

〈技術論文〉

# 순간주파수 분석기법의 응용(1) — 알고리즘간의 성능비교 및 잡음영향 —

김정태\* · 임병덕\*\*  
(1993년 7월 21일 접수)

## Application of Instantaneous Frequency Analysis(I) — Algorithm Performance and Noise Effects —

Jeung-tae Kim and Byung-duk Lim

**Key Words :** Instantaneous Frequency Analysis(순간주파수 분석), Hillbert Transform(Hillbert 변환), Signal to Noise Ratio(SN 對 잡음비)

### Abstract

When a vibration data for a rotating machine such as a pump or a compressor is concerned, the frequency fluctuation of the energy contents at an instant time may provide useful information on understanding the vibration characteristics of the rotating machinery, rather than the averaged energy distribution along the frequency axis. Especially, when a periodic signal has different spectral contents, the approach to use the averaged frequency distribution, called the normal frequency analysis, may not be appropriate to extract vibration source characteristics of the structure. This paper introduces a way to analyze the signal based on an instant time. In order to evaluate the performance of the various approach, the investigation compares three different algorithms which are frequently implemented in the instantaneous frequency analysis. Also for the noise effect embodied in the true signal, various cases for different SN ratio have been examined. The result shows that the noise level is crucial to evaluate the instantaneous frequency analysis. In order to implement the instantaneous frequency analysis, the extraction of the relevant information from the measured signal should have the high S/N ratio, i. e., 40 dB or above.

### 기 호 설 명

$A$  : 진폭  
 $f(t)$  : 순간주파수  
 $h(t)$  : 해석신호  
 $he(t)$  : 우함수  
 $ho(t)$  : 기함수  
 $H(\omega)$  : 해석신호의 Fourier변환  
 $\phi(t)$  : 위상

$\omega(t)$  : 각속도  
 $\Delta$  :  $\omega_2 - \omega_1$

### 1. 서 론

FFT를 이용한 주파수 분석방법은 회전기계 등의 경우와 같이 일정한 주기를 가지고 반복되는 신호의 분석에 많이 쓰이고 있다. 반복되는 신호는 FFT분석을 통하여 주파수 대역별로 에너지(또는

\*정회원, 홍익대학교 기계공학과  
\*\*영남대학교

파워)의 분포를 알 수 있으므로 발생하는 신호의 주된 원인을 파악할 수 있는 등 유용한 장점을 가지고 있다. 이에 반해 FFT 분석이 가지고 있는 단점은 에너지의 분포를 일정한 주기별로 평균치를 구한 결과로 파악된다. 따라서 한 주기내에 위치한 특정순간에 대한 주파수 분석정보는 나타내지 못하게 된다.

본 연구는 FFT 주파수 해석방법의 보완으로 쓰일수있는 순간주파수 분석기법(instantaneous frequency analysis)에 대한 것이다.<sup>(1,2)</sup> 순간주파수라는 신호의 시간변화에 따른 순간 순간주파수 값을 나타내는 것으로 FFT분석과는 달리 횡축에는 시간을, 종축에는 주파수값을 나타내게 된다. 그 결과, 임의 순간에 대한 주파수값을 읽을 수 있으므로 신호의 과도현상에 대한 특성을 분석할 때 유용하게 적용할 수 있다. 즉, 회전기계의 1회전 기간중 여러가지 과도현상을 가지고 있는 경우인 엔진의 연소신호나 압축기의 압력신호 등은 각각의 과도현상별로 순간주파수를 분석함으로써 한 주기내에 분포되어 있는 여러가지 현상을 이해에 도움이 될 수 있다.

순간주파수의 분석은 여러가지 방법을 통하여 구할 수 있는데 본 연구는, 첫째, Hilbert변환을 통해 위상의 미분치인 각속도로부터 순간주파수를 계산하는 방법, 둘째, 위상의 연속함수를 구한후 그 결과로 부터 순간주파수를 계산하는 방법, 셋째, 이에 다시 필터를 통과시키는 방법.

여러가지 알고리즘(algorithm)간의 성능의 비교·분석에 주안점을 두고 연구가 수행되었다. 또한 해석대상신호가 여러정도의 잡음에 노출되어 있는 경우, 신호 대 잡음의 비에 따라 순간주파수분석 알고리즘이 가지게 되는 영향에 대하여 분석하였다.

## 2. Hilbert변환과 순간주파수

일반적으로 사용되는 순간주파수 분석기법으로는 Hilbert변환 방식이 쓰인다. Hilbert변환은 대상신호를 Fourier변환한 뒤 실수와 허수부분, 또는 진폭과 위상관계를 연결시켜 주는 관계식이다. 가령, 기계구조물로부터 발생하는 신호를 대상으로 할 때에는 측정된 기계의 진동신호는 구조물의 가진에 의한 반응으로 볼 수 있고 이의 충격 반응신호(impulse response)  $h(t)$ 는 시간  $t$ 값이  $t < 0$ 일 때에는  $h(t) = 0$ 의 조건을 만족시키는 해석신호

(analytical function 또는 causal sequence)라고 볼 수 있다. 따라서 해석신호  $h(t)$ 는 우함수와 기함수의 합으로 분리시킬 수 있으며 우함수를  $h_e(t)$ , 기함수를  $h_o(t)$ 라 가정하면  $h(t)$ 는

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \tag{1}$$

와 같이 표현할 수 있다. 또한  $h(t)$ 를 우함수만으로 표현하면

$$h(t) = \begin{cases} 2h_e(t) & t \geq 0 \\ 0h(t) & t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

이고  $h(t)$ 를 기함수로 표시하게 되면

$$h(t) = \begin{cases} 2h_o(t) & t \geq 0 \\ 0h(t) & t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

가 된다.

해석함수는 우함수와 기함수간 상호독립될 수 없는 관계를 가지고 있으므로 상호간의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_e(t) = h_o(t) \cdot \text{sign}(t) \tag{4}$$

여기서,  $\text{sign}(t)$ 는  $t \geq 0$ 일 때는 1,  $t < 0$ 일때는 -1을 나타낸다. 따라서 우함수  $h_e(t)$ 의 Fourier변환을  $H_e(\omega)$ , 기함수  $h_o(t)$ 의 Fourier변환을  $H_o(\omega)$ 라 하면

$$\begin{aligned} H_e(\omega) &= F\{h_e(t)\} \\ H_o(\omega) &= F\{h_o(t)\} \end{aligned} \tag{5}$$

이므로  $H_e(\omega)$ 는 식(4)의 Fourier변환을 통해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_e(\omega) = F\{h_o(t) \cdot \text{sign}(t)\} \tag{6}$$

또 Fourier변환의 특성으로부터 식(6)의 곱셈식은 시간축상에서 Convolution으로 표시될 수 있으므로

$$h_e(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\tau) \frac{d\tau}{t-\tau} \tag{7}$$

로 나타낸다.

식(6)과 (7)은 주파수 성분 중 실수(진폭)와 허수(위상)간의 상호관계를 나타내는 Hilbert변환을 보여주고 있으며  $H_e(\omega)$ 와  $H_o(\omega)$ 는 통상 Hilbert변환의 짝(Hilbert transform pair)이라고 불린다. Hilbert변환의 짝은 주파수 좌표에서 뿐만 아니라 시간좌표축에서도 존재한다. 대표적인 Hilbert변환의 짝으로는  $\cos(\omega t)$ 와  $\sin(\omega t)$ 가 있다.

이상과 같은 결과로부터 측정된 임의의 신호  $h(t)$ 가 있을 경우, 이의 Hilbert변환의 짝  $\bar{h}(t)$ 라 하면

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \frac{d\xi}{t-\xi} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\pi} h(t) * \left( \frac{1}{t} \right) \quad (9)$$

여기서, \*는 Convolution을 나타낸다. 따라서 Hilbert변환의 짝  $\bar{h}(t)$ 에 대한 Fourier변환값은 Fourier변환의 특성식으로부터 시간축상의 Convolution은 주파수 축상에서는 곱의 셈으로 표시되므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

즉,

$$F[\bar{h}(t)] = F[h(t)]F\left[\frac{1}{\pi t}\right] \quad (10)$$

$$\bar{H}(\omega) = -j \text{sign}(\omega) H(\omega) \quad (11)$$

이 된다. 그러므로  $\omega \geq 0$ 인 주파수 대역의 임의의 시간함수  $h(t)$ 에 대한 Hilbert변환은 Fig. 1과 같이 Fourier변환을 통한 부호변화로써 간략하게 계산 수행할 수 있다.

이러한 Hilbert변환은 신호처리기법에 있어 베어링 등의 파형(envelop)을 구하거나 신호의 순간주파수 값을 구하여 회전기계의 성능특성 등을 진단 하는데 많이 활용되고 있다.

임의의 해석신호  $h(t)$ 가 이의 Hilbert변환의  $\bar{h}(t)$ 와 함께 복소함수  $z(t)$ 로 다음과 같이 표현되면 파형과 순간주파수를 구하는데 편리하다. 즉,

$$z(t) = h(t) + j\bar{h}(t) \quad (12)$$

라 하면  $h(t)$ 의 파형과 위상은

$$|z(t)| = \sqrt{h^2(t) + \bar{h}^2(t)} \quad (13)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left\{ \left[ \frac{\bar{h}(t)}{h(t)} \right] \right\} \quad (14)$$

로 나타낼 수 있으며, 각속도  $\omega(t)$ 는 위상식 식(14)의 미분치이므로

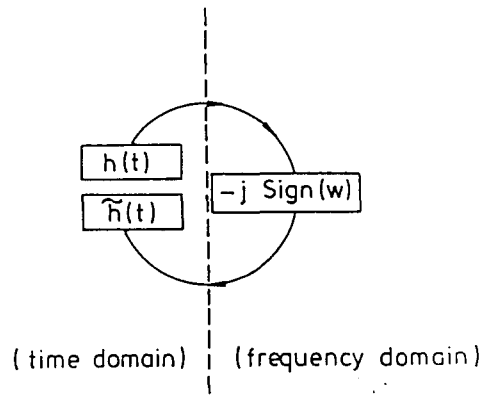


Fig. 1 Hilbert transformation

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\bar{h}(t)h(t) - h(t)\bar{h}(t)}{|z^2(t)|^2} \quad (15)$$

$$f(t) = \omega(t)/2\pi \quad (16)$$

으로 구할 수 있다. 따라서 순간주파수  $f(t)$ 는 각속도  $\omega(t)$ 를  $2\pi$ 로 나눈값이 된다.

한편, 식(13)에 보여져 있는 신호의 진폭은 음향 및 진동의 신호분석시 유용하게 쓰이는 관계식이다. 가령, 잔향실내의 흡음재 특성을 구하는 과정에는 잔향시간의 계산이 필수적인데, 잔향시간의 계산을 위해 음원을 제거한 후 감쇠되는 신호의 진폭을 알기 위하여 식(13)에 의한 진폭(decay curve)을 보여주게 된다.<sup>(3)</sup> 또, 베어링 등의 상태를 진단하기 위하여는 베어링의 진동시 발생하는 진동신호를 측정된 후 신호의 진폭(envelope)를 분석하게 된다. 진폭의 형상은 베어링의 상태를 나타내는 정보를 가지고 있기 때문에 베어링 상태진단을 위해 많이 쓰이고 있다.<sup>(4,5)</sup>

Hilbert변환을 통해 순간주파수를 계산하는 과정을 보기 위해 간단한 Cosine신호를 생각해 보기로 하자. Fig. 2(a)는 입력신호  $h(t)$ 를 보여주고 있다.

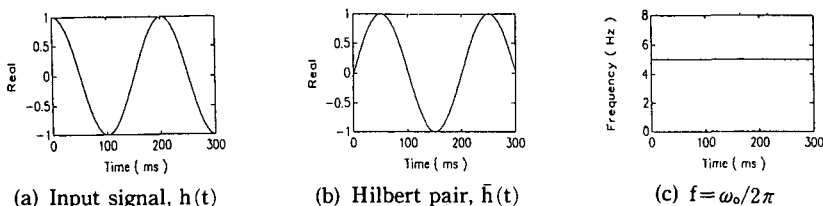


Fig. 2 Procedure to calculate instantaneous frequencies

$$h(t) = 1.0 \times \cos(\omega_0 t)$$

일 때  $h(t)$ 의 Hilbert 짝  $\bar{h}(t)$ 는  $\sin(\omega_0 t)$ 가 된다. 그림에서 사용된 주파수는 5 Hz의 신호를 가지고 있다. 식 (12)에서부터 식 (16)까지의 과정을 통해 계산해 보면 순간주파수  $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ 가 됨을 알 수 있다. Fig. 2(b)와 (c)는 Hilbert변환의 짝  $\bar{h}(t)$ 와 순간주파수  $f(t)$ 의 계산결과를 보여주고 있다. 그림의 (b)에 있는 Hilbert변환의 짝은  $\sin$  함수를 보여주고 있으며, 예상했던 바와 같이 순간주파수는 5 Hz로서 일정한 값을 가지고 있음을 볼 수 있다.

### 3. 순간주파수 분석을 위한 제방법

순간주파수  $f(t)$ 를 구하는 방법은 2절에 보여져 있는 함수의 미분치를 구하는 알고리즘에 따라 결과가 민감하게 변하게 된다. 순간주파수  $f(t)$ 를 구하는 알고리즘은 크게 다음과 같이 3가지 방법이

있다. (6,7)

- ① 직접미분방식
- ② 연속위상함수를 이용한 방식
- ③ 필터를 이용한 방식

첫번째 직접미분방식은 식(15)에 정리되어 있는 것과 같이, 분석하고자 하는 신호  $h(t)$ 로부터 이의 Hilbert변환적인  $\bar{h}(t)$ 를 구한후에  $h(t)$  또는  $\bar{h}(t)$ 의 미분치를 차분법을 통해 수치적으로 계산하는 방법이다. Fig. 3은 입력신호  $h(t)$ 로부터 식 (15)과정을 통해 순간주파수 분석과정을 보여주고 있다.

이에 반해 연속위상 함수를 이용하는 접근방법은  $\pm 180^\circ$ 에서 불연속 값을 가지고 있는 위상  $\psi(t)$ 를 미분이 가능한 연속함수로 바꾸어 놓은뒤 주파수 평면에서  $j\omega$ 를 곱해준 다음, 이의 역 Fourier변환을 통해 위상의 미분값인 각속도를 계산하는 과정이다. (8)

세번째 방법인 필터이용 방식은 위상  $\psi(t)$ 를 필터 설계 알고리즘을 이용하여 직접적으로 미분치를 계산하는 방법이며 고주파 통과대역 필터(high-pass filter)가 적용된다.

### 4. 순간주파수 분석 알고리즘의 성능비교

순간주파수 분석을 위하여 입력되는 신호는 측정 여건에 의해 주위의 잡음영향을 완전히 배제시킬 수는 없으며, 따라서 신호분석에 사용되는 모든 종류의 신호는 어느정도의 잡음이 섞여 있는 상태이다.

본 연구는 순간주파수 분석을 위해 사용하는 알고리즘이 잡음에 어느정도 민감한지를 비교 분석하기 위하여 주파수가 증가하는 증가신호(swept sine)에 잡음비 순간주파수를 계산되었다. 잡음의 크기에 대한 영향을 고려하기 위하여 다음과 같이 세가지 신호에 대한 순간주파수 분석 알고리즘이 적용되었다.

#### 4.1 잡음이 배제된 증가신호

첫번째로 사용된 신호는 잡음이 배제된 이상적인 신호로서 초기의 1 Hz 성분부터 일정속도로 주파수가 증가하면서 1초후에 10 Hz 성분을 가진 신호를 대상으로 하였다. 사용된 신호의 수학적 표현은 다음의 식과 같으며 증가신호는 Fig. 4(a)에 보여져 있다.

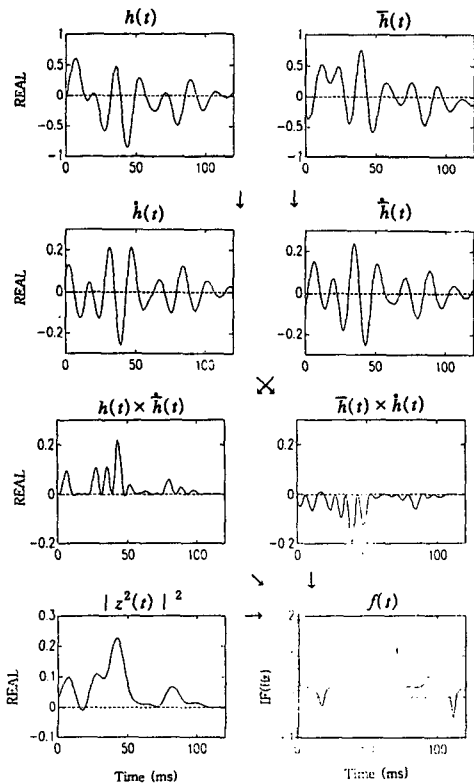
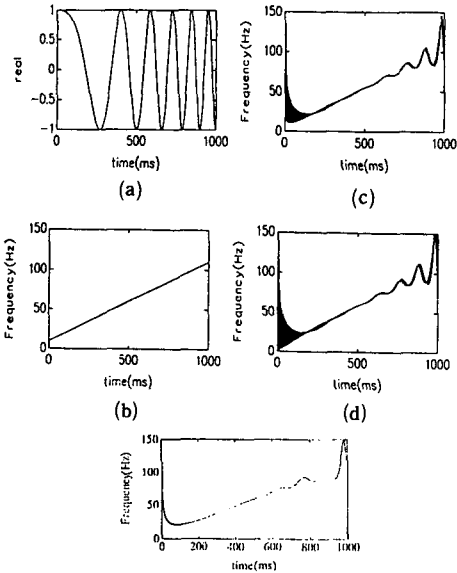


Fig. 3 Implementation of algorithms: direct differentiation



(a) Input signal  
 (b) True instantaneous frequency  
 (c) Direct differentiation  
 (d) Phase unwrapping

Fig. 4 Swept signal with no noise

$$x(t) = \cos(2\pi t + 9\pi t^2) \quad (17)$$

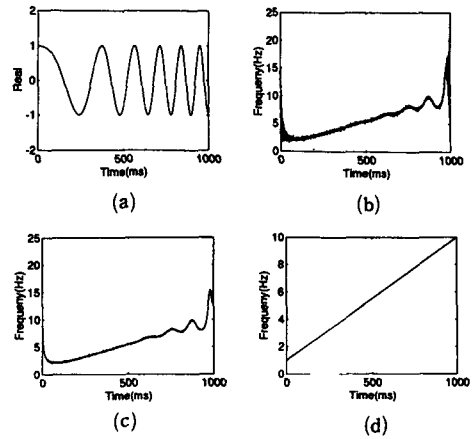
따라서 이론상으로는 순간주파수가 Fig. 4(b)에 보여진것과 같이 직선으로 나타나야 한다. Fig. 4(c), (d) 및 (e)는 직접미분, 연속위상 및 필터를 이용한 각각에 의한 순간주파수 계산결과를 보여주고 있다. 직접미분방식과 연속위상방식은 오차가 상당히 존재하며 성능에 있어 필터적용 방식이 가장 우수함을 볼 수 있다.

4.2 신호 대 잡음비(SN Ratio)

: 60 dB, 40 dB, 20 dB 일 때

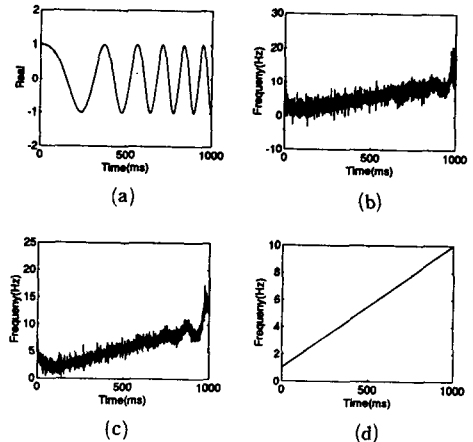
앞의 증가신호는 잡음이 배제된 이상적인 신호이기 때문에 각각의 알고리즘에 대한 성능차이가 상대적으로 작게 나타나게 된다. 실제로, 측정시 발생하는 잡음의 영향을 감안하면 세가지 알고리즘의 계산결과는 순간주파수 분석을 어렵게 만들며 각각의 알고리즘간에 성능차이가 있게 된다.

Fig. 5, Fig. 6 및 Fig. 7은 신호 대 잡음비(SN Ratio)가 각각 60, 40 및 20 dB일 때의 증가신호 분석결과를 보여주고 있다. (a)는 증가신호에 잡음이 섞여 있는 시간신호이며, (b)는 직접미분방식으로 구한 결과이다. (c)는 필터를 통과시킨후의



(a) Input signal  
 (b) Direct differentiation (or Phase unwrapping) method  
 (c) Filtering  
 (d) True instantaneous frequency

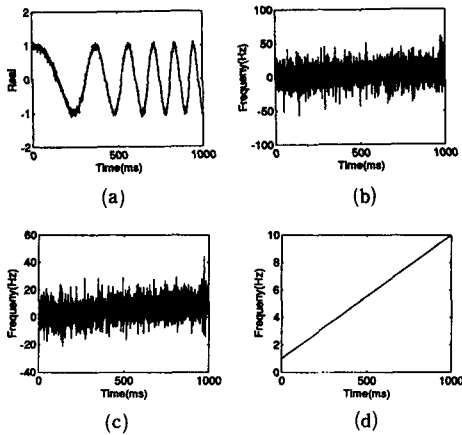
Fig. 5 Swept signal with SN Ratio : 60 dB



(a) Input signal  
 (b) Direct differentiation (or Phase unwrapping) method  
 (c) Filtering  
 (d) True instantaneous frequency

Fig. 6 Swept signal with SN Ratio : 40 dB

결과이다. 여기서 (d)는 이론적으로 구한 기준값이다. 참고로 직접미분방식과 연속미분방식은 육안으로 구분할 수 없을 정도로 동일한 결과를 가지고 있다. 필터통과 방식이 직접미분(또는 연속위상)방식보다 나아 보이나 크게 차이는 없으며 신호 대 잡음비가 60 dB인 경우에는 신호처리 결과가 깨끗



(a) Input signal  
 (b) Direct differentiation  
 (or Phase unwrapping) method  
 (c) Filtering  
 (d) True instantaneous frequency

Fig. 7 Swept signal with SN Ratio : 20 dB

이 나타나고, 40 dB인 때에는 비교적 증가신호의 모양은 유지하고 있음을 볼 수 있다. 잡음이 존재함에 따라 순간주파수 특성은 Fig. 4의 결과에 비해 현격하게 나쁘게 나타남을 볼 수 있다. 연속위상함수를 이용하거나 필터를 사용한 결과 모두, Fig. 4(b)에 보여지는 것과 같이 순간주파수가 증가하는 경향은 보여주고 있으나 잡음의 영향이 심하게 나타나게 된다.

특히 Fig. 7과 같이 신호에 비해 잡음의 크기가 증가한 상태인 잡음비가 20 dB인 경우에는 증가신호가 많이 오염이 되어 있는 것을 볼 수 있다. 잡음의 영향으로 인해 알고리즘 모두 주파수가 증가하는 경향조차 예측할 수 없을 정도로 분석되므로, 순간주파수의 해석결과는 의미가 없게 된다.

이와 같이, 순간주파수를 분석할 때에 잡음의 영향이 신호처리 과정에 크게 영향을 미치게 되며 유용한 신호의 분석이 이루어지기 위하여는 잡음이 배제될 수 있는 조건에만 적용되어야 함을 알 수 있고, 최소한 신호대 잡음비가 40 dB보다 크게 유지해야 한다.

결과적으로, 순간주파수의 계산과정은 입력시키는 신호가 가지고 있는 잡음의 크기에 민감하기 때문에 신호 대 잡음비의 상태를 사전에 알고 있어야 한다. 신호 대 잡음비가 낮아 순간주파수의 분석이 어려울 때에는 입력되는 신호를 협대역 통과필터

(narrow band pass filter)를 통해 일차적으로 분리시킨 후 순간주파수 분석을 수행하면 잡음의 영향을 상대적으로 배제시킬 수 있게 된다.<sup>(9)</sup>

## 5. 결 론

FFT를 이용한 주파수 분석방법의 보완 기법으로 순간주파수 분석을 통한 신호처리방법이 검토되었다. 순간주파수 기법이 적용 가능한 시스템의 설명과 함께 직접미분, 연속위상 및 필터를 이용한 방법등 세가지 알고리즘을 이용한 신호분석이 수행되었으며 알고리즘 상호간의 평가도 수행되었다. 수행결과 필터를 이용한 순간주파수 계산방식이 가장 유리한 것을 알 수 있었다.

또한, 실험측정을 통해 분석되는 신호는 잡음의 영향을 배제할 수 없으므로 순간주파수 분석과정에서 잡음이 미치는 영향분석도 시도되었다. 신호 대 잡음비는 60 dB, 40 dB 및 20 dB에 대한 경우가 검토되었다. 순간주파수를 계산하는 과정이 미분 등 수학적적인 단계를 거치기 때문에, 신호에 내재되어 있는 작은 크기의 잡음이라도 순간주파수의 분석에는 크게 영향을 미치는 것으로 판명되었다. 그러므로 의미있는 순간주파수 분석이 수행되기 위하여는 신호 대 잡음비(S/N 비)가 최소 40 dB 이상이 되어야 하는 등 제한된 조건이 요구된다. 이와 같은 요구조건을 만족시키는 방법중의 하나로 신호처리 단계에 협대역 통과필터 등을 병행 사용하게 되면 신호에 내재되어 있는 잡음의 영향을 부분적으로 배제시킬 수 있을 것으로 판단된다.

## 후 기

본 연구는 저자(김정태)가 한국표준과학연구원 재직기간동안 이루어진 연구임을 밝힙니다.

## 참고문헌

- (1) Mark, W. D., 1972, "Characteristics of Stochastic Transients and Transmission Media: the Method of Power-Moments Spectra," *J. of Sound and Vibration*, 22, pp. 249~295.
- (2) Thrane, N., 1984, *The Hilbert Transform*, B&K Technical Review, No. 3
- (3) Herlufsen, H., 1984, *Dual Channel FFT*

- Analysis* (Part II), pp. 4~18.
- (4) Lyon, R. R., 1987, *Machinery Noise and Diagnostics*, pp. 165~166., Butter worths.
- (5) Lyon, R. H., 1989, *Fault Detection and Identification in Motor/Gearbox Combinations*, Inter Noise '89.
- (6) Boashash, B. etc, 1990, *Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation*, SPIE Vol, 1948, pp. 126~148.
- (7) Mendel, L., 1974, *Interpretation of Instantaneous Frequencies*, AJP, Vol. 42, pp. 840~846.
- (8) Tribolet, J., 1982, "A New Phase Unwrapping Algorithm," *IEEE Trans, or ASSP*, Vol. 25, No. 2.