, J. R., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 98~103.
- (15) Comninou, M., 1977, "The Interface Crack," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 631~636.
- (16) Martin-Moran, C. J., Barber, J. R., and Comninou, M., 1983, "The Penny-Shaped Interface Crack With Heat Flow : Part 1 Perfect Contact," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 29~36.
- (17) Wang, S. S. and Wang, H. T., 1979, "Interlaminar Crack Growth in Fiber Reinforced Composites During Fatigue," *ASME J. Engng. Mater. Tech.*, Vol. 101, pp. 34~41.
- (18) Jones, R. M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere Pub., New York.
- (19) Wang, S. S., 1980, "An Analysis of Delamination in Angle-Ply Fiber-Reinforced Composites," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 64-70.
- (20) Choi, H. J., 1994, "Stress Singularities in Dissimilar Orthotropic Composites Containing an Interlaminar Crack," *KSME Journal*, Vol. 8, No. 1, pp. 52~62.
- (21) Choi, H. J. and Thangjitham, S., 1994, "The Interlaminar Crack-Tip Response in a Fiber-Reinforced Composite Laminate," *Int. J. Fract.*, (in press).
- (22) Thangjitham, S. and Choi, H. J. 1991, "Thermal Stresses in a Multilayered Anisotropic Medium," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 58, pp. 1021-1027.
- (23) Lekhnitskii, S. G., 1981, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Pub., Moscow.
- (24) Nowinski, J. L., 1978, *Theory of Thermoelasticity with Applications*, Noordhoff, The Netherlands.
- (25) Choi, H. J. and Thangjitham, S., 1991, "Heat

- Conduction in Laminated Anisotropic Composites with a Debonding," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 29, pp. 819~829.
- (26) Muskhelishvili, N. I., 1958, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, The Netherlands.
- (27) Erdogan, F., 1977, "Mixed Boundary-Value Problems in Mechanics," *Mechanics Today*, edited by S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, New York, Vol. 4, pp. 1~86.
- (28) Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Eds., 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- (29) Choi, H. J. and Thangjithams, S., 1992, "Thermally-Induced Local Effects in Laminated Composites," *J. Therm. Stresses*, Vol. 15, pp. 311~327.
- (30) Chamis, C. C., 1984, *Simplified Composite Micromechanics Equations for Hygral, Thermal, and Mechanical Properties*, SAMPE Quarterly, April, pp. 14~23.
- (31) Sih, G. C., 1962, "On the Singular Character of Thermal Stresses Near a Crack Tip," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 587~589.