

(論 文)

2차원 Laplace 변환 경계요소법에 의한 이종재료 접합면 균열의 충격해석

김태규* · 조상봉** · 권재도*** · 최선호***

(1993년 8월 28일 접수)

The Impact Analysis of Interface Crack in Dissimilar Materials using the 2-D Laplace Transformed BEM

Tae Gyu Kim, Sang Bong Cho, Jae Do Kwon and Sun Ho Choi

Key Words : Dissimilar Material(이종재료), Interface Crack(접합면 균열), Dynamic Stress Intensity Factor(동적 응력확대계수), Boundary Element Method(경계요소법 : BEM), Laplace Transformation(라플라스변환), Elastodynamics(동탄성), Impact(충격)

Abstract

For BEM analyses of the impact problems of dissimilar materials, the connected multi-region method using perfect bonded conditions on the interface boundaries was added to two-dimensional Laplace transformed-domain BEM program for a single region analysis. It was confirmed that the BEM results of impact problems of a single-region and multi-regions for a homogeneous isotropic material are agreed well. The two-dimensional Laplace transformed-domain BEM program combined with connected multi-region method was applied to analyse several impact problems of dissimilar materials. Also the feasibility of BEM impact analyses was investigated for dissimilar materials by the analysis of the BEM results for impact problems of dissimilar materials in terms of physical aspects. As for an application, the two-dimensional Laplace transformed BEM concerning impact problems of cracks at the interface of dissimilar materials and the determining process of the dynamic stress intensity factors by extrapolation method are presented in this paper.

1. 서 론

근래, 신재료 및 접합기술의 발달로 인하여 이종 재료를 이용한 구조물들이 급격히 증가하고 있다. 접합재료는 기하학적인 불연속 또는 물성치의 불연

속 등으로 인하여 정하중(static loading) 상태에서는 안전한 설계가 되었다 할지라도 동적하중(dynamic loading)이나 충격하중(impact loading) 상태에서는 예기치 못한 파괴가 발생되기 때문에 이종 재료의 동적문제 및 충격문제의 해석은 공학상 중요한 문제로 대두되고 있다. 동탄성(elastodynamics) 및 충격(impact)문제에 대한 연구로서는 Eringen,⁽¹⁾ Zukas⁽²⁾ 등이 이론 및 실험적인 방법이 있고, 수치해석적인 방법으로서서는 Beskos⁽³⁾ 등

*정회원, 영남대학교 대학원

**정회원, 경남대학교 기계설계학과

***정회원, 영남대학교 기계공학과

의 유한요소법(FEM)이 있으며, Manolis,⁽⁴⁻⁶⁾ Ahmad⁽⁷⁾ 등은 경계요소법(BEM)으로 등방성재료의 동탄성문제에 대해서 연구한 바 있다.

이종재료 접합면 균열문제는 Williams,⁽⁸⁾ Erdogan⁽⁹⁾ 등이 연구한 바 있고, Comninou⁽¹⁰⁾는 접합면 균열선단에서 발생하는 응력 및 변위의 진동(oscillation)현상을 지적하고 이를 해결하기 위한 방법을 제시 하였으며, Yuuki 등^(11,12)은 경계요소법에 의한 이종재료 접합면 균열의 응력확대계수를 구하고 그 효율성을 제시한 바 있다. 한편, 이종재료 접합면 균열에 대한 동탄성문제의 해석은 Kuo,⁽¹³⁾ Chen⁽¹⁴⁾ 등이 유한요소법에 의한 동적 응력확대계수(dynamic stress intensity factor)를 구한 바 있다.

동탄성문제에 대한 경계요소법으로는 Laplace 변환영역법(laplace transformed domain method)과 시간영역법(time domain method)이 있으며, Laplace변환 영역법의 경우에는 시간영역을 주파수영역으로 변환하여 해를 구한 후, 다시 역변환하여 실제 시간영역의 해를 구하게 되므로 총시간 구간의 분할수 만큼의 정탄성문제를 해석해야 하기 때문에 반복계산으로 인한 소요시간이 증가하는 단점은 있으나, 변환영역에서의 경계적분방정식의 형태가 정적상태의 경계적분방정식과 유사한 형태로 표현되므로 정적 경계요소법 프로그램을 그다지 수정하지 않고 동적문제를 해석할 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 등방성재료의 동탄성문제의 해석을 위하여 이미 개발한 Laplace변환 경계요소법 프로그램⁽¹⁵⁾에 다중 영역결합법을 사용하여 이종접합재료의 동적해석이 가능한 프로그램을 작성한 후, 간단한 모델 및 이종접합재 원공문제로 충격내압을 받는 경우에 대하여 경계요소해석을 하여, 그 결과를 검토하고 프로그램의 신뢰성을 검증하였으며, 응용문제로 충격하중을 받는 이종재료 접합면의 균열문제에 대하여 변위외삽법으로 동적 응력확대계수를 구하여 Laplace변환 경계요소법에 의한 이종재료 충격해석의 가능성 및 내포되는 문제점을 검토해 보았다.

2. 기초이론

2.1 동탄성문제의 경계적분방정식과 기본해
동탄성문제의 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$(C_L^2 - C_T^2) u_{i,jj} + C_T^2 u_{i,jj} + \frac{b_i}{\rho} = \ddot{u}_i \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, b_i 는 체적력이다. 그리고, 전 논문문을 통하여 첨자 $i, j = x, y$ 를 표시한다. 또한, C_L 는 팽창파의 속도(dilatational wave), C_T 는 회전파의 속도(rotational wave)이고 식(2)와 같으며, λ 와 μ 는 Lamé의 상수이다.

$$C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

초기조건 및 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

초기조건 :

$$\begin{aligned} u_i(X, t) &= u_i^0(X, t_0) \\ \dot{u}_i(X, t) &= \dot{u}_i^0(X, t_0) \text{ for } t = t_0, \Omega + \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, u_i 는 임의시간의 변위, u_i^0 는 초기변위, \dot{u}_i^0 는 초기속도이고, t 는 시간, t_0 는 초기시간, X 는 관찰점(field point), Γ 는 영역의 전 경계, Ω 는 영역의 내부를 의미한다.

경계조건 :

$$\begin{aligned} u_i(X, t) &= \bar{u}_i(X, t_0) \quad \text{for } t > t_0 \text{ on } \Gamma_1 \\ P_i(X, t) &= \sigma_{ij} n_j = \bar{P}_i(X, t) \text{ for } t > t_0 \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, u_i 는 변위, P_i 는 표면력, n_j 는 법선방향에 대한 방향여현이다. 그리고 Γ_1 은 변위가 주어진 경계이고, Γ_2 는 표면력이 주어진 경계이다. 식(1)을 Laplace변환하면 다음과 같이 되며, 이것은 정탄성문제의 지배미분방정식과 그 형태가 유사하다. 즉,

$$(C_L^2 - C_T^2) U_{i,jj} + C_T^2 U_{i,jj} + \frac{B_i}{\rho} - S^2 U_i + S u_i^0 + \dot{u}_i^0 = 0 \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U_i(X, S) &= \int_0^\infty u_i(X, t) e^{-st} dt \\ B_i(X, S) &= \int_0^\infty b_i(X, t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (6)$$

이고, 또, $S = a + iw$ 이며 a, w 는 Laplace 파라미터이다. 경계조건은 Laplace변환 영역에서

$$\begin{aligned} U_i(X, S) &= \bar{u}_i(X, S) \text{ on } \Gamma_1 \\ P_i(X, S) &= \bar{P}_i(X, S) \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (7)$$

이며, 경계적분방정식⁽⁴⁾은 식(8)과 같이 되어, 이

것 또한 정탄성문제의 경계적분방정식의 형태와 유사하다. 즉,

$$C_{ij}(Z) U_j(Z, S) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(Z, X, S) U_j(X, S) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(Z, X, S) P_j(X, S) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(Z, X_i, S) Q_j(X_i, S) d\Omega \quad (8)$$

여기서, $Q_j = B_j + (Su_j^0 + \dot{u}_j^0)$ 이며, Z 는 하중점 (loading point), U_{ij}^* , P_{ij}^* 는 Laplace변환 영역에서의 기본해⁽¹⁾이며, C_{ij} 는 경계의 모양에 의해 정해지는 계수로서 정탄성문제에서와 같이 강체평행이동조건을 이용하여 구할 수 있다. 정탄성문제의 경계적분방정식에서 강체평행이동조건을 이용하면 C_{ij} 는 유한판과 무한판에서 각각 다음과 같이 주어진다.

$$C_{ij}(Z) = - \int_{\Gamma} T_{ij}(Z, X) d\Gamma \quad (\text{Finite plate}) \quad (9)$$

$$C_{ij}(Z) = \delta_{ij} - \int_{\Gamma} T_{ij}(Z, X) d\Gamma \quad (\text{Infinite plate}) \quad (10)$$

여기서, T_{ij} 는 통상의 정탄성 경계요소법에 사용되는 기본해로 Kelvin해의 표면력의 기본해이고, δ_{ij} 는 Kronecker델타이다.

2차원 동탄성문제에서 변위의 기본해 U_{ij}^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$U_{ij}^*(Z, X, S) = \frac{1}{\alpha\pi\rho C_T^2} (\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) \quad (11)$$

여기서, r 는 하중점과 관찰점의 거리이고, 2차원 동탄성문제에서는

$$\alpha = 2$$

$$\psi = K_0 \left(\frac{Sr}{C_T} \right) + \frac{C_T}{S_T} \left\{ K_1 \left(\frac{Sr}{C_T} \right) - \left(\frac{C_T}{C_L} \right) K_1 \left(\frac{Sr}{C_L} \right) \right\}$$

$$\chi = K_2 \frac{Sr}{C_T} - \frac{C_T^2}{C_L^2} K_2 \left(\frac{Sr}{C_L} \right) \quad (12)$$

이며, K_0, K_1, K_2 는 제2종 수정 Bessel함수이다.⁽⁷⁾ 또한, 표면력의 기본해 P_{ij}^* 는 다음과 같다.

$$P_{ij}^*(Z, X, S) = \rho \left[(C_L^2 - 2C_T^2) U_{i,m}^* n_j + C_T^2 (U_{i,k}^* + U_{i,k,j}^*) n_k \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r}\chi \right) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_i) \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r}\chi (n_j r_{,i} - 2r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{C_L^2}{C_T^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r}\chi \right) r_{,i} n_j \right] \quad (13)$$

2.2 Laplace역변환 (Durbin의 수치 역변환)⁽¹⁶⁾

Laplace변환 영역의 경계적분방정식의 해를 수치 역변환하는 과정은 Durbin⁽¹⁶⁾에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$f(t_j) = \frac{2e^{aj\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \text{Re}\{F(a)\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{NSUM-1} F(S_k) \left(\cos kj \frac{2\pi}{N} + i \sin kj \frac{2\pi}{N} \right) \right\} \right] \quad (14)$$

여기서, $t_j = j\Delta t = jT/N$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$), T 는 관심을 가지고 조사하려는 전 시간구간, N 는 총시간 분할수, L 은 계산정도를 높이기 위한 임의의 정수이고, $NSUM = L \times N$ 으로 Laplace영역(주파수영역)에서 계산해야 할 총 회수이다. 또한,

$$S_k = a + ik \frac{2\pi}{T},$$

$$F(S_k) = \text{Re}\{F(S_k)\} + i \text{Im}\{F(S_k)\} \quad (15)$$

이고, Re 은 실수부, Im 는 허수부를 의미한다. 식 (14)에서 $C(j) = e^{aj\Delta t}$, $W = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N} = \exp(i \frac{2\pi}{N})$ 라 하면, $W^{jk} = W^{j(k+ln)}$, ($l=0, 1, 2, \dots, L-1$) 이기 때문에 식 (14)는 다음과 같이 된다.

$$f(t_j) = \frac{2}{T} C(j) \left[-\frac{1}{2} \text{Re}\{F(a)\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (A(k) + iB(k)) W^{jk} \right\} \right] \quad (16)$$

여기서,

$$A(K) = \sum_{l=0}^{L-1} \text{Re} \left[F \left\{ a + i(k+ln) \frac{2\pi}{T} \right\} \right]$$

$$B(K) = \sum_{l=0}^{L-1} \text{Im} \left[F \left\{ a + i(k+ln) \frac{2\pi}{T} \right\} \right] \quad (17)$$

이다.

3. 동탄성문제의 이종재료에 대한 영역결합법

Fig. 1과 같이 서로 다른 물성치를 갖는 재료가 접합되어 있는 경우, 경계요소법에 의한 해석을 위해서는 각 영역에 대한 경계적분방정식으로 부터

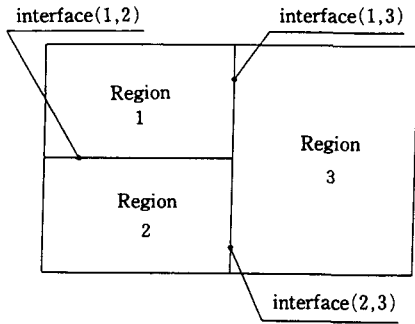


Fig. 1 Shape of multi-regions

연립방정식을 세우고 접합면의 변위 및 표면력의 완전결합조건을 이용하여 전체 연립방정식을 만들어 해석한다. 이 방법을 영역결합법이라 하고 정탄성문제에서는 널리 이용되고 있다. 동탄성문제에서도 이와 같은 접합면의 완전결합조건을 Kuo 등⁽¹³⁾이 이용하고 있고, 본 연구에서도 이 방법을 적용하였다.

Fig. 1과 같이 서로 다른 3가지 물성치를 같은 재료가 접합되어 있는 경우에 대한 예로 1영역에 대해서는 경계적분방정식으로 부터 다음식이 얻어진다.

$$[H_{12} \ H_{13} \ H_{11}] \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{13} \\ u_{11} \end{pmatrix} = [G_{12} \ G_{13} \ G_{11}] \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{13} \\ t_{11} \end{pmatrix} \quad (18)$$

한편, 2영역에 대해서는 다음식이 주어지며,

$$[H_{22} \ H_{23} \ H_{21} \ H_{22}] \begin{pmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = [G_{22} \ G_{23} \ G_{21} \ G_{22}] \begin{pmatrix} t_{22} \\ t_{23} \\ t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} \quad (19)$$

3영역에 대해서는 다음식으로 표현된다.

$$[H_{33} \ H_{31} \ H_{32}] \begin{pmatrix} u_{33} \\ u_{31} \\ u_{32} \end{pmatrix} = [G_{33} \ G_{31} \ G_{32}] \begin{pmatrix} t_{33} \\ t_{31} \\ t_{32} \end{pmatrix} \quad (20)$$

여기서, 하첨자 ($i, j=1, 2, 3$)는 각각의 영역을 표시하고 $i=j$ 이면 접합되지 않는 경계면을 나타내고, $i \neq j$ 이면 접합경계면(interface)을 나타낸다. 그리고 접합경계상의 변위와 표면력의 완전결합조건은 식(21)과 같이 쓸 수 있으며, 이 때 u_{ij} 는 i 영역을 기준으로 j 영역과 결합된 경계면의 변위를

나타낸다.

접합경계면에서의 완전결합조건은 다음과 같다.

$$\begin{matrix} u_{ij} = u_{ji} \\ t_{ij} = -t_{ji} \end{matrix} \Big\} i \neq j \quad (21)$$

식(21)을 이용하여 (18), (19), (20)식을 다시 정리하고, 전체행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{21} & 0 & H_{22} & H_{23} & 0 \\ 0 & 0 & H_{31} & 0 & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{21} & 0 & G_{22} & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{31} & 0 & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{22} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix} \quad (22)$$

여기서, 변위와 표면력을 미지 및 기지 부분으로 분리하면 다음과 같고,

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{ij} \\ u_{ij} \end{pmatrix} \quad t_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{t}_{ij} \\ t_{ij} \end{pmatrix} \quad (23)$$

식(22)는 식(24)가 된다. 여기서 (-)는 기지량을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \bar{H}_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{21} & 0 & H_{22} & \bar{H}_{22} & H_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{31} & 0 & 0 & H_{32} & H_{33} & \bar{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ \bar{u}_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{22} \\ \bar{u}_{22} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ \bar{u}_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{21} & 0 & \bar{G}_{22} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{31} & 0 & 0 & -G_{32} & \bar{G}_{33} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}_{11} \\ t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ \bar{t}_{22} \\ t_{22} \\ t_{23} \\ \bar{t}_{33} \\ t_{33} \end{pmatrix} \quad (24)$$

식(24)를 정리하면 다음식이 된다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} - G_{11} & H_{12} - G_{12} & H_{13} - G_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{21} & G_{21} & 0 & 0 & H_{22} - G_{22} & H_{23} - G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31} & G_{31} & 0 & 0 & H_{32} & G_{32} & H_{33} - G_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ t_{11} \\ u_{12} \\ t_{12} \\ u_{13} \\ t_{13} \\ u_{22} \\ t_{22} \\ u_{23} \\ t_{23} \\ u_{33} \\ t_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} - \bar{H}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_{22} - \bar{H}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{33} - \bar{H}_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}_{11} \\ \bar{t}_{22} \\ \bar{t}_{33} \\ \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{22} \\ \bar{u}_{33} \end{pmatrix} \quad (25)$$

식(25)로부터 변위 및 표면력의 값을 전부 구할 수 있고, 특히 영역결합면에서는 변위 및 표면력의 값을 동시에 구할 수 있음을 알 수 있다.

4. 동탄성문제의 이중재료에 대한 응력 확대계수의 결정법

표면력이 자유인 경계조건을 가지는 이중재료 접합면 균열의 균열선단 근방의 응력분포를 Fig. 2에서와 같이 극좌표계로 표시하고, 진동특이응력은 접합면 균열에서 발생하는 것으로 감안되며,⁽⁹⁾ 동적균열응력장의 식은 정적상태의 균열응력장의 식과 같은 형태⁽¹³⁾로서 응력확대계수가 시간의 함수로 다음같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \frac{1}{\sqrt{r}} B_{ij}(\theta) \sin(\alpha \ln \frac{r}{l}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{r}} C_{ij}(\theta) \cos(\alpha \ln \frac{r}{l}) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, t 는 시간이고, α 는 두 재료간의 상수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{(\kappa_1 + \frac{1}{\mu_1}) / (\kappa_2 + \frac{1}{\mu_2})}{(\kappa_2 + \frac{1}{\mu_2}) / (\kappa_1 + \frac{1}{\mu_1})} \right] \quad (27)$$

$$\kappa_i = \begin{cases} (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i) & \text{(Plane stress)} \\ (3 - 4\nu_i) & \text{(Plane strain)} \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (28)$$

여기서, μ, ν 는 전단 탄성계수와 푸아송의 비이고, l 는 임의의

균열의 길이를 표시하며, r 는 균열선단으로부터의 거리이다. Fig. 2에서 $\theta=0^\circ$ 일 때 응력분포는 식(29)와 같다.

$$\sigma_y(t) + i\tau_{xy}(t) = K_1(t) + iK_2(t) (2\pi r)^{-1/2} (r/l)^{i\alpha} \quad (29)$$

여기서, $K_1(t) + iK_2(t)$ 는 접합면 균열의 복소 응력 확대계수이다. 접합면 균열의 균열선단 근방의 상대변위 δ_y, δ_x 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta_y(t) + i\delta_x(t) = & \frac{K_1(t) + iK_2(t)}{2(1 + 2i\alpha) \cosh(\alpha\pi)} \left[\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right] \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{l} \right)^{i\alpha} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{단, } \delta_j(t) = u_j(r, \pi, t) - u_j(r, -\pi, t), \quad (j=x, y) \quad (31)$$

균열면의 경계조건에서 표면력을 0으로 하였을 때 접합면 균열선단 부근에서 응력의 진동특이성이 나타나고, 변위분포는 오버랩핑(overlapping) 현상이 나타난다. 이러한 현상을 보완하기 위해 새로운 접합계면 균열 모델이 제안되었다.⁽¹⁰⁾

접합면상의 응력분포를 수치해석적 방법으로 구하기 위해서는 식(29)에서 다음과 같이 외삽법을 이용하면 동적 응력확대계수를 계산할 수 있다. 동적문제에서 응력확대계수는 시간의 항이 추가되는 형식으로 표현되므로 이하의 식에서 시간 (t)를 생

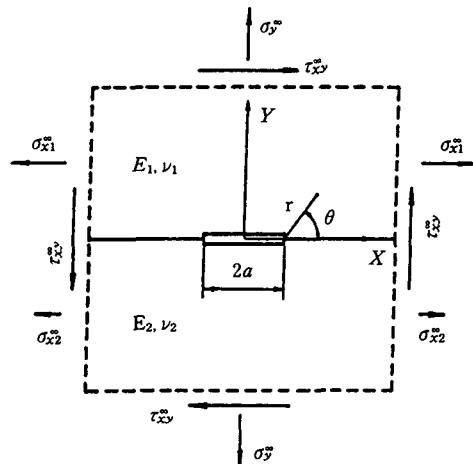


Fig. 2 An interface crack in an infinite dissimilar plate

략하여 표기하기로 하면 다음과 같다.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = K_t \quad (32)$$

여기서, 접합면 균열의 거동을 특성화할 수 있도록 K_1, K_2 로 분리할 필요가 있고, 이런 목적을 위하여 K_2/K_1 는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$\frac{K_2}{K_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\tau_{xy}/\sigma_y) - \tan Q}{1 + (\tau_{xy}/\sigma_y) \tan Q} \quad (33)$$

여기서,

$$Q = a \ln(r/l) \quad (34)$$

이다, 한편, 균열면의 상대변위량을 구하기 위한 식(30)을 이용하여도 다음과 같이 K_2/K_1 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\delta_y^2 + \delta_x^2}}{\sqrt{2\pi r}} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1+4\alpha^2} \cosh(\alpha r)} \left[\frac{K_1+1}{\mu_1} + \frac{K_2+1}{\mu_2} \right] \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - (\delta_y/\delta_x)(H_2/H_1)}{(\delta_y/\delta_x) + (H_2/H_1)} \quad (36)$$

여기서,

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\tan Q - 2\alpha}{1 + 2\alpha \tan Q} \quad (37)$$

이다. 위의 식에서 등방균질재료의 경우와 같은 방법으로 변위를 이용하여 동적 응력확대계수를 구하면 정밀도가 높아진다.

5. 수치해석 및 검토

본 논문에서, 수치해석에 사용한 2차원 Laplace 변환 동탄성 경계요소법 프로그램은 2차 요소를 사용하였고, 표면력이 불연속인 경우에는 2중 절점을 사용하였으며, 초기속도, 초기변위 및 체적력은 없는 ($b_i=0$) 것으로 간주 하였다. 또한 Laplace역변환은 Durbin⁽¹⁶⁾의 알고리즘을 이용하였고, 경계상의 응력도 계산 가능하고, 정탄성문제의 해석도 $NSUM=L \times N=1$ 일 때로 해석이 가능함을 알 수 있다. 또한, $S=a+i\omega$ 의 a 와 $NSUM$ 을 여러가지로 변경하여 계산해 본 결과 $a=6/T$ 으로 계산하는 것이 적당한 것으로 판단되어 본 연구는 모두가 조건하에서 실시하였다. 본 논문에서 사용한 컴

퓨터는 Work-station(Sun, spark station 2) 기종으로 2영역으로 결합된 모델의 분할요소수가 20요소인 경우의 문제를 계산하는데 약 15분이 소요되었으며, 40요소인 경우에는 약 3시간이 걸렸다.

5.1 프로그램의 검증

영역결합법에 의한 경계요소법 프로그램의 타당성을 확인하기 위하여 단일영역에 의한 동탄성 경계요소 해석결과와 영역결합법으로 해석한 결과와의 일치여부를 확인하였다.

우선, 무한판내의 반경이 2cm인 원공이 충격내압을 받는 경우를 평면응력 상태에서 영역결합법과 단일영역으로 해석하였다. Fig. 3의 형상에서 제1영역은 원공의 둘레를 총 20요소가 되는 유한판으로 하고 제2영역은 10요소가 되는 무한판인 경우로 하여 두 영역이 완전 접합된 경계조건으로 하였으며, 각 영역의 물성치는 밀도 $\rho_1=\rho_2=0.266 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{Sec}^2/\text{m}^4$, 영률 $E_1=E_2=0.7056 \times 10^{10} \text{ N}/\text{m}^2$, 푸아송비 $\nu_1=\nu_2=0.34$ 로 등방균질재료인 알루미늄 재료에 대해 계산하였다. 조사하려는 총 시간 구간은 $0 \sim 3.0 \times 10^{-4} \text{ sec}$ 까지로 40스텝($NSUM=40$)으로 분할하여 계산하였다. Fig. 3의 결과는 1, 2영역의 재료 물성치를 동일조건으로 하였을 때 원공 경계상에 있는 점의 반경방향의 변위(u_r)를 시간(t)에 대해 도시한 것이다. 무한시간 일정내압 $P_0=1.0 \times 10^4 \text{ N}/\text{m}^2$ 이 작용했을 때 시간변화에 따른 변위의 결과는 정적상태의 변위보다 크게 나타나고, 일정 시간이 경과한 후에는 정적상태의 결과로 수렴하는 것을 알았고, 반경 $R=2 \text{ cm}$ 보다 $R=3 \text{ cm}$ 인 지점의 변위가 작게 나타나는 현상도 알 수 있었다. 이러한 결과는 물리적으로도 타당한 현상

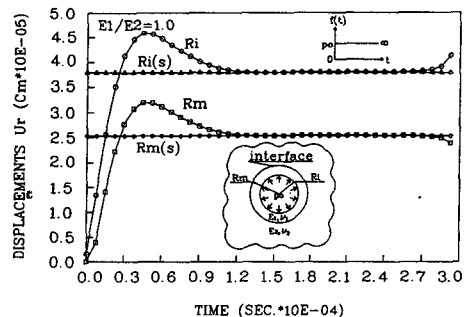


Fig. 3 Radial displacements at boundaries of radius R_1 and R_m of the circular hole in the infinite plate subjected to an uniform impact pressure

이고, 단일영역의 동탄성 해석결과⁽¹⁵⁾와 잘 일치하며, 정탄성문제의 이론해⁽¹⁷⁾와도 잘 일치함을 확인

할 수 있었다. Fig. 4는 같은 해석결과에서 R_i , R_m 지점의 경계상의 응력을 도시한 것으로 시간영역법의 경계요소법에 의한 결과⁽¹⁸⁾와 정성적으로 일치함을 알았다.

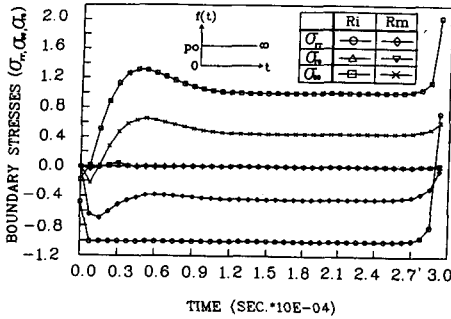


Fig. 4 Boundary stresses of the circular hole in the infinite plate subjected to a uniform impact pressure

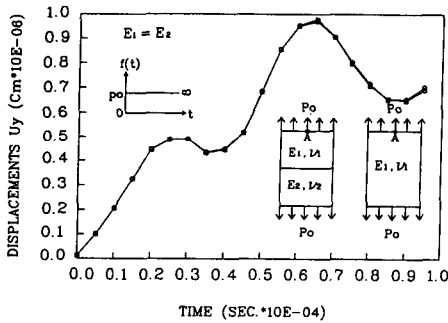


Fig. 5 Displacements of y direction at the point A in a rectangular plate subjected to a uniform impact tension

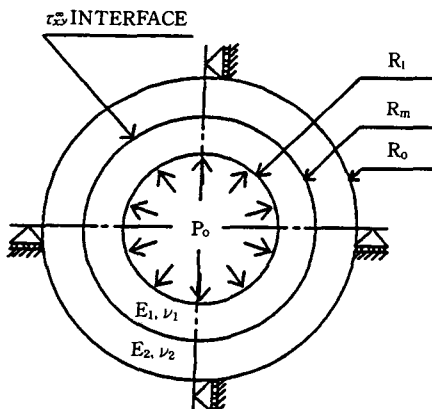


Fig. 6 Shape of a circular hole in the finite plate subjected to a uniform impact pressure

둘째, 2영역으로 접합된 사각형 유한판 ($H=4$ cm, $W=2$ cm)이 충격인장응력을 받을 때 요소수를 각 영역별로 20요소씩 분할하고, 각 영역의 물성치는 밀도 $\rho_1 = \rho_2 = 0.266 \times 10^4$ N·Sec²/m⁴, 영율 $E_1 = E_2 = 0.7056 \times 10^{10}$ N/m², 푸아송비 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 인 등방균질재료에 대해서 계산하였다. 충격 인장하중은 상하 1.0×10^4 N/m²의 표면력이 작용하도록 하고, 조사하려는 총 시간구간은 $0 \sim 1.0 \times 10^{-4}$ sec, NSUM=20으로 하여 평면응력 상태하에서 해석하였다. Fig. 5의 해석결과는 단일영역 사각형 유한판 문제의 경계요소해석 결과와 동시에 나타낸 것으로 두 결과가 잘 일치함을 보여주고, 특히 NSUM=1인 정탄성인 경우는 이론해와 잘 일치함을 알 수 있었다. 그리고 Fig. 5의 형상을 상용의 유한요소법(FEM) 프로그램(ANSYS ver.4.4A)으로도 해석한 결과 본 경계요소법의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

셋째, 또 다른 유한판 문제로서 Fig. 6의 형상과 같이 두 재료가 접합된 관(tube)이 충격내압을 받는 경우에 대해서 해석하였다. 즉, 1, 2영역이 각각 40요소로 분할되고, 두 재료의 물성치가 같은 알루미늄 재료에 대해서 평면변형을 상태하에서 계산하였다. Fig. 7은 영역결합법에 의한 해석결과와 단일영역의 해석결과를 관의 내경 $R_i=2$ cm, 접합경계면 $R_m=3$ cm과 외경 $R_o=4$ cm 지점에서의 시간변화에 따른 반경방향의 변위 u_r 를 나타낸 것이다. 관의 내·외경 지점에서 단일영역과 영역결합

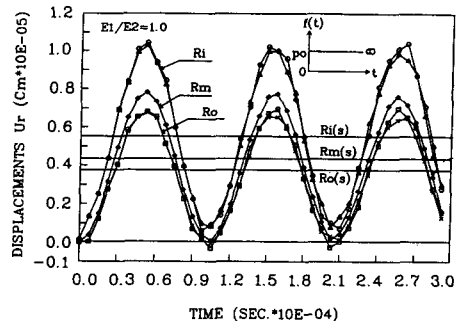


Fig. 7 Boundary radial displacements of the circular hole in the finite plate subjected to a uniform impact pressure

법의 결과가 잘 일치함을 확인할 수 있었고, 접합 경계면에서의 변위는 중간값으로 나타나므로 예상되어지는 결과와 동일함을 알 수 있었다. 실선부분은 R_i , R_m , R_o 지점의 정탄성의 이론해^(17,19)이다.

5.2 이종재료에 대한 충격문제의 해석

앞 절에서와 같이 영역결합에 의한 동탄성 경계요소법 프로그램을 검증한 후 다음과 같은 몇 가지의 이종재료에 대한 충격문제를 계산하였다.

먼저, Fig. 3에서와 같은 형상의 무한판 원공의 충격 내압문제를 각 영역별로 재료의 물성치가 다른 이종재료의 문제로 해석하였다. Fig. 8은 1, 2 영역 재료의 영률비 $E_1/E_2=1, 1.5, 2, 3, 10, 50$ 로 변화시키고, 밀도 $\rho_1=\rho_2=0.266 \times 10^4 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$, 푸아송비 $\nu_1=\nu_2=0.34$ 인 경우 무한시간 일정 내압이 작용할 때, 접합 경계면인 $R=3 \text{ cm}$ 지점의 원공경계상의 반경방향의 변위(u_r)를 시간(t)에 대

해 나타낸 것이다. 이 결과도 Fig. 3과 유사한 경향을 나타내고 있으며, 1영역 재료의 물성치가 점차 커짐에 따라 시간변화에 따른 반경방향의 변위가 점차 작아지는 현상으로서, 이는 물리적으로 타당한 결과이고 또 내압이 작용하는 부분인 $R=2 \text{ cm}$ 인 지점보다도 반경방향의 변위가 전체적으로 작게 나타남을 알 수 있었다.

Fig. 9는 Fig. 3과 같은 형상의 무한판 원공문제에서 1, 2재료의 영률비 $E_1/E_2=2$ 인 이종재료일 때 충격하중이 무한시간 일정하게 작용하는 경우와 장방형, sine형 및 삼각형 형상인 펄스형으로 충격내압이 작용하였을 때 1, 2재료의 접합 경계면인 $R=3 \text{ cm}$ 지점에서의 반경방향의 변위를 나타내었다. 시간변화에 따른 최고변위는 하중의 크기가 일정형, 장방형, sine형 및 삼각형 순서로 나타나며, 이 결과는 물리적으로 예측되어지는 결과라 생각되고 또 무한판 원공이 내압을 받는 등방균질재료의 결과에서 나타난 현상⁽¹⁵⁾과도 정성적으로 유사함을 알 수 있었다.

다음은 유한판 모델인 Fig. 6의 형상과 같이 두 재료가 서로 다른 이종재료인 관(tube) 문제로서 영률비 $E_1/E_2=1, 1.5, 2, 10$, 밀도 $\rho_1=\rho_2=0.266 \times 10^4 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$, 푸아송비 $\nu_1=\nu_2=0.34$ 이고, 관의 내부지점 $R_i=2 \text{ cm}$, 접합경계면 $R_m=3 \text{ cm}$, 외부지점 $R_o=4 \text{ cm}$ 일 때 시간변화에 따른 접합경계면에서의 반경방향의 변위(u_r)를 Fig. 10에 나타내고 있다. 이 결과에서 영률의 비가 커짐에 따라 반경방향의 변위가 작게 나타나며, 변위의 진동주기가 빨라지는 현상과 반경방향으로 거리가 멀어짐에 따라 즉, R_i, R_m, R_o 의 순으로 변위가 작아

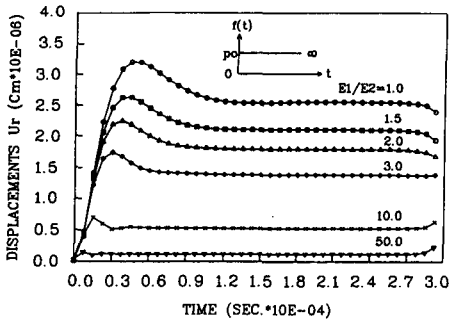


Fig. 8 Radial displacements at the boundary of radius R_m of the circular hole in the infinite plate subjected to an uniform impact pressure

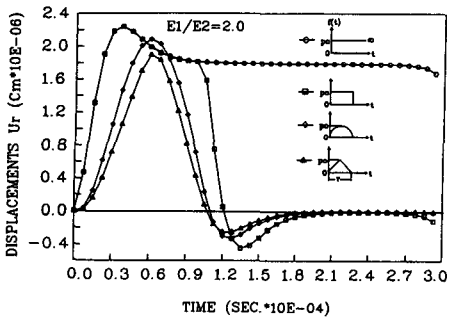


Fig. 9 Radial displacements at the boundary of radius R_m of the circular hole in dissimilar materials of the infinite plate subjected to various impulses

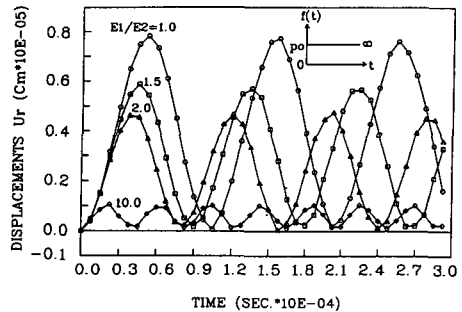


Fig. 10 Radial displacements at the boundary of radius R_m of the circular hole in the dissimilar finite plate subjected to an uniform impact pressure

지는 결과를 관찰할 수 있었다.

5.3 이종재료 균열에 대한 충격문제의 해석

앞 절에서 영역결합에 의한 동탄성 경계요소법 프로그램의 유효성 검증과 이종재료에 대한 충격문제를 계산하여 보았고, 이러한 문제보다 응력해석상 어렵다고 생각되어지는 이종재료 접합면 균열의 충격문제에 대해서 해석하였다.

먼저, 균열문제에 대한 경계요소법의 결과가 맞는가를 검증하기 위한 방법으로 이종재료 정탄성 문제에 대한 기존의 결과⁽¹¹⁾와 비교검증을 해 보았다. 중앙균열을 가진 사각형 유한판이 1, 2영역으로 완전 접합되고, 균열면과 평행한 외부면에서 인장하중을 받는 경우 대칭성을 고려하여 판의 1/2($H=4\text{ cm}$, $W=2\text{ cm}$, $a/W=0.5$)을 각 영역별로 23요소씩 분할하고, 1, 2영역의 영률비 $E_1/E_2=1, 2, 3, 4, 10, 100$ 으로 변화시키고, 푸아송비 $\nu_1=\nu_2=0.3$ 인 이종재료 일 때 평면응력 상태에서 해석하였다. Table 1은 기존의 결과⁽¹¹⁾와 비교하여 나타낸 것으로 본 논문의 결과와 약간의 오차가 발생하는데 이것은 해석모델에서 이종재료의 균열문제에서는 단일영역보다 2중 절점의 수가 2배 많아지는 관계로 적분오차가 급격히 증가하는 현상이 발생된다. 수치계산 과정에서 이러한 적분오차를 줄이기 위한 방편으로 하중점과 관찰점의 적절한 거리를 유지하기 위해 절점요소수를 적게 배치하고, 서브요소(sub element)의 배치도 줄여서 계

산하였으며 특히, 정탄성문제에서 통상 사용하는 균열끝의 특이요소를 사용하지 않은 관계로 정도가 떨어진 것으로 생각된다.

이러한 정탄성의 결과를 바탕으로 위의 모델에서 동적 문제로 해석해 보았다. 1, 2영역의 영률비 $E_1/E_2=1, 2, 3$ 의 크기로 변화시키고 푸아송비 $\nu_1=\nu_2=0.34$ 일 때 평면변형률 상태에서 해석하였다. 충격인장하중은 상하 $1.0 \times 10^4\text{ N/m}^2$ 의 표면력이 작용하도록 하고, 조사하려는 총 시간 구간을 $0 \sim 1.0 \times 10^{-4}\text{ sec}$ 까지로 $NSUM=40$ 으로 해석하였다. 이종재료 접합면 균열의 무차원 응력확대계수는 정적상태의 식과 같은 형태로 나타낼 수 있으므로 다음과 같다.

$$F_i = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} / \sigma \sqrt{\pi a} = K_i / \sigma \sqrt{\pi a} \quad (37)$$

Fig. 11에서 영률의 비가 커짐에 따라 시간변화에 따른 동적 응력확대계수가 크게 나타나고 등방성재료의 경계요소법 해석결과와 전반적인 경향이 동일한 것으로 보인다. 그러나 시간의 경과에 따라 응력확대계수의 변화가 급격하게 진동하는 현상이 발생하는데 이종재료 동탄성문제는 정탄성문제보다 특이성이 강하고, 균열선단에 많은 요소수의 배치로 절점간의 거리가 너무 짧아서 적분시 발생하는 약간의 오차로 생각되어 진다. 동탄성문제에서도 정탄성문제와 마찬가지로 균열 끝에서 사용하는 특이요소를 사용하지 않았으며 특히, 동탄성문제의 기본해는 특이성이 강한 해로서 특이요소를 사용하면 하중점과 관찰점의 거리가 짧아지기 때문에 큰 오차가 발생된 바 있었다. Fig. 12는 Fig. 11인 경우에서 K_2/K_1 의 결과를 나타낸 것으로서, 영률비

Table 1 Nondimensional stress intensity factors of a central interface crack in a finite dissimilar plate (upper: $F_1=K_1/\sigma\sqrt{\pi a}$, lower in () : K_2/K_1)

a/W	0.5	
	Yuuki's results ⁽¹¹⁾	Present results
E_2/E_1		
1	1.1867*	1.14052
2	1.183(-0.066)	1.13627(-0.06435)
3	1.176(-0.099)	1.13079(-0.09643)
4	1.170(-0.118)	1.12608(-0.11524)
10	1.149(-0.161)	1.10977(-0.15672)
100	1.124(-0.191)	1.08773(-0.18682)

*Isida's results⁽²⁰⁾

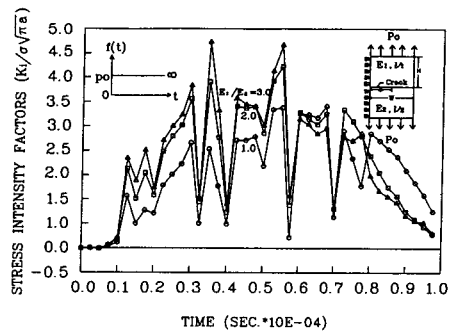


Fig. 11 Nondimensional stress intensity factors of a central interface crack in the finite dissimilar plate subjected to an uniform impact load against time

$E_1/E_2=1$ 인 등방성재료에서는 K_2/K_1 의 비가 0에 수렴해야 하는데 시간초기 및 중간부분에 큰 오차가 발생되었다. 이 현상은 K_1, K_2 각각의 값이 컴퓨터에서 처리되는 유효 자리수 이하에서 큰 오차가 발생하는 경향을 보였고, 이러한 각각의 오차값을 K_2/K_1 의 비로 나타내게 되면, 오차값이 큰 일 부분에서는 급격한 크기의 절대치로 나타나게 되는 것으로 사료된다. 그리고 Fig. 13은 Fig. 11과 같은 형상의 문제에서 영률비 $E_1/E_2=2$ 인 이중재료일 때 조사하려는 총 시간 구간을 $0 \sim 1.0 \times 10^{-4}$ sec까지로 하고 충격 인장하중을 펄스형인 장방형, sine형 및 삼각형으로 $0 \sim 0.5 \times 10^{-4}$ sec까지의 시간 구간으로 펄스파를 작용하였을 때, 1, 2재료의 균열면에서의 시간변화에 따른 동적 응력확대계수를 나타낸 것으로서 장방형, sine형 및 삼각형의 하중형태에 따른 최고변위가 예상되어지는 것과 같은 순

서의 크기로 나타나고 있음을 보여주고 있다.

해석과정상의 문제점으로, 다소 복잡한 모델에 있어서는 일반적으로 절점요소수를 많이 배치시키며, 균열문제 등과 같은 복잡한 모델의 해석에 있어서는 균열선단 주위에 특이요소를 사용하여 정도를 향상시키고 있다. 그러나 본 논문에서는 2중 절점을 사용하는 프로그램을 작성하였기 때문에 2중 절점에서 2가지 절점번호가 부쳐지는 관계로 하중점 번호를 포함하는 요소의 특이적분은 피할 수 있으나 다른쪽 요소의 특이적분은 피하지 못하게 되었다. 이러한 결과로 인해 하중점과 관찰점의 거리 (r)가 너무 짧아져 적분시 오차를 크게 발생시키는 원인이 되었고, 특히 영역결합법에 의한 이중재료의 균열충격문제에 대해서는 2중 절점의 수가 단일영역보다 2배 많아지는 관계로 적분오차에 의해 해석결과가 상당한 오차를 나타내는 현상이 있었다. 이와같이 2중 절점수가 많아지고 요소수가 많이 배치되는 균열충격문제 등에서는 해석상의 난점이 있으므로 향후 이 부분에 대한 연구가 고려되어야 할 것으로 생각된다.

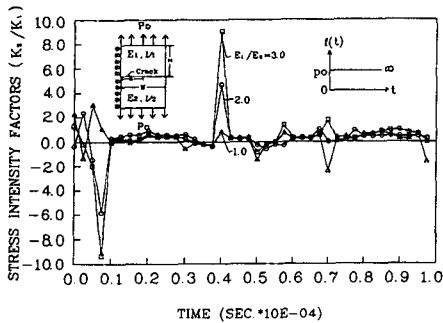


Fig. 12 Nondimensional stress intensity factors of a central interface crack in the finite dissimilar plate subjected to an uniform impact load against time

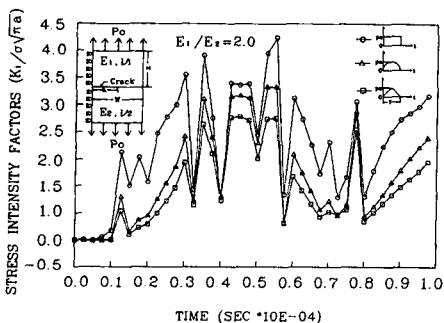


Fig. 13 Nondimensional stress intensity factors of a central interface crack in the finite dissimilar plate subjected to various impulses

6. 결 론

Laplace변환 2차원 경계요소법에 의한 이중재료 충격문제의 수치해석결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 이중재료의 충격문제를 해석하기 위하여 기존의 단일영역 2차원 Laplace변환 경계요소법 프로그램에 접합경계면에서 완전결합조건을 이용한 다중 영역결합법을 부가하여 이중재료의 동적문제가 해석가능하도록 프로그램을 작성하였다.

(2) 이중재료의 해석에 2차원 Laplace변환 경계요소법 프로그램을 응용하여 몇가지 모델을 해석한 결과를 물리적인 측면에서 타당성을 분석하여 보았고, 이중재료의 충격해석이 가능함을 확인할 수 있었다.

(3) 이중재료의 균열문제와 같이 응력해석상 복잡한 문제에서는 영역별 분할요소수가 급격히 증가하고, 2중절점의 수가 단일영역보다 2배 많아지는 관계로 적분시 상당한 오차가 발생하므로 균열충격문제에서 신뢰성있는 결과를 얻기 위해서는 향후 이 부분에 대한 연구가 고려되어야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

- (1) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., 1975, *Elastodynamics*, Vols. 1 and 2, Academic Press, New York.
- (2) Zukas, J. A. et. al., 1982, *Impact Dynamics*, John Wiley & Son.
- (3) Beskos, D. E. and Michael, A. Y., 1983, *Solution of Plane Transient Elastodynamic Problems by Finite Elements and Laplace Transform*, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, U.S.A.
- (4) Manolis, G. D. and Beskos, D. E., 1981 "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, No. 17, pp. 573~599.
- (5) Manolis, G. D., 1983, "A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, No. 19, pp. 73~91.
- (6) Manolis, G. D. and Beskos, D. E., 1988, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Academic Division of Unwin Hyman Ltd.
- (7) Ahmad, S., 1986, *Linear and Nonlinear Dynamic Analysis by Boundary Element Method*, Ph. D. thesis, State Univ. of New York at Buffalo.
- (8) Williams, M. L., 1959, *The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media*, Bull. Seism. Soc. Am. 49, pp. 199~204.
- (9) Erdogan, F., 1965, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks," *J. Appl. Mech.*, 87, pp. 403~410.
- (10) Comninou, M., 1977, "The Interface Crack," *J. Appl. Mech.*, 44, pp. 631~636.
- (11) Yuuki, R. and Cho, S. B., 1989, "Efficient Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials," *Engng. Frac. Mech.*, Vol. 34, No. 1, pp. 179~188.
- (12) 結城良治, 1993, "界面の力學," 培風館, pp. 1~160.
- (13) Kuo, A. Y., 1984, "Transient Stress Intensity Factors of an Interfacial Crack Between Two Dissimilar Anisotropic Half-Spaces," *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 71~76.
- (14) Chen, W. H. and Wu, C. W., 1981, "On Elastodynamic Fracture Mechanics Analysis of Bimaterial Structures Using Finite Element Method," *Engng. Frac. Mech.*, Vol. 15, No. 1-2, pp. 155~168.
- (15) 조상봉, 김태규, 최선호, 1992, "균열의 충격 해석에 대한 Laplace변환 2차원 경계요소법의 응용," 대한기계학회논문집, 제16권 제5호, pp. 883~890.
- (16) Durbin, F., 1974, "Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method," *Comp. J.*, Vol. 17, No. 4, pp. 371~376.
- (17) 정선모, 1984, "기계설계학 특론," pp. 46~47.
- (18) 山崎光悦, 森 雅弘, 1989, "境界要素法による二次元動弾性問題の直接解法," 日本機械學會論文集(A編), 55卷 519號, pp. 2259~2265.
- (19) Balas, J., Sladek, J. and Sladek, V., 1989, *Stress Analysis by Boundary Element Methods*, Studies in Mechanics 23, ELSERVIER.
- (20) Isida, M. and Noguchi, H., 1983, "An Arbitrary Array of Cracks in Bonded Semi-Infinite Bodies under In-Plane Problems," *Trans. JSME*, Vol. 49-437A pp. 36~45.