

〈論 文〉

확률 유한요소해석법을 이용한 피로수명 및 강도해석

이현우* · 오세종**

(1993년 11월 12일 접수)

Analysis of Fatigue Life and Fracture Toughness Using Probabilistic Finite Element Method

H. W. Lee and S. J. Oh

Key Words : Stress Intensity Factor(응력강도계수), Fracture Toughness(파괴인성), Probabilistic Finite Element Method(확률 유한요소해석법), Crack Length(균열길이)

Abstract

Data which gathered and used in the field of fatigue and fracture mechanics have a lot of uncertainties. In this case, those uncertainties will make scatter band in evaluation of fatigue life and fracture toughness. Thus, the probabilistic analysis of these data will be needed. For determining the fatigue life in mixed mode, using crack direction law and fatigue crack growth law, the problem is studied as a constrained life minimization. Stress intensity factor (SIF) is computed by approximate solution table(Ewalds/Wanhill 1984) and 0th order PFEM. The variance of fatigue life and SIF are computed by differentiation of tabulated approximate solution and 1st order PFEM. And these are used for criterion of design values, principal parameter determination and modelling. The problem of center cracked plate is solved for checking the PFEM model which is influenced by various parameters like as initial crack length, final crack length, two fatigue parameters in Paris Equation and applied stress.

기 호 설 명

a : 균열길이	N : 하중빈도수
a_f : 임계 균열길이	$[B]$: 변형률행렬
a_i : 초기 균열길이	$[f]$: 하중벡터
K : 응력강도계수	H : 시편길이
K_{max} : 최대 응력강도계수	W : 시편폭
K_{min} : 최소 응력강도계수	t : 시편두께
ΔK : 응력강도계수 폭	b_i : i 번째 확률변수
θ : 균열진행각도	u_i : i 번째 절점변위
σ : 작용응력	P_i : 접선방향 분포하중
ζ : 매개변수	P_n : 법선방향 분포하중
	$A_{,n}$: Paris식의 상수
	$f_{,b}$: 함수 f 의 변수 b 에 대한 편미분
	$[K]$: 강성행렬
	$[C]$: 계수행렬

*정회원, 부산대학교 정밀기계공학과

**정회원 부산대학교 대학원 정밀기계공학과

1. 서론

결함을 가진 구조물의 수명에측방법은 요소나 구조물의 형상과 균열이 성장함에 따른 여러인자들의 상호작용이 고려되어야 한다. 따라서 이들 인자들을 고려한 구조물의 정확한 수명예측은 매우 어려운 과제중의 하나이며 각 인자들의 상호작용에 대한 불확정성 등을 고려한 신뢰성 해석은 매우 중요한 연구과제이다. 변동하중을 받는 구조물내에서 성장하는 균열을 고려한 수명예측 모델의 신뢰성을 해석하기 위하여 다음과 같은 두가지의 주된 문제점이 제기되고 있다. 하나는 미지변수의 분포에 대한 자료부족이고 다른 하나는 통계적 해석을 할때 요구되는 엄청난 계산량이다.

이들 문제를 해결하기 위해서 하중, 재료특성, 형상 등의 응답변수의 불확정성의 영향을 추정하는 확률 유한요소해석법(Probability Finite Element Method: PFEM)⁽¹⁾이 제안되었다. 이 PFEM을 파괴역학에 적용하여 균열선단에서의 응력강도계수의 통계적 추정⁽²⁾이 가능하게 되었으며 따라서 통계적 방법을 이용한 확률적 균열성장(probabilistic crack growth)에 대한 연구가 활발히 진행 중이다.⁽³⁻⁸⁾

본 연구에서는 반복하중을 받고 있는 기계요소나 구조물에서 기하학적 형상이나 재료특성, 환경 등의 영향도를 정량적으로 판단할 수 있는 기준 및 각 인자와 평가지수(K_{Ic} , 수명)에 대한 상관관계를 PFEM을 사용하여 구명하고, 추정된 값의 신뢰성 및 각 파라미터들이 변화할 때 특정인자가 추정된 값에 미치는 영향의 정도를 해석하였다.

2. 이론적 배경

2.1 피로균열의 성장

Paris-Erdogan의 균열성장식⁽⁹⁾은 식(1)과 같이 정의된다.

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n \tag{1}$$

여기서, $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ 이다. 균열성장 방향은 균열선단에서 반경방향으로 진행하며, 최대 주응력에 직교하는 방향으로 진행한다⁽¹⁰⁾는 가정에 의하여 다음의 식(2)와 같이 정의할 수 있다.

$$K_I \sin(\theta) + K_{II} (3\cos(\theta) - 1) = 0 \tag{2}$$

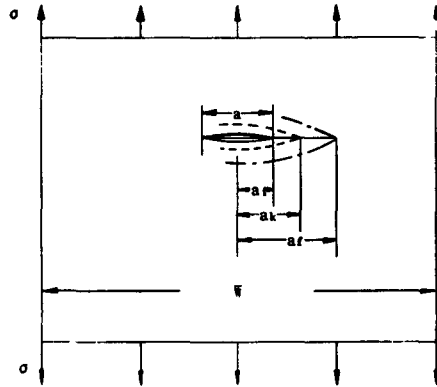


Fig. 1 Center cracked plate

여기서, 균열성장 방향을 나타내는 각도 θ 는 Newton's Method와 같은 Iteration기법으로 구한다.

2.2 응력강도 계수

혼합모드의 경우에는 모드 I의 경우로 변환한 등가 응력강도계수를 사용하며 이때 주응력은 식(3)과 같이 주어진다.⁽¹⁰⁾

$$\sigma_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_{Ic} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \tag{3}$$

이로부터 모드 I 등가 응력강도계수는 식(4)과 같이 정의된다.

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3K_{II} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4}$$

여기서, 균열은 혼합모드 하에서 θ 의 방향으로 진전하며, 이 각도 θ 는 최소 주응력방향과 균열선단의 진행방향 사이의 각이다. 또, 평면변형률 조건을 가정할 때, 중앙 관통균열을 갖는 판(Fig. 1 center cracked plate)에서의 응력강도계수^(11,12)는 식(5)와 같이 주어진다.

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a} \tag{5}$$

여기서, $H = a/W$ 이고, 상수는 $C = 1 + 0.256H - 1.152H^2 + 12.2H^3$ 의 값을 갖는다. 식(5)는 $H \leq 0.35$ 까지 0.3% 정확도를 갖는다.

2.3 확률 유한요소해석법

2.3.1 랜덤계의 지배방정식

랜덤계의 지배방정식⁽²⁾은 식(6)과 같은 일반적인

유한요소 방정식으로 정의된다.

$$[K][d]=[f] \quad (6)$$

식(6)의 각 항에 대한 평균을 각각 $D=E([d])$, $K=E([k])$, $F=E([f])$ 라고 두고, 각 항을 Taylor Series 2차항까지 전개하면 식(7)과 같다. 여기서, q 는 랜덤변수의 수이다.

$$[d]=D+\zeta\sum_{i=1}^q D_{,bi}\Delta b_i+\frac{\zeta^2}{2}\sum_{i,j=1}^q D_{,bi}\Delta b_i\Delta b_j \quad (7a)$$

$$[K]=K+\zeta\sum_{i=1}^q K_{,bi}\Delta b_i+\frac{\zeta^2}{2}\sum_{i,j=1}^q K_{,bi}\Delta b_i\Delta b_j \quad (7b)$$

$$[f]=F+\zeta\sum_{i=1}^q F_{,bi}\Delta b_i+\frac{\zeta^2}{2}\sum_{i,j=1}^q F_{,bi}\Delta b_i\Delta b_j \quad (7c)$$

식(7)을 식(6)에 대입하여 정리하면 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} [k][d]= & KD+\zeta\sum_{i=1}^q KD_{,bi}\Delta b_i \\ & +\frac{\zeta^2}{4}\sum_{i,j=1}^q KD_{,bibi}\Delta b_i\Delta b_j \\ & +\zeta\sum_{i=1}^q K_{,bi}\Delta b_i+\zeta^2\sum_{i,j=1}^q K_{,bi}D_{,bj}\Delta b_i\Delta b_j \\ & +\frac{\zeta^3}{2}\sum_{i,j,k=1}^q K_{,bi}D_{,bjbk}\Delta b_i\Delta b_j\Delta b_k \\ & +\frac{\zeta^2}{2}\sum_{i,j=1}^q K_{,bibi}D_{,bi}\Delta b_i\Delta b_j \\ & +\frac{\zeta^3}{2}\sum_{i,j,k=1}^q K_{,bibi}D_{,bkb}\Delta b_i\Delta b_j\Delta b_k \\ & +\frac{\zeta^4}{4}\sum_{i,j,k=1}^q K_{,bibi}D_{,bkbk}\Delta b_i\Delta b_j\Delta b_k\Delta b_l \quad (8) \end{aligned}$$

이를 ζ 의 차수에 따라 전개하면 0차 식은 식(9)와 같다.

$$KD=F \quad (9)$$

또 1차 식은 식(10)과 같다.

$$KD_{,bi}+K_{,bi}D=F_{,bi} \quad \text{단, } i=1, 2, \dots, q \quad (10)$$

2차 식은 식(11)과 같다.

$$2KD_{,bibj}+F_{,bibj}-2K_{,bi}D_{,bj}-K_{,bibi}D \quad (11)$$

단, $i, j=1, 2, \dots, q$

2.3.2 PFEM 유도

기존의 유한요소해석법^(13,14)에서 통계 유한요소해석법으로 전환하기 위하여는 해석하려는 각 랜덤변수 $b(a_f, a_i, A, n, \sigma)$ 의 0차와 1차 식을 사용한다. 변위와 확률변수 b 에 대한 구배를 구하기 위해서는 위의 두 System equation을 풀어야 하는데, 이때 요소에 대한 관계식을 구하면 다음과 같이 정리

된다.

○강성행렬

$$[K]_{ij}=\int_{A^{(e)}} [B]^T(e)_i[C][B]_j(e) dA^{(e)} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} [K]_{i,b} &= 2\int_{A^{(e)}} [B]^T(e)_i[C][B]_j(e) dA^{(e)} \\ & + \int_{A^{(e)}} [B]^T(e)_i[C][B]_j(e) t^{(e)} dA^{(e)} \quad (12b) \end{aligned}$$

○절점하중행렬

$$[f_T]_i=[P_i^{(e)} P_{yi}^{(e)}]^T \quad (13a)$$

$$[f_T]_{i,a}=[P_{xi}^{(e)} P_{yi}^{(e)}]^T \quad (13b)$$

요소의 절점하중은 각각 x, y 에 대하여 식(14a), (14b)과 같이 주어진다.

$$P_{xi}^{(e)}=\int_r N_i^{(e)}(P_i \frac{\partial x}{\partial \xi}-P_n \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (14a)$$

$$P_{yi}^{(e)}=\int_r N_i^{(e)}(P_n \frac{\partial x}{\partial \xi}+P_i \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (14b)$$

여기서, P_i 와 P_n 은 요소경계에 작용하는 분포하중이고, 요소절점에서의 하중의 랜덤변수에 대한 구배는 각각 x, y 방향에 대하여 식(14c), (14d)와 같다.

$$\begin{aligned} P_{xi,b} &= \int_r N_i^{(e)}(P_{i,b} \frac{\partial x}{\partial \xi}-P_{i,b} \frac{\partial x}{\partial \xi}+P_{n,b} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ & -P_{n,b} \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (14c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{yi,b} &= \int_r N_i^{(e)}(P_{n,b} \frac{\partial x}{\partial \xi}+P_{i,b} \frac{\partial y}{\partial \xi}+P_{n,b} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ & +P_{i,b} \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (14d) \end{aligned}$$

2.4 피로균열성장 해석의 신뢰성에 대한 최적화 문제

하중과 재료에 관계되는 인자들의 불확정성과 요소형상, 균열형상(초기 및 임계 균열길이, 균열성장각도, 균열위치) 등을 q 차원의 상관 주확률변수(correlated primary random variables)의 벡터 b 로 Fig. 2와 같이 모델링하였다. 균열전파에 의한 피로수명의 신뢰성 해석은 적절한 성능함수를 정의하여 이 성능함수를 최소화하는 최적화문제로 생각할 수 있다. 본 연구에서는 성능함수를 식(15)과 같이 정의하였다.

$$g=T-T_s \quad (15)$$

여기서, T_s 는 요소의 실제수명이고, T 는 실제수명이다. 이 최소화문제는 k 번째의 하중에 의해 균

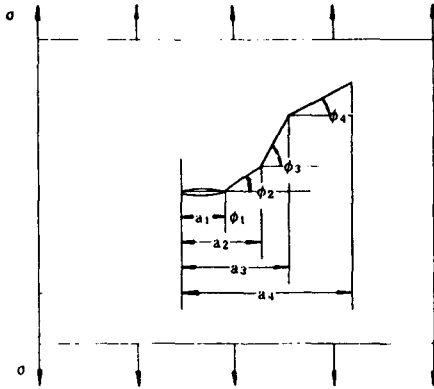


Fig. 2 Crack growth direction of center cracked plate specimen

열길이가 \$a_k\$가 될 때, 균열성장방향 법칙과 평형 조건에서 오는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$Z_k = \cos^2(\theta_k) [\cos(\theta_k) - 3\sin(\theta_k)] [K_I K_{II}]^r \quad (16)$$

$$K_{I,II} \delta_j = f_i \quad (17)$$

이때, \$K_i\$와 \$f_i\$는 확장된 강성행렬과 외력벡터이고 일반화된 변위는

$$\delta = [d K]^T \quad (18)$$

여기서, \$K=[K_I K_{II}]\$이고, \$d\$는 일반적인 절점 변위벡터이다. 또한 설계수명을 만족하기 위해 다음의 부등제약조건(inequality constraints)을 만족해야 한다.

$$g \leq 0 \quad (19)$$

Lagrange function \$L\$은 독립변수 \$b, u_1, \dots, u_{npts}, \delta_1, \dots, \delta_{npts}, \varphi_1, \dots, \varphi_{npts}, \theta_1, \dots, \theta_{npts}, \lambda\$와 \$a\$로서 다음과 같이 주어진다.

$$L(b, \delta_i, \varphi_i, \theta_i, \lambda, a) = \beta + \sum_{i=1}^{npts} u_i [f_i - K_{ij} \delta_j] + \sum_{k=1}^{npts} \varphi_k Z_k + \lambda [T - T_s + a^2] \quad (20)$$

여기서, \$\beta\$는 \$r_i^2\$는 독립변수들의 표준 확률변수들의 제곱의 합이다. \$u_i\$는 평형을 위한 Lagrange multiplier, \$\varphi_k\$는 균열방향 법칙에 대한 Lagrange multiplier이고, \$a\$는 이완변수(slack variable)로서 \$g \le 0\$를 확인하기 위해 도입되었고, \$\lambda \ge 0\$은 부등제약조건을 위한 Lagrange multiplier이다. 만일 \$\lambda \ge 0\$이면 \$g^2\$는 감소한다. 이때, \$g \le 0\$는 파손이 일어날 때를 나타낸다. 이상으로서 설정된 수명과 실제 수명의 차이를 최소화하는 신뢰성 지수의 최적화를 위한 계산용 부프로그램⁽¹⁴⁾을 Variable Metric Method⁽¹⁵⁾를 사용하여 작성하였다.

3. 수치해석

응력강도계수와 수명 그리고, 이들의 랜덤변수에 대한 구배를 계산하기 위해서 Table 1과 같은 관통균열을 가진 판에 대한 요소해석, 응력강도계수 계산 및 이들 랜덤변수의 구배를 계산하기 위한 프

Table 1 Specimen geometry data & material properties

Constant		Average	Standard Variation	Ratio (%)
Length	H	100 mm		
Width	W	200 mm		
Thickness	t	1 mm		
Young's modulus	E	200 GPa		
Poission's ratio	\$\nu\$	0.3		
Applied stress	\$\sigma\$	10 KPa	1.0	10
Initial crack length	\$a_i\$	0.1 mm	0.01	10
Critical crack length	\$a_c\$	1~10 mm	0.01	10
Paris cnstant	A	1.0E-10	1.0E-11	11
Paris constant	n	3.25	0.325	10

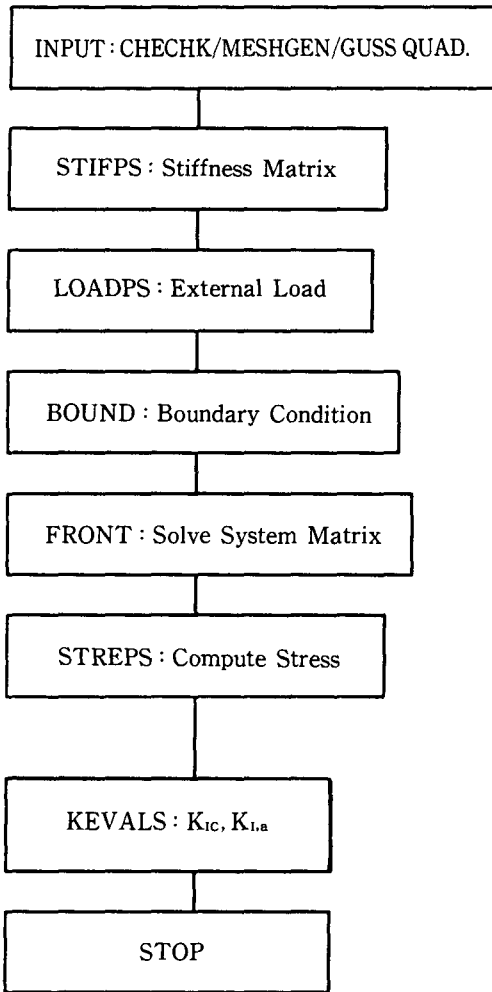


Fig. 3 Flowchart of PFEM program

로그래를 Fig. 3의 흐름도와 같이 작성하였다. 프로그램은 균열의 진전에 따른 좌표와 랜덤변수에 대한 좌표 구배를 구하는 요소분할 부프로그램, 피로수명과 서비스수명과의 차이를 주어진 제한 조건 하에서 최소화하기 위한 프로그램, 변위와 응력강도계수의 구배계산을 위한 0차 및 1차의 PFEM 프로그램으로 구성된다. 요소분할 부프로그램은 균열의 성장함에 따라 변화하는 경계에서의 요소를 생성하는 프로그램으로 MESHGEN이라는 부프로그램을 작성하였다. 확률 유한요소해석용 프로그램은 응력강도계수 및 변위, 응력 그리고 확률변수(random variables)에 대한 이들의 구배를 계산하는 프로그램으로 0차 확률 유한요소해석 및 1차의 확률 유한요소해석을 수행한다. 이 프로그램은 관

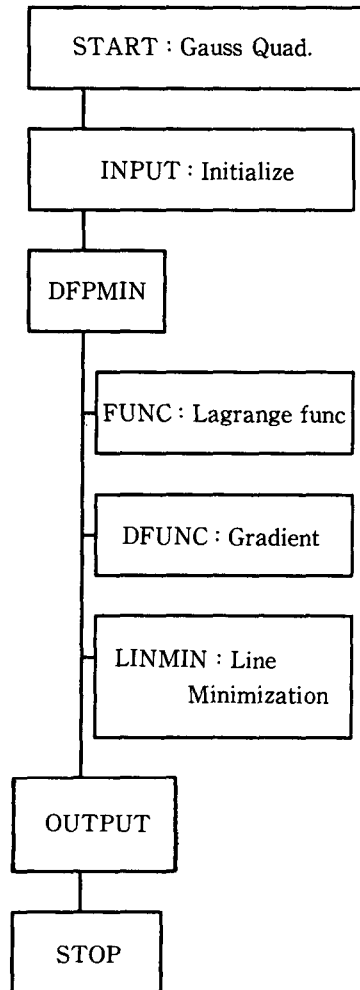


Fig. 4 Flowchart of life reliability analysis program

통균열을 가진 판(center cracked plate)에 대한 해석을 통하여 검증하였다. 수명의 신뢰성 해석용 프로그램은 주어진 수명과 서비스수명과의 차이를 최소화하는 초기균열과 임계 균열길이를 구하는 부프로그램으로 흐름도는 Fig. 4와 같다.

4. 결과 및 고찰

중앙관통균열을 가진 판의 수명과 강도에 대한 각 랜덤변수의 영향정도를 구명하기 위하여 Fig. 1, 2의 시편에서와 같은 문제를 해석하였다. 중앙관통균열을 가진 판에서 랜덤변수를 Table 1과 같이 고려하였다. 이들 인자들이 피로수명과 강도에 미치는 영향을 해석하기 위하여 응력강도계수와 응

력강도계수의 균열의 길이에 대한 구배와 응력에 대한 구배를 Table 2와 같이 구하였다. Dixon과 Ewalds의 근사식으로 계산한 결과와 PFEM에 의한 계산결과를 균열의 길이에 대하여 비교하면 Fig.5와 같다. 균열길이 0.1 mm인 경우를 제외하면 잘 일치하고 있으며 이 차이는 성장하는 균열에 대한 유한요소의 분할에서 작은 균열에 대한 모델링시에 요소의 크기가 영향을 주기 때문으로 판단되나 이에 대하여는 추가적인 연구가 필요할 것으

로 사료된다. 작용응력이 Table 1과 같이 주어질 때 수명과 작용응력에 대한 수명의 분산은 Fig. 6과 같이 나타나며 이로부터 작용하중이 커짐에 따라 수명은 지수적으로 감소하며 수명의 분산폭은 수명보다 상대적으로 빠르게 감소함을 알 수 있다. 이는 수명이 긴 경우 다른 인자들의 영향을 받을 가능성이 커지기 때문인 것으로 사료된다.

Table 1과 같은 조건을 가진 판이 설계수명 6.159×10^6 cycles일 확률이 99%이도록 설계하고자 할

Table 2 S.I.F exact sols. and S.I.F PFEM sols

Crack length (mm)	Ewalds	&	Dixen	PFEM		
	K_I	$K_{I,\sigma}$	$K_{I,a}$	K_I	$K_{I,\sigma}$	$K_{I,a}$
0.1	56.17	0.56	281.29	43.18	0.43	137.45
0.2	79.48	0.79	199.59	74.42	0.74	180.26
0.3	97.44	0.97	163.5	90.69	0.90	168.25
0.4	112.64	1.12	142.05	100.01	1.00	137.64
0.5	126.08	1.26	127.45	109.16	1.09	126.6
0.6	138.26	1.38	116.71	128.41	1.28	120.35
0.7	149.50	1.49	108.28	163.93	1.63	116.43
0.8	159.95	1.60	101.28	163.93	1.81	104.30
0.9	169.89	1.70	96.28	180.93	1.81	104.30
1.0	179.28	1.79	91.69	198.09	1.98	90.4

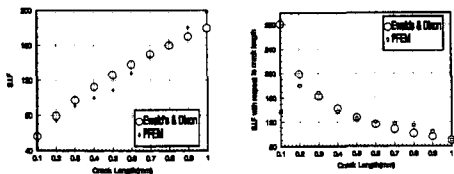


Fig. 5 S. I. F & S. I. F gradient with respect to crack length

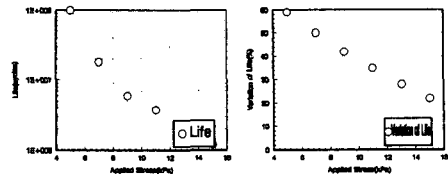


Fig. 6 Life & life variation with respect to applied stress

Table 3 Life variation and gradient with respect to random variables of specimen's 99% expectation life of $6.159E6$ cycles

Random variable	Life gradient	Life variation
Initial crack length	1.7986E09 (cycles/mm)	9.5347E-09
Critical crack length	2.3164E07 (cycles/mm)	9.2283E-07
Paris constant A	5.9693E16 (cycles)	4.8755E-16
Paris constant n	8.7540E06 (cycles)	1.0210E-06
Applied stress	1.9400E06 (cycles/kPa)	9.4587E-06

때 수명의 랜덤변수에 대한 구배와 분산을 Table 3과 같이 구하였다. 작용응력의 경우 주어진 조건에서 1 kPa의 응력증가에 따라 수명은 1.94×10^6 cycles의 감소를 나타내고, 초기 균열길이가 1 mm 증가함에 따라 1.79×10^9 cycles의 감소를 보이며 임계 균열길이의 경우 1 mm의 증가에 따라 2.316×10^7 cycles의 증가로서 초기 균열길이의 변화가 수명에 가장 큰 영향을 미치는 것으로 나타내고 있다. 수명의 분산을 보면 초기 균열길이 변화의 경우보다 임계 균열길이 변화하는 경우에 보다 좁게 나타나는데 이는 수명의 랜덤변수에 대한 구배가 클수록 수명의 분산은 적어지는 것을 의미한다.

결과적으로 관통균열을 가진 판에서 수명에 가장 민감한 인자는 Paris인자 A와 초기 균열길이인 것으로 나타나고 있다. 그러나 초기 균열길이의 경우 0.00001~0.1 in의 범위에서 정의되어 있고, Paris인자 A는 A1 7075-T651의 경우 $R \geq 0$ 에서 7.18×10^{-9} 의 값을 갖는 것을 고려한다면 초기 균열길이의 영향이 가장 큰 것으로 나타나고 있으나 보다 구체적인 비교를 위해서는 초기조건에 대한 정량적인 비교수단이 필요하리라 판단된다.

5. 결 론

(1) 관통균열을 가진 판의 경우 초기 균열길이가 0.2 m에서 2 mm의 범위에서 정의됨을 감안할 때 수명에 대한 영향이 가장 민감한 것으로 사료된다.

(2) 확률 유한요소해석에 의해서 하중과 균열길이 등의 분포패턴을 알때, 응력강도계수의 분포 패턴을 알 수 있으며, 이로부터 수명의 분포패턴을 구할수 있었다.

(3) PFEM 해석을 적용하면 환경조건이나 균열 크기의 불균일성, Paris식에서의 두 파라미터 등의 분산에 따른 수명이나 파괴강도에의 영향도 및 이들의 분포패턴을 알수 있으므로 정량적인 설계 허용범위를 얻을 수 있다.

참고문헌

- (1) Liu, W. K., 1988, "Probabilistic Finite Element Method," *Comp. Mech. of Probabilistic and Reliability Analysis*, pp. 116~139.
- (2) Besterfield, G. H., 1989, "Fatigue Crack Growth Reliability by Probabilistic Finite Elements," *Comp. Mech. of Probabilistic and Reliability Analysis*, pp. 344~345.
- (3) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L., 1981, "A Critical Analysis of some Probabilistic Models of Fatigue Crack Growth," *Eng. Fracture Mech.*, 14, pp. 59~89.
- (4) Liu, Y. K. and Yang, J. N., 1983, "On Statistical Moments of Fatigue Crack Propagation," *Eng. Fracture Mech.*, 18(2), pp. 243~256.
- (5) Saouma, V. E. and Zatz, I. J., 1984, "An Automated Finite Element Procedure for Fatigue Crack Propagation Analysis," *Eng. Fracture Mech.*, 20(2), pp. 321~333
- (6) Sobczyk, K., 1986, "Modelling of Random Fatigue Crack Growth," *Eng. Fracture Mech.*, 24(4), pp. 609~623.
- (7) Tang, J., Enneking, J. J. and Spencer, B. F., 1988, "On the Statistical Structure of Fatigue Crack Growth Data," *Computational Probabilistic Mechanics*, ADM-93, ASME, pp. 67~74.
- (8) Wu, Y. T. and Wirsching, P. H., 1984, "Advanced Reliability Method for Fatigue Analysis," *J. Eng. Mech., ASCE*, 110(4), pp. 536~563.
- (9) Paris, P. C. and Erdogan, F., 1963, "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws," *Trans, ASME, J. Basic Eng.*, Vol 85, No. 4, pp. 528.
- (10) Broek, D., 1986, *Elementary Eng. Fracture Mech.*, 4ed, pp. 374~383.
- (11) Ewalds, H. L. and Wanhill, R. J., 1983, *Fracture Mechanics*, 2(8), pp. 48~102.
- (12) Owen, D. R. J. and Fawkes, A. J., 1980, *Eng. Fracture Mechanics*, 3, pp. 36~137, 1983.
- (13) Huebner, K. H. and Earl, A. T., 1982, *The Finite Element Method for Engineers*, pp. 126~190, 2ed.
- (14) Williard, H. P. and Brian, P. F., Saul, A. T., Williard, T. V., 1986, *Numerical Receipts*, 10(7), pp. 301~312.
- (15) Garret, N. V., 1984, "Variable Metric Method," *Numerical Optimization Tech. for Eng. Design*, 3(3), 1, pp. 92~93.