

〈論 文〉

# 유한체적법과 유한요소법을 이용한 응고과정에서의 열응력해석

이진호\* · 황기영\*\*

(1993년 11월 12일 접수)

## Analysis of Thermal Stresses During Solidification Process Using FVM/FEM Techniques

Jinho Lee and Ki Young Hwang

**Key Words :** Finite Volume Method(유한체적법), Finite Element Method(유한요소법), Solidification(응고), Thermal Stress(열응력), Stress Relaxation(응력이완), Inelastic Strain Rate(비탄성 변형도율)

### Abstract

An attempt is made to develop a kind of hybrid numerical method for computations of the thermal stresses during a solidification process. In this algorithm, the phase-change heat transfer analysis is performed by a finite volume method(FVM) and the thermal stress analysis in a solidifying body by a finite element method(FEM). The temperatures at the grid points calculated in the heat transfer analysis are transferred to those of gauss points in elements by a bi-cubic surface patch technique for the thermal stress analysis. A hyperbolic-sine constitutive law is used to prescribe the inelastic strain rate of material. Results for the unidirectional solidification process of a pure aluminum are compared with those of others and shows good agreement.

### 1. 서 론

금속의 응고시 온도변화에 의해 발생된 금속내부의 열응력은 최종제품의 성능에 영향을 줄 수 있는 잔류응력을 남기거나 크랙을 발생시킬 수 있으며 이는 제품의 중요한 결함중의 하나가 된다.<sup>(1)</sup> 따라서 응고된 물체내의 온도분포와 그로 인한 열응력의 예측은 실제 주조와 같은 공정에서 매우 중요하며 응고된 물체의 양호한 품질을 얻기 위해서는 응고중인 물체의 열 및 기계적 거동에 대한 상세한 이해가 필수적이다.

응고시 열응력해석은 일반적으로 소성변형이 크게 발생하는 롤주조(roll casting)를 제외하고는 소성

변형으로 야기된 열이 고상영역의 온도분포에 거의 영향을 미치지 못한다는 가정하에 상변화 열전달해석과 열응력해석을 순차적으로 실시한다.<sup>(2)</sup> 상변화 열전달에 관한 연구는 1860년에 최초로 Neumann이 1차원 순수 열전도문제에 대한 해석적 해를 구한 이후 실제조건에 근접한 복잡한 문제를 다루기 위한 많은 수치해석방법의 개발과 실험을 통하여 상당한 연구가 진행되었다.<sup>(3)</sup> 그러나 열응력에 대한 연구는 상당히 제한적이었는데 이는 고온상태에서 응고하는 물체는 크리프(creep)이나 점소성(viscoplastic) 거동을 나타내므로 수치해석시 이러한 현상이 충분히 고려되어야 할 뿐 아니라 열전달해석이 선행된 후에 열응력해석을 할 수 있기 때문이다.<sup>(4)</sup>

열응력에 관한 연구는 1963년에 Weiner 등<sup>(5)</sup>이 온도의존 항복응력과 온도비의존 탄성계수로 구성

\*정회원, 연세대학교 기계공학과

\*\*정회원, 국방과학연구소

된 탄성-완전소성모델을 이용하여 1차원 문제에 대한 열응력의 해석해를 구함으로써 시작되었으며 Richmond 등<sup>(6)</sup>은 크리프효과를 고려한 점탄성모델을 이용하여 섭동법(perturbation method)으로 근사해를 구하였다. 그러나 고온상태에서 크리프이나 점소성거동으로 인한 응력과 변형률의 복잡한 관계식, 기계적 성질의 온도의존성, 실제문제의 기하학적 형상 및 경계조건의 복잡성 등으로 인하여 수치해석방법을 많이 이용한다. Williams 등<sup>(7)</sup>은 항복응력을 초과했을 때 크리프효과를 고려하는 Perzyna<sup>(8)</sup>가 제시한 탄성-점소성 모델을 이용하여 연속주조시 발생하는 열응력을 수치해석하였으며, Thomas 등<sup>(4)</sup>은 탄소강의 소성 변형도율에 대하여 Wray<sup>(9)</sup>가 제시한 실험식을 사용하여 사각형 인고트를 2차원 평면응력 문제로 수치해석하였다.

상변화 열전달 및 열응력의 수치해석은 그동안 여러가지 수치해석방법을 이용하였다.<sup>(2,3)</sup> 특히 상변화 열전달해석은 열유체분야의 연구가들에 의해 주로 연구되었으며 액상의 유동을 고려할 때 운동량방정식과 에너지방정식(합금의 경우 물질보존방정식도)이 서로 연관(coupling) 되어 있고 비선형이기 때문에 수치해석상의 효율성(전산기억량, 프로그래밍화, 수렴성 등) 및 복잡한 기하학적 형상에서 격자생성을 쉽게 할 수 있는 경계밀착좌표계(boundary-fitted coordinate)를 이용한 격자생성법이 개발됨으로써 주로 유한차분법 또는 유한체적법<sup>(10)</sup>을 사용하였다. 그러나 열응력해석은 고체역학분야의 연구가들에 의해 주로 연구되었으며 복잡한 해석영역을 삼각형 및 사각형 요소를 사용하여 격자생성을 용이하게 하고 고차 형상함수(higher-order shape function)를 사용할 수 있으며 또한 크리프 및 점소성구성모델의 적용용이성 등으로 인하여 유한요소법을 이용하였다.

본 연구에서는 상기 수치해석방법들의 장점을 각각 이용하기 위해 두 가지 방법을 동시에 사용한 복합적 해석방법을 개발하고자 하며 이를 위해 우선 유한체적법을 이용한 상변화 열전달해석으로 상변화면 위치와 온도장을 계산하고 순수 알루미늄의 비탄성 변형도율은 Sample<sup>(11)</sup>이 제시한 실험식인 Hyperbolic-sine constitutive law를 사용하며 유한요소법으로 고상영역 내의 열응력을 계산하였다. 열응력해석시 Gauss 적분점에서 온도값은 상변화 열전달해석에서 구한 온도장을 이용하여 Bi-cubic surface patch기법<sup>(12)</sup>으로 구하였다. 본 수치해석방

법의 타당성은 기존 연구결과와 비교하여 입증하였다.

## 2. 상변화 열전달해석

### 2.1 해석모델

본 연구에서 해석모델은 Fig. 1과 같은 넓이(L) 1 cm, 높이(H) 25 cm인 2차원 직사각형 용융체에 대한 응고문제로서 이는 Heinlein 등<sup>(13)</sup>과 Ruan<sup>(14)</sup>이 해석한 모델과 동일하다. 모델의 좌 우면과 상부면은 단열상태이고 하부면은 용융온도인  $T_f$ 로부터 대기온도(정상상태온도)인  $T_c$ 까지 식(3)에 따라 냉각된다. 상변화물질로는 일정한 온도  $T_s$ , 즉 응고점에서 상변화가 일어나는 순수 알루미늄을 택하였다.

### 2.2 기본방정식 및 경계조건

본 해석문제는 일방향응고 특성을 지니고 있지만 본 해석기법의 2차원 문제해석 가능성 판단을 위해 2차원 문제로 해석하였다. 본 연구에서 열역학적 물성치는 온도에 상관없이 일정하고, 액상은 초기의 상변화온도로 유지되고 있으므로 액상영역 내부의 자연대류유동은 무시하며 또한 에너지방정식에서 점성소산은 그 영향이 작아서 무시할 수 있다고 가정한다. 따라서 2차원 비정상상태에서의 고상의 에너지방정식과 상변화면에서의 에너지 균형식은 각

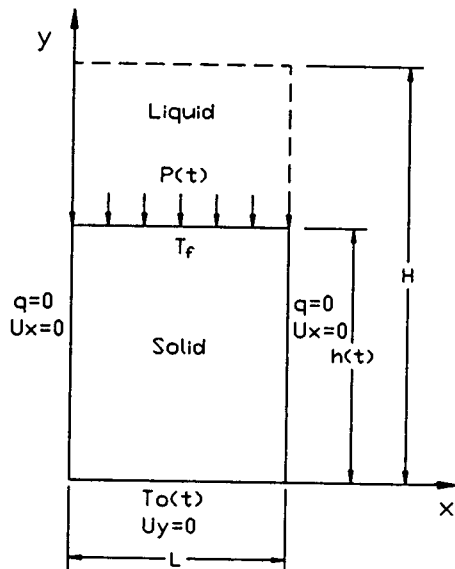


Fig. 1 Physical model of the present study

각 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$k_s \frac{\partial T}{\partial y} = \rho h \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2)$$

여기서,  $a_s$ ,  $k_s$ ,  $\rho$ ,  $h$ 는 각각 열확산계수, 열전도계수, 밀도 및 상변화잠열이며  $\partial y/\partial t$ 는 상변화면의 이동속도이다.

상변화물질과 인접한 용기 밀면의 냉각조건은 실제조건과 유사하게 지수함수로 온도가 낮아지도록 다음과 같은 식<sup>(13-15)</sup>을 사용하였다.

$$T_0(t) = T_c + (T_f - T_c) e^{-Rt} \quad (3)$$

여기서,  $T_c$  및  $T_f$ 는 각각 정상상태온도(대기온도) 및 상변화물질의 용융온도이고  $R$ 은 주형(냉각판) 재질의 영향을 고려한 냉각율변수이다.

본 해석문제와 같이 실제영역을 둘러싸는 면의 일부 또는 전부가 시간에 따라 이동하는 이동경계문제(moving-boundary problem)에서는 실제영역의 각 경계와 일치하는 곡면좌표계를 사용하고 실제영역을 직사각형, 원형 등의 형태를 가지는 계산영역으로 좌표변환한 후 계산영역에서 문제를 풀면 좌표변환으로 인해 기본방정식은 더 복잡해지지만 이동경계조건 처리가 매우 간단해진다. 본 연구에서는 상변화면의 이동속도가 종속변수의 분포에 미치는 영향을 격자점의 이동속도를 통하여 기본방정식에 포함시킬 수 있도록 시간의존 경계밀착좌표계를 사용하였으며 또한 실제영역( $x, y$  좌표계)과 계산영역( $\xi, \eta$  좌표계)의 격자점들을 타원형 편미분방정식을 이용한 격자생성방법을 사용하여 1:1로 대응되도록 하였다.

고상의 에너지방정식과 상변화면에서의 에너지 균형식을 각각 좌표변환시키면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(JT)_\xi + (UT)_\xi + (VT)_\eta = a_s \left\{ \left( \frac{\alpha}{J} T_\xi \right)_\xi - \left( \frac{\beta}{J} T_\eta \right)_\xi + \left( \frac{\gamma}{J} T_\eta \right)_\eta - \left( \frac{\beta}{J} T_\xi \right)_\eta \right\} \quad (4)$$

$$y_t = \frac{k_s}{\rho h} \cdot \frac{x_\xi T_\eta - x_\eta T_\xi}{J} \quad (5)$$

여기서,  $(U, V)$ 는

$$U = x_{\eta t} - x_\eta y_t \quad (6a)$$

$$V = y_\xi x_t - x_\xi y_t \quad (6b)$$

이고  $\alpha, \beta, \gamma$  및  $J$ 는 좌표변환 Metric계수 및

**Table 1** Thermophysical properties of pure aluminum<sup>(13-15)</sup>

Property [unit]	Symbol	Value
Thermal Conductivity [kJ/m°C s]	$k_s$	0.2294
Specific Heat [kJ/kg°C]	$C_p$	1.0576
Density [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho$	2650
Melting Temperature[°C]	$T_f$	660
Latent Heat [kJ/kg]	$h$	402

Jacobian이다. 식(4)에서  $-\left(\frac{\beta}{J} T_\eta\right)_\xi$  및  $-\left(\frac{\beta}{J} T_\xi\right)_\eta$ 는 각각  $T$ 의  $\eta$ 방향 구배에 의한  $\xi$ 방향 확산 및  $\xi$ 방향구배에 의한  $\eta$ 방향 확산을 나타낸다. 이들 항들은 좌표계의 비직교성에 기인한 것으로서 준확산(pseudo-diffusion) 항<sup>(16)</sup>이라 하며 일방향 응고의 경우 좌표계의 직교성이 유지되므로 무시되어진다. 식(4)의 좌변항에서  $U, V$ 는 속도성분이 아니라 상경계면의 이동속도에 의한 종속변수의 영향을 나타내는 성분이며 상변화면은 일정한 온도로 유지되므로 식(5)에서 접선방향 온도구배  $T_t$ 는 0이다.

### 2.3 수치계산

좌표변환된 에너지방정식을 시간에 대해서 음함수방법(implicit method)으로 공간에 대해서는 검사체적에 대해 적분하는 Patankar<sup>(10)</sup>의 유한체적법을 적용하여 차분화방정식을 얻었다. 차분화방정식의 해는 선순법(line-by-line method)을 이용한 TDMA(tri-diagonal matrix algorithm)에 의해 구하였다. 초기 응고영역은 전체영역의 0.5%로 가정하였으며 고상영역의 격자수는 각 방향으로 11개( $x$ 방향) 및 41개( $y$ 방향)로 구성하였다. 매 시간단계마다 수렴조건은 온도에 대한 상대적 변화율의 최대치가  $10^{-5}$  이하가 되도록 하였다.

본 연구에서 순수 알루미늄의 열역학적 물성치는 본 해석모델로 연구한바 있는 다른 연구자들과 해석결과 비교를 위해서 동일한 열역학적 물성치를 사용하였으며 Table 1과 같다.

## 3. 열응력해석

### 3.1 유한요소법의 적용

전체 변형도율(total strain rate)  $\dot{\epsilon}$ 은 다음과

같이 탄성 변형도율(elastic strain rate)  $\dot{\epsilon}^E$ , 비탄성 변형도율(inelastic strain rate)  $\dot{\epsilon}^N$  및 열 변형도율(thermal strain rate)  $\dot{\epsilon}^T$ 의 성분으로 나눌 수 있다고 가정한다.<sup>(13-15)</sup>

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^N + \dot{\epsilon}^T \quad (7)$$

여기서, 전체 변형도율  $\dot{\epsilon}$ 은

$$\dot{\epsilon} = \{\dot{\epsilon}_{xx} \ \dot{\epsilon}_{yy} \ \gamma_{xy}\}^T \quad (8)$$

로 정의되며  $\dot{\epsilon}^E$ ,  $\dot{\epsilon}^N$  및  $\dot{\epsilon}^T$ 도  $\dot{\epsilon}$ 과 같은 형태로 표시된다. 식(7)에서 탄성변형률만이 외력에 의해서 초기에 순간적으로 생성되어지며 탄성 변형도율은 총 응력 변화율의 함수로 표시된다.<sup>(2)</sup> 본 연구에서 열응력해석은 평면변형률(plain strain) 상태로 해석하므로  $x$ - $y$ 면에 수직인  $z$ 방향의 전체 변형도율이 0, 즉  $\dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_{zz}^E + \dot{\epsilon}_{zz}^N + \dot{\epsilon}_{zz}^T = 0$ 라는 가정과 3차원 Hook's Law을 사용하면 총 응력변화율과 탄성 변형도율의 관계는 다음과 같이 표시된다.<sup>(14)</sup>

$$\dot{\sigma} = D \dot{\epsilon}^E + \frac{\nu E(T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{zz} \quad (9)$$

여기서,  $D$ ,  $\nu$ ,  $E(T)$ 는 각각 온도의존 탄성계수행렬, 푸아송비 및 Young's modulus이다.

고온하에서 변형도율과 온도는 금속재료의 응력-변형률관계에 큰 영향을 미치며, 고온하에서 비탄성변형은 크리프(creep) 또는 응력이완(stress relaxation)으로 적절히 고려되어야 한다. 이러한 비탄성 변형도율을 고려하기 위하여 점소성 구성모델(viscoplastic constitutive model)이 필요하며 다음과 같은 형태의 방정식이 변형율의존모델(rate dependent model)에 대해서 일반적으로 가정되어진다.

$$\dot{\epsilon}^N = f(\sigma, T, q^k) \quad (10)$$

여기서,  $q^k$ 는 재료의 내부 미세조직 상태에 의해서 야기되는 소성유동에 대한 저항을 나타내는 상태변수(state variables)이며, 합금이 아닌 순금속일 경우에는 응고 동안에 이러한 영향을 무시할 수 있다.<sup>(14)</sup>

본 연구에서 순수 알루미늄의 비탄성 변형도율은 Sample<sup>(11)</sup>이 제시한 실험식인 hyperbolic-sine constitutive law을 사용하며 이는 Heinlein 등<sup>(13)</sup>과 Ruan 등<sup>(14,15)</sup>이 수치해석시 적용한 바 있으며

다음과 같이 표시된다.

$$\dot{\epsilon}^N = \frac{3}{2} A \exp\left(-\frac{C}{T+273}\right) \frac{[\sinh(B\bar{\sigma})]^n}{\bar{\sigma}} Z S \quad (11)$$

여기서,

$$Z = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 1) \quad (12a)$$

$$A = 0.382 \times 10^{12} \text{ sec}^{-1} \quad (12b)$$

$$B = 0.037 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1} \quad (12c)$$

$$C = 18849 \text{ }^\circ\text{K} \quad (12d)$$

$$n = 3.84 \quad (12e)$$

유효응력

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S \cdot S} \quad (12f)$$

편차응력

$$S = \sigma - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \delta, \quad \delta = \{1 \ 1 \ 0 \ 1\}^T \quad (12g)$$

이다.

유한요소법 수식화를 위해 고상영역을 8개의 절점을 갖는 등계수요소(isoparametric element)로 분할하고 Serendipity 형상함수  $N$ 를 사용한다. 절점변위 변화율을  $\dot{d}$ 라고 하면 임의의 위치에서 변위변화율  $\dot{u}$ 은

$$\dot{u} = N \dot{d} \quad (13)$$

이 되며, 대응되는 변형도율  $\dot{\epsilon}$ 은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon} = B \dot{d} \quad (14)$$

여기서,  $B$ 는, 변형률-변위행렬로서 형상함수의 미분항으로 표시된다.

가상일의 원리(principle of virtual work)에 의하여 임의의 시간  $t_n$ 에서 연속체의 평형방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_{\Omega} B^T \sigma_n d\Omega = \int_{\Gamma} N^T \tau_n d\Gamma \quad (15)$$

여기서,  $\sigma_n$ 은 임의의 시간  $t_n$ 에서 응력텐서이고,  $\tau_n$ 은 고상영역 상부에 작용하는 정압(hydrostatic pressure)  $P(t)$ 이며  $P(t) = \rho g(H - h(t))$ 로 가정하였다.<sup>(13,14)</sup> 식(15)의 유도과정에서 체적력(body force)과 관성력은 무시되어졌다.

이전시간  $t_{n-1}$ 에서 응력  $\sigma_{n-1}$ 을 안다고 하면 현재 시간  $t_n$ 에서 응력  $\sigma_n$ 은 Euler의 후방적분법을 사

용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_n = \dot{\sigma}_n \Delta t^* + \sigma_{n-1} \quad (16)$$

여기서,  $\Delta t^*$ 는 시간증분이며, 만일 계산되는 지점이 시간  $t_{n-1}$ 일 때 고상영역이었다면  $\Delta t^*$ 는  $\Delta t (= t_n - t_{n-1})$ 와 동일하며 액상영역이었다면  $\Delta t^* = t_n - t_{n-1}^*$ ( $t_{n-1}^*$ 는 상변화면이 계산되는 지점에 도달했을 때 시간임)이 되고 응력  $\sigma_{n-1}$ 은 액상의 정수압력이 된다. 3.2항에서 기술된 이동 영역에서는 매 시간단계마다 요소 크기가 변화하므로 bi-cubic surface patch기법<sup>(12)</sup>을 이용하여 응력  $\sigma_{n-1}$ 을 구하였다.

식(15)에 식(7), (9), (14) 및 (16)을 대입하고 z 방향의 전체 변형도율이 0이라는 가정을 적용하면 다음과 같은 유한요소방정식을 얻을 수 있다.

$$K\dot{d} = F_\tau - F_\sigma + F_\epsilon \quad (17)$$

여기서,

$$K = \int_\Omega B^T DB \Delta t^* d\Omega \quad (18a)$$

$$F_\tau = \int_\Omega N^T \tau_n d\Gamma \quad (18b)$$

$$F_\sigma = \int_\Omega B^T \sigma_{n-1} d\Omega \quad (18c)$$

$$F_\epsilon = \int_\Omega B^T \left[ D(\dot{\epsilon}^T + \dot{\epsilon}^N) + \frac{\nu E(T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\dot{\epsilon}_{zz}^T + \dot{\epsilon}_{zz}^N) \right] \Delta t^* d\Omega \quad (18d)$$

이다.

식(17)에서 절점변위 변화율  $\dot{d}$ 를 구한 후 Gauss 적분점에서 응력 변화율  $\dot{\sigma}_n$  즉,  $\dot{\sigma}_{xx}$ ,  $\dot{\sigma}_{yy}$ ,  $\dot{\sigma}_{xy}$ 은 다음 식을 사용하여 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma}_n = DB\dot{d}_n - D(\dot{\epsilon}^T + \dot{\epsilon}^N) \quad (19)$$

z방향 응력 변화율  $\dot{\sigma}_{zz}$ 은

$$\dot{\sigma}_{zz} = \nu(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{yy}) - E(T)(\dot{\sigma}_{zz}^T + \dot{\sigma}_{zz}^N) \quad (20)$$

이 되며, 열변형도율  $\dot{\epsilon}^T$ 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}^T = \beta(T) \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t^*} \delta, \quad \delta = \{1 \ 1 \ 0 \ 1\}^T \quad (21)$$

여기서,  $\beta(T)$ 는 온도의존 열팽창계수이며 순수 알루미늄의 경우 그 값은 Table 2와 같다.

순수 알루미늄의 Young's modulus,  $E(T)$ 는 온

도범위 0~660°C에서 선형적으로 변한다고 가정하며<sup>(13~15)</sup> 이를 수식으로 표시하면 다음과 같다.

$$E(T) = F - GT \quad (22)$$

여기서,  $F = 6.93 \times 10^4$  MPa,  $G = 43.7152$  MPa/°C이다.

### 3.2 격자계 생성

고상영역에서 열응력해석시 격자계는 상변화 열전달해석시 사용된 격자계와는 달리 다음과 같은 방법으로 격자계를 생성하였다. 먼저 고상영역을 고정영역(fixed region)과 이동영역(moving region)으로 구성된 2개 영역으로 나누며, 이동영역은 상변화면에 인접한 요소들로 구성되어 상변화면의 이동과 더불어 요소의 크기는 변화하게 된다. 이동영역에 있는 요소들의 크기가 규정된 크기보다 커지면 새로운 이동영역이 생성되며 이전의 이동영역은 동시에 고정영역으로 된다. 본 격자생성법은 사용하기 쉬운뿐만 아니라 어떤 고정지점에서 값의 변화를 계산하는 것이 요구될 때 유용하게 이용할 수 있다.

본 연구에서는 상변화 열전달해석과 열응력해석시 서로 상이한 격자계를 사용하기 때문에 열응력해석시 필요한 각 요소의 Gauss 적분점에서 온도를 구할 수 있는 방안이 요구된다. 이를 위하여 형상설계 분야에서 널리 적용되고 있는 Bi-cubic surface patch 기법<sup>(12)</sup>을 이용하여 열전달해석에서 구한 격자점에서의 온도를 사용하여 열응력 해석에서 필요한 각 요소의 Gauss 적분점에서 온도를 구하였다. 고상영역에서 온도는 완만하게 변화하기 때문에 상기 방법으로 구한 온도값의 오차는 거의 무시할 수 있다.

### 3.3 수치계산

유한요소방정식인 식(17)에서  $F_\epsilon$ 에 포함된 비탄

Table 2 Thermal expansion coefficient<sup>(13~15)</sup>

Temperature [°C]	$\beta(T)$ [m/m°C]
25	$23.19 \times 10^{-6}$
300	$27.86 \times 10^{-6}$
400	$30.23 \times 10^{-6}$
660	$38.355 \times 10^{-6}$

성 변형도율  $\dot{\epsilon}^N$  이 응력의 함수, 즉, 변위변화율의 함수이므로 식(17)은  $K\dot{d}=f(\dot{d})$ 로 표시될 수 있다. 따라서 매 시간단계마다 수정 Newton-Raphson법으로 비선형 관계식을 풀어서 열응력을 계산하였으며, 수치계산계통도는 Fig. 2와 같다. 등계수요소의 수는 고상영역이 커질수록 증가하게 되며 최초 4개로부터 시작하여 계산종료(300초)시 38개( $T_c=300^\circ\text{C}$ 인 경우) 또는 46개( $T_c=51.7^\circ\text{C}$ 인 경우)가 되도록 하였다. 시간중분은 계산과정 중에 반복계산 회수가 증가하면 5%씩 감소시키고, 감소하거나 같으면 5%씩 증가되도록 하였으며 최대 시간중분은  $3 \times 10^{-2}$ 초이었다. 매 시간단계에서 수렴 조건은 식(23)과 같이 유효 비탄성 변형도율에 대한 상대적 변화율이  $10^{-8}$  이하가 되도록 하였다.

$$\text{수렴기준} : \frac{(\dot{\epsilon}^N)_i - (\dot{\epsilon}^N)_{i-1}}{(\dot{\epsilon}^N)_i} \leq 10^{-8} \quad (23)$$

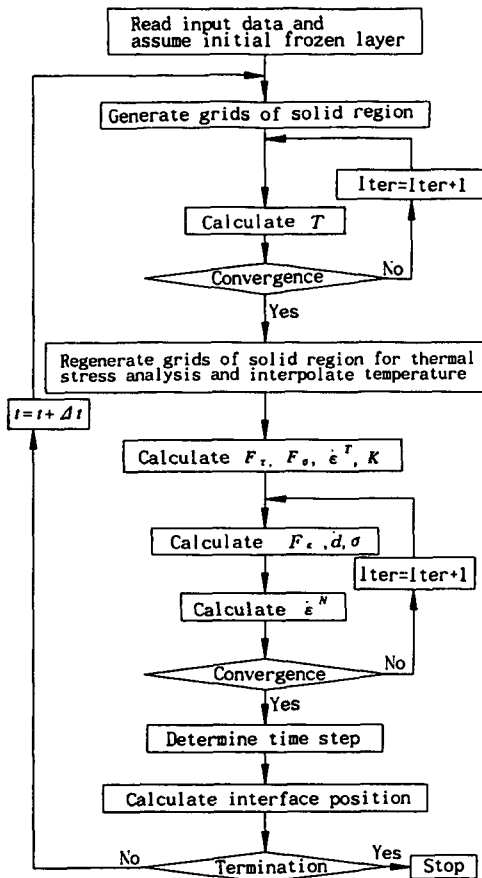


Fig. 2 Flow chart

여기서,  $(\dot{\epsilon}^N)_m$ 는 고상영역의 모든 Gauss 적분점에서 유효 비탄성 변형도율의 합계를 나타내며 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{\epsilon}^N = \sum_{m=1}^{Ng} (\dot{\epsilon}^N)_m = \sum_{m=1}^{Ng} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (24)$$

### 4. 해석결과 및 고찰

유한차분법과 유한요소법을 복합적으로 사용하여 응고과정에서의 열응력을 해석한 본 수치해석결과와 타당성을 입증하기 위해 기존 연구결과들과 동일한 조건인 냉각율변수  $R=0.023 \text{ sec}^{-1}$ , 정상상태 온도  $T_c=300^\circ\text{C}$  또는  $51.7^\circ\text{C}$ 인 2가지 경우에 대해 각각 해석을 하였다. 본 연구결과와의 비교대상인 기존연구자들 중 Ruan<sup>(14)</sup>은 상변화 열전달해석과 열응력해석을 모두 유한요소법으로 해석하였으며 Heinlein 등<sup>(13)</sup>은 상변화 열전달해석은 경계요소법으로 열응력해석은 해석적 방법으로 직접 계산하였다.

시간에 따른 상변화면의 위치는 Fig. 3에 나타나 있으며 정상상태 온도가 낮을수록 상변화면은 빨리 이동함을 알 수 있다. 또한 본 연구결과와 Ruan<sup>(14)</sup>의 결과보다 Heinlein 등<sup>(13)</sup>의 결과에 더 근접하였지만 측정오차를 고려하면 거의 일치함을 알 수 있다. 임의의 고정된 위치에서 시간에 따른 온도변화 상태는 Fig. 4 및 Fig. 5에 나타나 있으며 본 연구결과는 위치에 따라 기존 연구결과와 미세한 차이

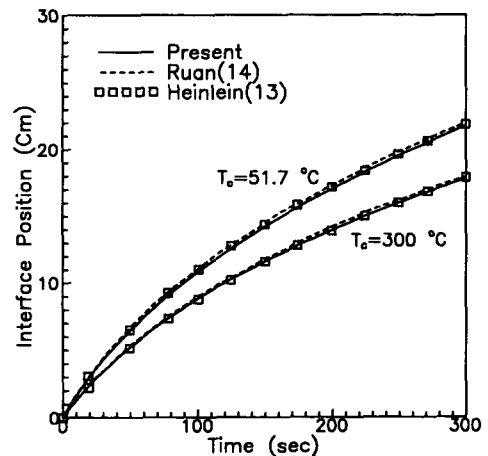


Fig. 3 Comparison of calculated solid-liquid interface positions with others ; case  $T_c=300^\circ\text{C}$  and  $51.7^\circ\text{C}$

는 있지만 거의 일치하였다. 그림에서  $y=0$ 인 위치는 냉각면을 나타낸다.

Fig. 6 및 Fig. 7은 임의의 고정된 위치에서 시간에 따른  $x$ 방향 응력,  $\sigma_{xx}$ 을 나타내고 있다. 본 연구결과는 Ruan<sup>(14)</sup>의 결과보다 Heinlein 등<sup>(13)</sup>의 결과에 더 접근함을 알 수 있다.  $y$ 방향 응력,  $\sigma_{yy}(t)$ 는  $-P(t)$ 와 거의 동일하였으며,  $x$ 방향 응력은 인장응력이며 응고가 시작될 때 열수축(thermal contraction)으로 인하여 발생하기 시작한다. 그러나 정상상태온도에 도달할수록 열수축으로 인한 응력은 점점 감소하게 되고 비탄성이완(inelastic relaxation)이 발생되어 응력은 결국 감소하게 된

다. 냉각면( $y=0$ )에 인접한 위치일수록 온도감소율이 크므로 응력이 크게 발생함을 알 수 있으며 또한  $T_c=300^\circ\text{C}$ 인 경우보다  $T_c=51.7^\circ\text{C}$ 인 경우에 온도변화율이 크기 때문에 열응력이 더욱 크게 발생하였다.

Fig. 6 및 Fig. 7에서 보듯이 냉각면( $y=0$ ) 위치에서는 응력이완(stress relaxation) 현상이 발생하여 응력이 감소하는 것을 알 수 있으며 그 원인을 살펴보면 다음과 같다. 먼저  $T_c=300^\circ\text{C}$ 인 경우에는 Fig. 8에서 탄성 변형도율이 50초 이내에는 온도의 급격한 감소로 증가하지만 50초부터는 감소하기 시작하여 130초부터 음수가 되며 이는 Fig. 6에

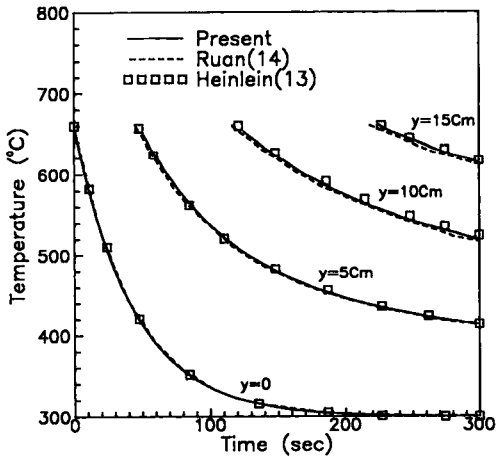


Fig. 4 Comparison of calculated temperatures at various locations with others; case  $T_c=300^\circ\text{C}$

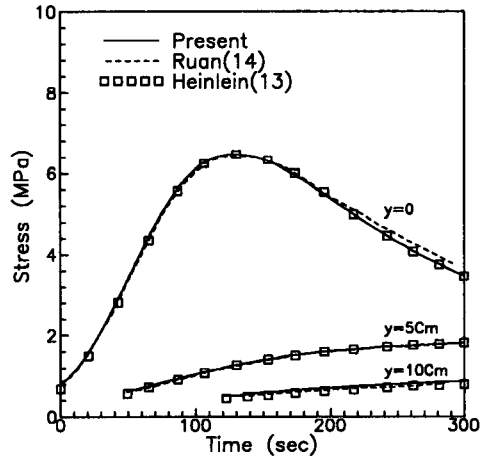


Fig. 6 Comparison of calculated lateral stresses at various locations with others; case  $T_c=300^\circ\text{C}$

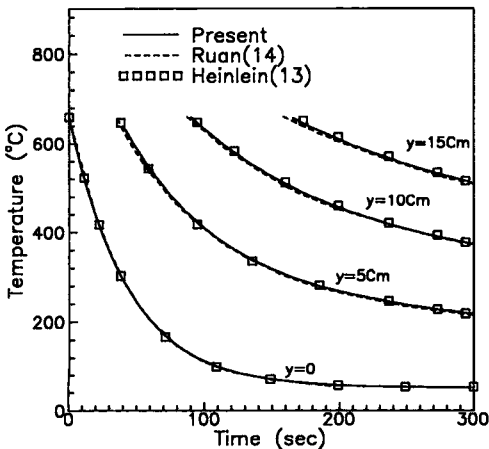


Fig. 5 Comparison of calculated temperatures at various locations with others; case  $T_c=51.7^\circ\text{C}$

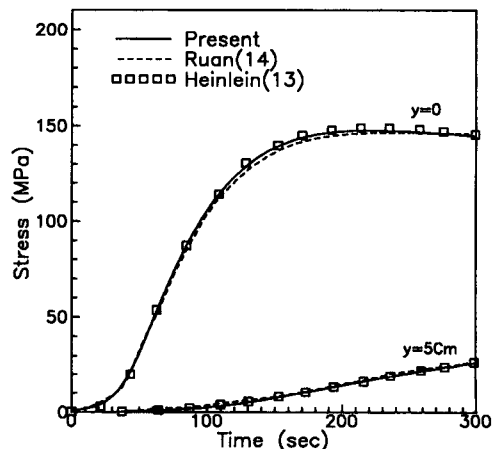


Fig. 7 Comparison of calculated lateral stresses at various locations with others; case  $T_c=51.7^\circ\text{C}$

서 응력이완이 발생하는 시간인 130초와 일치한다. 열 변형도율은 식(21)에서 알 수 있듯이 응고의 경우 항상 음수 또는 0이 되며 Fig. 9에서 응고가 진행되어 온도변화가 감소할수록 줄어들게 됨을 알 수 있다. 그러나 비탄성 변형도율은 식(11)에서 보듯이 온도와 응력의 함수이므로 응고가 진행될수록 감소하게 되며 열 변형도율과 부호가 서로 다른 비

슷한 양상을 나타낸다. 열 변형도율과 비탄성 변형도율의 미소한 차이를 살펴보기 위해 두 개의 변형도율을 서로 합성하여 보면 Fig. 10과 같으며, 130초를 기준으로 하여 이전에는 열 변형도율이 비탄성 변형도율보다 커지지만 이후에는 반대현상이 발생한다. 따라서 응력이완현상은 냉각면 온도가 정상상태에 도달하면 열 변형도율이 미소하게 되는

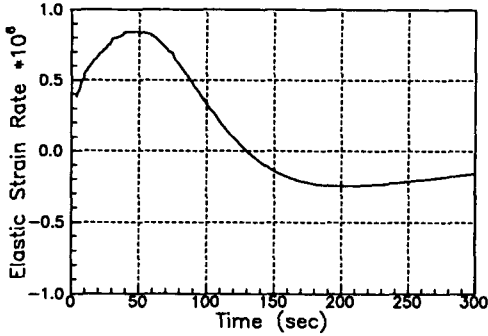


Fig. 8 Elastic strain rate at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=300^\circ\text{C}$

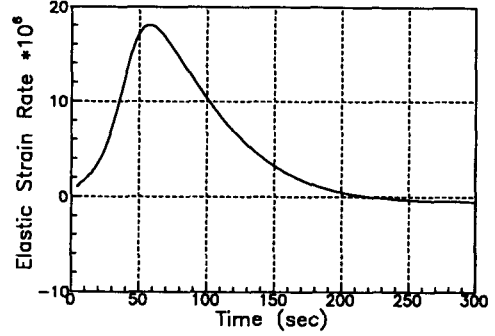


Fig. 11 Elastic strain rate at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=51.7^\circ\text{C}$

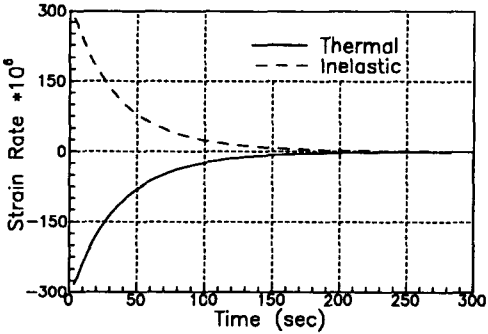


Fig. 9 Thermal and inelastic strain rates at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=300^\circ\text{C}$

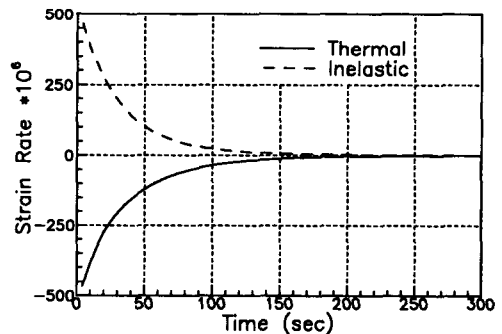


Fig. 12 Thermal and inelastic strain rates at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=51.7^\circ\text{C}$

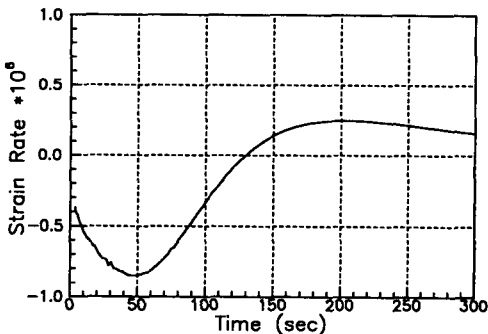


Fig. 10 Sum of thermal and inelastic strain rate at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=300^\circ\text{C}$

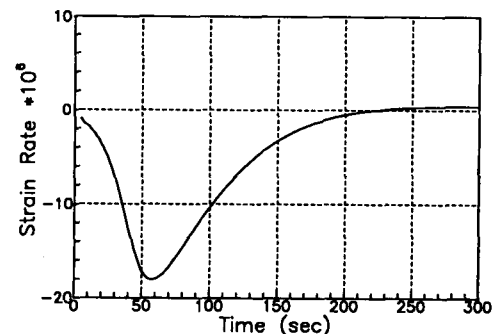


Fig. 13 Sum of thermal and inelastic strain rate at cooling surface ( $y=0$ ) ; case  $T_c=51.7^\circ\text{C}$



반면에 비탄성 변형도율은 열 변형도율보다 크게 되기 때문에 발생하는 현상이다. 다음으로  $T_c=51.7^\circ\text{C}$ 인 경우를 살펴보면 응고에 따른 변형도율 분포인 Figs. 11~13은  $T_c=300^\circ\text{C}$ 인 경우의 Figs. 8~10과 비슷한 양상을 보이지만 크기에서 차이가 있음을 알 수 있다. Fig. 11에서 탄성 변형도율은  $T_c=300^\circ\text{C}$ 인 경우보다 냉각면에서 온도변화율이 크기 때문에 보다 더 급격하게 변화하고 226초부터 음수가 되며 이는 Fig. 7에서 응력이완이 발생하는 시간인 226초와 일치한다. 그러나 Fig. 7에서 보듯이 응력이완현상은 아주 미소하며 그 원인은 Fig. 13에서 보면 226초 이상에서 열 변형도율에 비해 비탄성 변형도율의 증가량이 전체 변형도율의 스케일에 비교할 때 미소하기 때문이다. 이는 저온에서 응력이완이 작게 발생하는 현상과 일치함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

고온상태에서 응고되는 금속의 열응력을 해석하기 위해 유한체적법과 유한요소법을 복합적으로 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 유한체적법을 이용하여 상변화위치와 온도장을 계산하고 유한요소법으로 응고된 고상영역내에서 발생하는 열응력을 계산하는 본 수치해석 방법은 기존 연구결과와 비교하여 볼 때 좋은 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

(2) 순수 알루미늄 응고시 응고초기에는 열변형도율이 비탄성 변형도율보다 크므로 열응력이 계속 증가하지만 온도의 변화율이 정상상태에 이르면 비탄성 변형도율이 열 변형도율보다 크게 되어 응력이완 현상이 발생하며 이러한 현상은 정상상태 온도가 높을수록 크게 나타났다. 또한 냉각면에 인접할수록 온도감소율이 크므로 열응력이 크게 발생하며 정상상태온도가 낮을수록 온도감소율이 크기 때문에 열응력이 더욱 크게 발생하였다.

## 후 기

이 논문은 1993년도 연세대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구된 것입니다.

## 참고문헌

- (1) Thomas, B. G., Samarasekera, I. V. and Brimacombe, J. K., 1988, "Investigation of Panel Crack Formation in Steel Ingots," *Metall. Trans. B*, Vol. 19B, pp. 277~301.
- (2) Lewis, R. W., Morgan, K. and Roberts, P. M., 1984, *Determination of Thermal Stresses in Solidification Problems*, in : Numerical Analysis of Forming Processes by Pittman, J. F. T., Zienkiewicz, O. C., Wood, R. D. and Alexander, J. M., John-Wiley & Sons Ltd., pp. 405~431.
- (3) Viskanta, R., 1988, "Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1205~1219.
- (4) Thomas, B. G., Samarasekera, I. V. and Brimacombe, J. K., 1987, "Mathematical Model of the Thermal Processing of Steel Ingot," *Metall. Trans. B*, Vol. 18B, pp.131~147.
- (5) Weiner, J. H. and Boley, B. A., 1963, "Elasto-Plastic Thermal Stresses in a Solidifying Body," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp. 145~154.
- (6) Richmond, O. and Tien, R. H., 1971, "Theory of Thermal Stresses and Air-Gap Formation During the Early Stages of Solidification in a Rectangular Mold," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 19, pp. 273~284.
- (7) Williams, J. R., Lewis, R. W. and Morgan, K., 1979, "An Elasto-Viscoplastic Thermal Stress Model with Applications to the Continuous Casting of Metals," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, pp. 1~9.
- (8) Perzyna, P., 1966, *Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech. Vol. 9, pp. 243~377.
- (9) Wray, P. J., 1980, "Modelling of Casting and Welding Processes," *AIME Conference Proceedings*, pp. 245~257.
- (10) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing, Washington.
- (11) Sample, V. M. and Lalli, L. A., 1987, "Effects of Thermomechanical History of Hardness of

- Aluminium," *Mater. Sci. Techn.*, Vol. 3, pp. 28~35.
- (12) Rogers, D. F. and Adams, J. A., 1990, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw Hill, New York.
- (13) Heinlein, M., Mukherjee, S. and Richmond, O., 1986, *A Boundary Element Method Analysis of Temperature Fields and Stresses During Solidification*, *Acta Mech*, Vol. 59, pp. 59~81.
- (14) Ruan, Y., 1990, *Analysis of Temperature Fields and Thermal Stresses in Solidifying Bodies Using the Finite Element Method*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis.
- (15) Zabaras, N., Ruan, Y. and Richmond, O., 1991, "On the Calculation of Deformations and Stresses During Axially Symmetric Solidification," *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 865~871.
- (16) Hsu, C. F., Sparrow, E. M. and Patankar, S. V., 1981, "Numerical Solution of Moving Boundary Problems by Boundary Immobilization and a Control-Volume-Based Finite-Difference Scheme," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1335~1343.