1542 大韓機械學會論文集 第18卷 第6號, pp. 1542~1550, 1994

〈論 文〉

특이섭동 불확실시스템의 견실확정제어

강 철 구*

(1993년 1월 29일 접수)

Robust Deterministic Control of Singularly Perturbed Uncertain Systems

Chul-Goo Kang

Key Words : Uncertain System(불확실시스템), Robust Control(견실제어), Deterministic Control (확정제어), Singular Perturbation(특이섭동)

Abstract

For a class of singularly perturbed uncertain system, an output feedback control law is designed. The controller structure is designed based on the uncertain reduced-order system, and the controller parameters are determined by information on the reduced-order and full-order systems. It has been shown that the reduced-order system with the designed controller possesses a stability property(specifically, a global uniform attractivity). Furthermore, the stability property of this control scheme is robust with respect to singular perturbation; i. e., the full-order system, subject to the same controller, possesses the global uniform attractivity, provided the singular perturbation parameter $\mu<\mu^*$, where a threshold value μ^* can be computed from the information available on the full-order system.

I. 서 론

최근에 불확실성(uncertainty)을 확률적이 아니라 확정적(deterministically)으로 취급하는 불확실 동적시스템(uncertain dynamical system)의 확정제어(deterministic control)가 상당한 관심의 대상이 되어왔다.(1~3) 이 연구의 대부분은 파라미터 불확실성이나 외란의 존재에 대하여 제어기의 견실성(robustness)을 고려하고 있지만, 무시된 동역학(neglected dynamics)에 대한 제어기의 견실성을 고려하지 않고 있다. 일반적으로 무시되었던 작동기나 센서의 동특성과 같은 기생동역학(parasitic dynamics)의 영향을 해석하기 위하여 특이섭동(singular perturbation)기법이 도입되었다.(4~8) Corless and Ryan(5)은 특이섭동 불확실시스템에 대하여 상태 되먹임제어(state feedback control)를 제안하였고, Corless, Leitmann and Ryan,(4) Leitmann and Ryan(7)은 특이섭동 불확실시스템에 대하여 출력 되먹임제어를 제안하였다. 특이섭동기법을 제어시스템에 적용한 더 많은 예는 Kokotoič,(9) Kokotović, O'Malley and Sannuti(10)의 조사논문을 참고하기 바란다.

본 연구에서는 Corless, Leitmann and Ryan(4)이 제안한 제어 알고리듬의 가정을 완화하거나 수정함으로써 기계시스템과 같은 물리시스템에의 적용을 용이하게 하였다. 본 논문에서는 특이섭동 불확실시스템을 "빠른" 부시스템(fast subsystem)과 "느린" 부시스템의 조합으로 생각하고, 빠른 부시스템의 "빠름"을 특이섭동 파라미터(singular perturbation parameter) μ로 나타낸다. μ가 작아질수록 빠른 부시스템의 응답속도가 빨라짐을 나타낸다.

*정회원, 건국대학교 기계공학과

$\mu=0$이면 시스템의 차수가 낮아지고, 이것을 축소차수시스템(reduced-order system)이라고 한다. 축소차수시스템의 어떤 안정한 성질(정확하게는 대역적 평등흡인성)을 가지도록 제어기를 설계한다. 이 안정한 성질은 μ가 어떤 한계치 μ^*보다 작으면 전차수시스템(full-order system)에서도 보존된다는 것을 보여준다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 전차수시스템을, 3절에서는 축소차수시스템을 나타내고, 필요한 가정들을 세운다. 4절에서는 대역적 평등흡인성의 정의와 제어법칙을 기술한다. 5절에서는 제어되고 있는 축소차수시스템의 대역적 평등흡인성을 증명하고, 6절에서는 추가적인 가정과 더불어 제어되고 있는 전차수시스템의 대역적 평등흡인성을 증명한다. 7절에서는 결론을 기술한다.

2. 전차수시스템

본 논문에서 고려하고 있는 시스템은 특이섭동 불확실시스템으로 다음과 같은 상미분방정식

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_{11}\boldsymbol{x}(t)+A_{12}\boldsymbol{y}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{g}_1(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{u}(t)) \quad (1)$$

$$\mu\dot{\boldsymbol{y}}(t)=A_{21}\boldsymbol{x}(t)+A_{22}\boldsymbol{y}(t)+B_2\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{g}_2(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{u}(t),\mu) \quad (2)$$

와 출력방정식

$$\boldsymbol{z}(t)=S\boldsymbol{x}(t)+C\boldsymbol{y}(t) \quad (3)$$

로 표현된다. 여기서, A_{ij}, B_i, S, C는 알려진 실상수 행렬이고, $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$과 $\boldsymbol{y}(t)\in R^p$는 각각 "느린"상태벡터와 "빠른"상태벡터, $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$은 입력벡터, $\boldsymbol{z}(t)\in R^n$은 출력벡터이며, $\boldsymbol{g}_1$와 $\boldsymbol{g}_2$는 알려지지 않은 Carathéodory함수이다. Carathéodory함수의 정의는 부록을 참조하라. 식(1)~(3)을 전차수시스템이라고 하고, 식(1)을 느린 부시스템, 식(2)를 빠른 부시스템이라고 한다. $\mu\in R^+(R^+=[0,\infty))$을 특이섭동 파라미터라고 하고, 이 값이 작으면 작을수록 빠른 부시스템의 응답속도가 빨라짐을 나타낸다.

축소차수시스템의 존재를 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1

(i) A_{22}가 비특이행렬

(ii) $\boldsymbol{g}_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},0)=0\ \forall(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in R\times R^n\times R^p\times R^m$

3. 축소차수시스템

특이섭동 파라미터가 $\mu=0$이면 빠른 부시스템 (2)는 가정 1에 의하여

$$\boldsymbol{y}(t)=-A_{22}^{-1}A_{21}\boldsymbol{x}(t)-A_{22}^{-1}B_2\boldsymbol{u}(t) \triangleq H(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \quad (4)$$

로 쓸 수 있다. 이 $\boldsymbol{y}(t)$를 식(1)과 식(3)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{A}\boldsymbol{x}(t)+\bar{B}\boldsymbol{u}(t)+\bar{\boldsymbol{g}}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{z}(t)=S\boldsymbol{x}(t)+CH(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \quad (6)$$

여기서,

$$\bar{A}\triangleq A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$
$$\bar{B}\triangleq B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$
$$\bar{\boldsymbol{g}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\triangleq \boldsymbol{g}_1(t,\boldsymbol{x},H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})$$

가정 2

(i) $(\bar{A},\bar{B})$는 가안정(stabilizable)이다.

(ii) $S-CA_{22}^{-1}A_{21}=I$

(iii) $CA_{22}^{-1}B_2=0$

가정 2의 (ii)와 (iii)으로부터 축소차수시스템의 출력방정식 (6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{x}(t) \quad (7)$$

$\bar{\boldsymbol{g}}$에 대한 조건을 부여하기 위하여 다음의 설계파라미터 $(Q,\gamma_0)\in R^{n\times n}\times R^+$를 정의한다.

(a) Q는 대칭이고 양의 한정(positive definite) 행렬이다.

(b) $\lambda(\bar{A})\not\subset C^-$ 이면 $\gamma_0>0$ 이다.

여기서, $\lambda(\bar{A})$는 $\bar{A}$의 고유치의 집합을 의미하고 C^-는 복소평면의 열린 왼쪽 반평면(open left-half plane)을 나타낸다. 이 설계파라미터와 가정 2의 (i)로부터 다음과 같은 Riccati방정식의 해로서 유일하고 실대칭인 양의 한정행렬이 존재한다.

$$K\bar{A}+\bar{A}^TK+Q-2\gamma_0K\bar{B}\bar{B}^TK=0 \quad (8)$$

다음에는 불확실함수 $\bar{\boldsymbol{g}}$에 대하여 아래와 같은 가정을 한다.

가정 3

다음 식을 만족하는 음이 아닌 알려진 실수 α_1,

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$와 알려지지 않은 Carathéodory함수 $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$가 존재한다.

(i) $\bar{\boldsymbol{g}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \bar{B}\boldsymbol{e}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x})$

(ii) $\|\boldsymbol{e}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\| \le \alpha_1\|\boldsymbol{x}\| + \alpha_2 + \beta\|\boldsymbol{u}\|,\ \beta < 1$

(iii) $\|\boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x})\| \le \alpha_3\|\boldsymbol{x}\| + \alpha_4$

(iv) $\alpha_1\|\bar{B}\| + \alpha_3 < \dfrac{\lambda_{\min}(QK^{-1})}{2\|K\|^{1/2}\|K^{-1}\|^{1/2}}$

여기서, $\lambda_{\min}(QK^{-1})$는 행렬 QK^{-1}의 최소 고유치를 나타낸다.

참고문헌[2,7]에서 사용되는 용어로서, $\boldsymbol{e}$는 정합 불확실성(matched uncertainty), $\boldsymbol{d}$는 부정합(unmatched) 불확실성을 나타낸다. 본 논문에서 사용되는 노옴(norm)은 유클리디안 노옴 또는 유클리디안 유도노옴(induced norm)이다.

다음 두 집합을 정의한다.

$$\Gamma_1 \triangleq (\underline{\gamma}, \infty),\ \underline{\gamma} \triangleq (1-\beta)^{-1}\gamma_0$$

$$\Gamma_2 \triangleq \{\gamma \in R^+ : F(\gamma)\text{가 안정행렬}\}$$

여기서, $F(\gamma) \triangleq A_{22} - \gamma B_2 \bar{B}^T KC$이다.

가정 4

$$\Gamma^* \triangleq \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi$$

4. 대역적 평등흡인성과 견실확정제어법칙

제어문제를 기술하면 다음과 같다. 불확실 축소차수시스템이 어떤 안정한 성질을 가지도록 출력되먹임제어법칙을 설계하고, 이 안정한 성질이 특이섭동에 대하여, 즉 빠른 부시스템이 있는 전차수시스템에 대하여 견실하도록 하는 것이다.

먼저 어떤 안정한 성질로서 대역적 평등흡인성(global uniform attractivity)을 정의한다.

정의 : 대역적 평등흡인성[4]

다음 시스템

$$\dot{\boldsymbol{w}}(t) = Y(t, \boldsymbol{w}(t)),\ \boldsymbol{w}(t) \in R^q \qquad (9)$$

가 아래의 성질들을 만족시키는 긴밀집합(compact set) $\Sigma \subset R^q$를 가질 때 대역적 평등흡인성을 가진다고 한다.

(i) 해의 존재 : 각$(t_0, \boldsymbol{w}_0)$에 대하여, 식(9)를 "거의 모든 곳에서(almost everywhere)" 만족하는 절대연속함수(absolutely continuous function : 정의는 부록 참조) $\boldsymbol{w}:[t_0, t_1) \to R^q$가 존재하고, 이러한 해는 $[t_0, \infty)$까지 연장될 수 있다. 여기서 $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}(t_0)$.

(ii) 평등유계성(uniform boundedness) : 주어진 $r>0$에 대하여, $\boldsymbol{w}(t_0) \in \Sigma + r\mathfrak{B}$인 해 $\boldsymbol{w}:[t_0, \infty) \to R^q$가 모든 t에 대해 $\boldsymbol{w}(t) \in \Sigma + R(r)\mathfrak{B}$인 $R(r)>0$이 존재한다. 여기서, t_0는 임의의 값이고, $\mathfrak{B}$는 R^q에 있는 열린 단위구(open unit ball)를 나타내며, $\Sigma + r\mathfrak{B}$는 집합 $\{\sigma + \nu : \sigma \in \Sigma, \|\nu\| < r\}$을 나타낸다.

(iii) 평등안정도(uniform stability) : 주어진 $\varepsilon>0$에 대하여. $\boldsymbol{w}(t_0) \in \Sigma + \delta(\varepsilon)\mathfrak{B}$인 해 $\boldsymbol{w}:[t_0, \infty) \to R^q$가 모든 t에 대해 $\boldsymbol{w}(t) \in \Sigma + \varepsilon B$인 $\delta(\varepsilon)>0$이 존재한다. 여기서 t_0는 임의이다.

(iv) 평등궁극유계성(uniform ultimate boundedness) : 주어진 $d>0$, $r>0$에 대하여, $\boldsymbol{w}(t_0) \in \Sigma + d\mathfrak{B}$인 해 $\boldsymbol{w}:[t_0, \infty) \to R^q$가 모든 $t \ge t_0 + \tau(d, r)$에 대해 $\boldsymbol{w}(t) \in \Sigma + r\mathfrak{B}$인 $\tau(d, r) \ge 0$이 존재한다. 여기서, t_0는 임의이다.

대역적 평등흡인성은 불확실성이 없는 시스템에서의 점근안정도와 비슷한 성질이다. 즉, 대역적 평등흡인성은 모든 상태궤적이 발산하지 않고 유한한 시간내에 원점 주위의 어떤 긴밀집합내로 들어옴을 의미한다.

견실확정제어법칙

먼저 설계파라미터로서 $\epsilon>0$을 선정한 다음 견실확정제어 $\boldsymbol{u}(t)$를 다음과 같은 출력 되먹임제어법칙으로 설계한다.

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}(t)) = \boldsymbol{p}_l(\boldsymbol{z}(t)) + \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{z}(t)) \qquad (10)$$

선형함수 $\boldsymbol{p}_l$은

$$\boldsymbol{p}_l(\boldsymbol{z}(t)) \triangleq -\gamma_1 \bar{B}^T K \boldsymbol{z}(t),\ \gamma_1 \in \Gamma^* \qquad (11)$$

이고, 비선형함수 $\boldsymbol{p}_n$은

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{z}(t)) \triangleq -\frac{\bar{B}^T K \boldsymbol{z}(t)}{\|\bar{B}^T K \boldsymbol{z}(t)\| + \epsilon\rho} \qquad (12)$$

이다. 여기서, $\rho \in R$는

$$0 \le \rho < \frac{\epsilon}{2\|PB_2\|\|\bar{B}^T KC\|} \qquad (13)$$

을 만족하는 또 하나의 설계파라미터이고, $P \in R^{p \times p}$는 대칭이고 양의 한정행렬로서 다음 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$PF(\gamma_1) + F(\gamma_1)^T P = -I \qquad (14)$$

5. 제어되고 있는 축소차수시스템의 대역적 평등흡인성

이 절에서는 제어기 식(10)에 의하여 제어되고 있는 축소차수시스템이 대역적 평등흡인성을 가짐을 보인다. 축소차수시스템에서는 식(7)과 같이 출력벡터와 상태벡터가 같으므로

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}(t))=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}(t))$$

이다. 제어입력 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}(t))$를 축소차수시스템 식(5)에 대입하면

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=F_r(t,\ \boldsymbol{x}(t)),\ \boldsymbol{x}(t)\in R^n \tag{15}$$

이고, 여기서

$$F_r(t,\ \boldsymbol{x})=\bar{A}\boldsymbol{x}+\bar{B}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})+\bar{\boldsymbol{g}}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) \tag{16}$$

이다. 여기서 다음과 같은 내적으로 표현되는 Lyapunov함수 $V:R^n\rightarrow R^+$를 정의한다.

$$V(\boldsymbol{x})\triangleq<\boldsymbol{x},\ K\boldsymbol{x}> \tag{17}$$

정리 1

제어되고 있는 축소차수시스템 (15)는 대역적 평등흡인성을 가지고, Σ_{r_0}는 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma_{r_0}\quad\{\boldsymbol{x}\in R^n: V(\boldsymbol{x})\le r_0^2\},$$

여기서,

$$r_0\triangleq\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^{-1}[\tilde{\alpha}_2+(\tilde{\alpha}_2^2+4\tilde{\alpha}_1\tilde{\epsilon})^{\frac{1}{2}}]$$

$$\tilde{\alpha}_1\triangleq\lambda_{\min}(K^{-1}Q)-2[\alpha_1\|\bar{B}\|+\alpha_3]\|K\|^{\frac{1}{2}}\|K^{-1}\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\alpha}_2\triangleq 2\alpha_4\|K\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\epsilon}\triangleq\frac{1}{2}[(1-\beta)\rho-\alpha_2]^2[(1-\beta)\gamma_1-\gamma_0]^{-1}+2\rho\epsilon$$

증명 : $Q,\ K\in R^{n\times n}$이 대칭이고 양의 한정행렬일 때 Rayleigh 몫(Rayleigh's quotient)의 성질에 의하여, 임의의 벡터 $\boldsymbol{x}\in R^n$에 대하여 다음 부등식들이 성립되고, 이것들을 본 증명에 사용한다.

$$\|\boldsymbol{x}\|^2\le\|K^{-1}\|<\boldsymbol{x},\ K\boldsymbol{x}> \tag{18}$$

$$\|K\boldsymbol{x}\|^2\le\|K\|<\boldsymbol{x},\ K\boldsymbol{x}> \tag{19}$$

$$<\boldsymbol{x},\ Q\boldsymbol{x}>\ge\lambda_{\min}(K^{-1}Q)<\boldsymbol{x},\ K\boldsymbol{x}> \tag{20}$$

먼저 $\nu(t,\ \boldsymbol{x})=<\nabla V(\boldsymbol{x}),\ F_r(t,\ \boldsymbol{x})>$라고 하자. 그러면 모든 $(t,\ \boldsymbol{x})\in R\times R^n$에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nu(t,\ \boldsymbol{x})&=<K\boldsymbol{x},\ \bar{A}\boldsymbol{x}+\bar{B}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})+\bar{g}(t,\ \boldsymbol{x},\ p(\boldsymbol{x}))>\\&=<K\boldsymbol{x},\ \bar{A}\boldsymbol{x}>+<K\boldsymbol{x},\ \bar{B}p(\boldsymbol{x})>+<K\boldsymbol{x},\\&\quad\bar{B}\boldsymbol{e}(t,\ \boldsymbol{x},\ p(\boldsymbol{x}))>+<K\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{d}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))>\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}&<K\boldsymbol{x},\ \bar{A}\boldsymbol{x}>\\&=\frac{1}{2}<\boldsymbol{x},\ (K\bar{A}+\bar{A}^TK)\boldsymbol{x}>\\&=-\frac{1}{2}<\boldsymbol{x},\ Q\boldsymbol{x}>+\gamma_0<\bar{B}^TK\boldsymbol{x},\ \bar{B}^TK\boldsymbol{x}>\\&\quad\le-\frac{1}{2}\lambda_{min}(K^{-1}Q)\ V(\boldsymbol{x})+\gamma_0\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&<K\boldsymbol{x},\ \bar{B}p(\boldsymbol{x})>\\&=<\bar{B}^TK\boldsymbol{x},\ -\gamma_1\bar{B}^TK\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x})>\\&=-\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2+<\bar{B}^TK\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x})>\\&\quad\le-\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2-\rho\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|+\rho\epsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&<K\boldsymbol{x},\ \bar{B}\boldsymbol{e}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))>\\&=\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{e}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\|\le\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|\{\alpha_1\|\boldsymbol{x}\|\\&\quad+\alpha_2+\beta[\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x})\|]\}\\&\quad\le\beta\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2+\alpha_1\|\bar{B}\|\|K\|^{\frac{1}{2}}\|K^{-1}\|^{\frac{1}{2}}V(\boldsymbol{x})\\&\quad+(\alpha_2+\beta\rho)\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|,\\&\quad<K\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{d}(t,\ \boldsymbol{x})>\le\|K\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{d}(t,\ \boldsymbol{x})\|\\&\quad\le\alpha_3\|K\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\|+\alpha_4\|K\boldsymbol{x}\|\\&\quad\le\alpha_3\|K\|^{\frac{1}{2}}\|K^{-1}\|^{\frac{1}{2}}V(\boldsymbol{x})+\alpha_4\|K\|^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}(x)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nu(t,\ \boldsymbol{x})&\le\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(K^{-1}Q)\ V(\boldsymbol{x})+\gamma_0\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2\right\}\\&\quad+\{-\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2-\rho\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|+\rho\epsilon\}+\beta\gamma_1\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2\\&\quad+\alpha_1\|\bar{B}\|\|K\|^{\frac{1}{2}}\|K^{-1}\|^{\frac{1}{2}}V(\boldsymbol{x})+(\alpha_2+\beta\rho)\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|\}\\&\quad+\{\alpha_3\|K\|^{\frac{1}{2}}\|K^{-1}\|^{\frac{1}{2}}V(\boldsymbol{x})+\alpha_4\|K\|^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\}\\&=-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1V(\boldsymbol{x})-\{[(1-\beta)\gamma_1-\gamma_0]\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|^2\\&\quad+[(1-\beta)\rho-\alpha_2]\|\bar{B}^TK\boldsymbol{x}\|\}+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_2V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})+\rho\epsilon\\&\quad\le-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1V(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_2V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}\end{aligned}$$

즉, $$\nu(t,\ \boldsymbol{x})\le-\tilde{\alpha}_1V(\boldsymbol{x})+\tilde{\alpha}_2V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})+\tilde{\epsilon} \tag{21}$$

가정 3의 (iv)에 의하여 $\tilde{\alpha}_1>0$이고, 가정 4에 의하여 $\tilde{\epsilon}\ge 0$이다. 그러므로

$$\nu(t,\ \boldsymbol{x})<0\quad\forall(t,\ \boldsymbol{x})\notin R\times\Sigma_{r_0} \tag{22}$$

거의 모든 t에서 $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=\nu(t,\ \boldsymbol{x}(t))$임과 상미분방정식의 이론으로부터, 제어되고 있는 축소차수

시스템은 적어도 한개의 해 $\boldsymbol{x}(t)$를 가짐을 알 수 있다. 대역적 평등흡인성 정의 (ii)는

$$R(r)=[\|K\|\|K^{-1}\|]^{\frac{1}{2}}r$$

로부터 만족되고, (iii)은

$$\delta(\varepsilon)=[\|K\|\|K^{-1}\|]^{-\frac{1}{2}}\epsilon$$

로부터 만족되고, (iv)는

$$\tau(d, r)=\begin{cases} I(r_0+\|K\|^{\frac{1}{2}}d,\ r_0+\|K^{-1}\|^{-\frac{1}{2}}r), \\ \qquad\qquad (d>[\|K\|\|K^{-1}\|]^{-\frac{1}{2}}r) \\ 0, \qquad\quad (d\leq[\|K\|\|K^{-1}\|]^{-\frac{1}{2}}r) \end{cases}$$

로부터 만족된다. 여기서, $I(r_1, r_2)=\int_{r_2^2}^{r_1^2}[\tilde{\alpha}_1 V-\tilde{\alpha}_2 V^{\frac{1}{2}}-\tilde{\epsilon}]^{-1}dV$이다. 그러므로 정리 1이 증명되었다.

6. 제어되고 있는 전차수시스템의 대역적 평등흡인성

이 절에서는 추가적인 가정을 함으로써 식(10)에 의하여 제어되고 있는 전차수시스템이 $\mu\in(0, \mu^*)$일 때 대역적 평등흡인성을 가짐을 보인다. 다음과 같이 $W:R^n\times R^p\rightarrow R^+$를 정의한다.

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\triangleq<\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), P[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]>$$

여기서,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})&\triangleq H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\\ &=-A_{22}^{-1}A_{21}\boldsymbol{x}-A_{22}^{-1}B_2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

행렬 P는 앞에서 선정한 $\gamma_1\in\Gamma^*$의 값에 따라 달라진다.

가정 5

(i) 모든 $(t, \boldsymbol{x})\in R\times R^n$에 대하여

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}_1))\\ &-\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}_2))\|\leq\lambda\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|,\\ &\forall\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\in R^p\end{aligned}$$

여기서, $\lambda\geq0$은 알려진 상수이다.

(ii) 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$와 $\mu\geq0$에 대하여

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}), \mu)\|\\ &\leq\mu[k_1\|\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x})\|+k_2\|\boldsymbol{x}\|+k_3]\end{aligned}$$

여기서, $k_1, k_2, k_3\geq0$은 알려진 상수이다.

편리하게 하기 위하여 함수 $F:R\times R^n\times R^p\rightarrow R^n$과 $G:R\times R^n\times R^p\times R^+\rightarrow R^n$을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}&F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\\ &\triangleq A_{11}\boldsymbol{x}+A_{12}\boldsymbol{y}+B_1\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})\\ &\quad+\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}))\\ &=F_r(t, \boldsymbol{x})+A_{12}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]\\ &\quad-B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\\ &\quad+\boldsymbol{g}_1((t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}))\\ &\quad-\boldsymbol{g}_1((t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu)\\ &\triangleq A_{21}\boldsymbol{x}+A_{22}\boldsymbol{y}+B_2\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})\\ &\quad+\boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}), \mu)\\ &=A_{22}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]-B_2[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\\ &\quad+\boldsymbol{g}_2((t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})), \mu)\end{aligned} \tag{24}$$

그러면 주어진 문제는 전차수시스템

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=F(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) \tag{25}$$

$$\mu\dot{\boldsymbol{y}}(t)=G(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \mu) \tag{26}$$

가 $\mu\in(0, \mu^*)$에서 대역적 평등흡인성을 가짐을 보이고, 그 상한 값 μ^*를 계산하는 것이 된다. 이 문제를 푸는 접근방법은 Corless, Leitmann and Ryan[(4)]의 방법을 사용한다. 우선 몇가지 예비정리 (lemma)가 필요하다.

예비정리 1

$$<\nabla V(\boldsymbol{x}), F_r(t, \boldsymbol{x})>\leq-\tilde{\alpha}_1 V(\boldsymbol{x})+\tilde{\alpha}_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})+\tilde{\epsilon}, \ \forall(t, \boldsymbol{x})\in R\times R^n$$

증명 : 이것은 정리 1의 증명에 내포되어 있다. (식(21)참조).

예비정리 2

$$<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)>\leq-\zeta W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\quad\forall(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$$

여기서,

$$\zeta=[1-2(\rho/\epsilon)\|PB_2\|\|\bar{B}^T KC\|]\|P\|^{-1}>0$$

증명 : 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$에 대하여

$$\begin{aligned}&<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)>\\ &\leq<\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), -[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]>\\ &+2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\|PB_2[\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}_n(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\|\\ &\leq-\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|^2\\ &+2\frac{\rho}{\epsilon}\|PB_2\|\|\bar{B}^T KC\|\|\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x})\|^2\end{aligned}$$

$$=-\zeta W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$\zeta>0$은 식(13)으로부터 만족된다.

예비정리 3

다음 부등식을 만족하는 계산 가능한 상수 ψ_1, ψ_2, $\psi_3\in R^+$가 존재한다.

$$<\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})>\le\psi_1 W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
$$+\psi_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\, W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\psi_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
$$\forall(t, x, y)\in R\times R^n\times R^p$$

증명 : 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$에 대해

$$\begin{aligned}
&<\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})>\\
&=<\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F_r(t, \boldsymbol{x})+A_{12}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]\\
&\quad -B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]>\\
&\quad +<\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), g_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\\
&\quad -\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))>\\
&=-2<\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), P\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\{F_r(t, \boldsymbol{x})\\
&\quad +A_{12}[\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x})]-B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\}>\\
&\quad -2<\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x}), P\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\{\boldsymbol{g}_1 t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}\\
&\quad +C\boldsymbol{y}))-\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\}>\\
&\le 2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\|P\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\{\|F_r(t, \boldsymbol{x})\|\\
&\quad +\|A_{12}\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|+\|B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\\
&\quad -\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\|\}+2\|y-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\|P\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\\
&\quad \cdot\|\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}))\\
&\quad -\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\|
\end{aligned}$$

$P\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\le k_h\,(k_h\in R^+)$이고, $\|\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x})\|\le\rho$이므로 $\|F_r(t, \boldsymbol{x})\|\le k_{f1}\|\boldsymbol{x}\|+k_{f2}\ \ \forall x\in R^n$을 만족하는 k_{f1}, $k_{f2}\in R^+$가 존재한다. 또한 다음 식

$$\|B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\|\le k_p\|\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x})\|$$
$$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R^n\times R^p \tag{27}$$

를 만족하는 k_p가 존재한다. 그러므로 가정 5 (i)을 이용하면

$$<\nabla W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})>\le\psi'_1\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|^2$$
$$+\psi'_2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{x}\|+\psi'_3\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|$$

이고, 여기서, ψ'_1, ψ'_2, $\psi'_3\in R^+$는 알려진 상수이다. 따라서 식(18)로부터 이 예비정리가 증명된다.

예비정리 4

다음 식을 만족하는 계산 가능한 상수 $\eta_0\in R^+$가 존재한다.

$$<\nabla V(\boldsymbol{x}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})-F_r(t, \boldsymbol{x})>$$
$$\le\eta_0 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\, W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ \forall(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$$

증명 : 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$에 대하여

$$\begin{aligned}
&<\nabla V(\boldsymbol{x}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})-F_r(t, \boldsymbol{x})>\\
&=2<K\boldsymbol{x}, A_{12}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]\\
&\quad -B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]>\\
&\quad +2<K\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})\\
&\quad -\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))]>\\
&\le 2\|K\boldsymbol{x}\|\{\|A_{12}\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\\
&\quad +B_1[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})]\|\}\\
&\quad +2\|K\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{g}_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}))\\
&\quad -g_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), p(\boldsymbol{x}))]\|\\
&\le\eta'_0\|K\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|
\end{aligned}$$

여기서, $\eta'_0\in R^+$이다. 따라서 식(18), (19)로부터 이 예비정리가 증명된다.

예비정리 5

다음 식을 만족하는 계산 가능한 상수 $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3\in R^+$가 존재한다.

$$<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y})), \mu)>$$
$$\le\mu[\tilde{k}_1 W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{k}_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\, W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{k}_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$
$$\forall(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu)\in R\times R^n\times R^p\times R^+$$

증명 : 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu)\in R\times R^n\times R^p\times R^+$에 대하여

$$\begin{aligned}
&<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}), \mu)>\\
&\le 2\|P[\boldsymbol{y}-h(\boldsymbol{x})]\|\|\boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}), \mu)\|\\
&\le 2\|P[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]\|\{\mu[k_1\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|\\
&\quad +k_2\|\boldsymbol{x}\|+k_3]\}\le\mu[\tilde{k}_1 W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\\
&\quad +\tilde{k} V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\, W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{k}_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]
\end{aligned}$$

이다. 식(18), (19)로부터 이 예비정리가 증명된다. 편리하게 하기 위하여 다음을 정의한다.

$$\eta_1\triangleq\psi_1+\tilde{k}_1,\ \eta_2\triangleq\psi_2+\tilde{k}_2,\ \eta_3\triangleq\psi_3+\tilde{k}_3$$

임의의 작은 $\delta>0$을 선정하고

$$\mu^*\triangleq\begin{cases}\tilde{\alpha}_1\zeta/(\tilde{\alpha}_1\eta_1+\eta_0\eta_2), & \eta_0\eta_2\neq 0\\ \tilde{\alpha}_1\zeta/(\tilde{\alpha}_1\eta_1+\delta), & \eta_0\eta_2=0\end{cases}$$

$$\xi_\mu\triangleq k\left(\frac{\mu}{\mu^*}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k\triangleq\begin{cases}\eta_0/\eta_2, & \eta_0\eta_2\neq 0\\ \eta_0^2/(4\delta), & \eta_0\neq 0,\ \eta_2=0\\ (4\delta)/\eta_2^2, & \eta_0=0,\ \eta_2\neq 0\\ \delta, & \eta_0=\eta_2=0\end{cases}$$

를 정의한다. Lyapunov함수 $U_\mu: R^n\times R^p\to R^+$를 아래와 같이 둔다.

$$U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq V(\boldsymbol{x}) + \xi_\mu W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

정리 2

$\mu\in(0, \mu^*)$일 때 제어되고 있는 전차수시스템 (25), (26)은 대역적 평등흡인성을 가지고, $\sum_{r_\mu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\textstyle\sum_{r_\mu}=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R^n\times R^p: U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\le r_\mu^2\}$$

$$r_\mu=\frac{1}{2}\sigma_\mu^{-1}[\tilde{\beta}_\mu+(\tilde{\beta}_\mu^2+4\tilde{\epsilon}\sigma_\mu)^{\frac{1}{2}}]$$

여기서,

$$\tilde{\beta}_\mu \triangleq (\tilde{\alpha}_2^2+\xi_\mu\eta_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_\mu \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1, & -\frac{1}{2}\left(\eta_0+\xi_\mu\eta_2\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\eta_0+\xi_\mu\eta_2\right), & \xi_\mu\left(\frac{\zeta}{\mu}-\eta_1\right) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\mu \triangleq \|M_\mu^{-1}\|^{-1} min\{1, \xi_\mu^{-1}\}$$

증명 : 모든 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in R\times R^n\times R^p$에 대하여, 다음을 정의한다.

$$u_\mu(t, x, y) \quad <\nabla_x U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})> + \mu^{-1}<\nabla_y U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu)>$$

예비정리 1~5로부터 $\mu\in(0, \mu^*)$에 대하여

$$\begin{aligned}
&u_\mu(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&=<\nabla V(\boldsymbol{x}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})>+\xi_\mu <\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})>+\mu^{-1}\xi_\mu <\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y},)> \\
&=<\nabla V(\boldsymbol{x}), F_r(t, \boldsymbol{x})> \\
&\quad+<\nabla V(\boldsymbol{x}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})-F_r(t, \boldsymbol{x})> \\
&\quad+\xi_\mu<\nabla_x W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})> \\
&\quad+\mu^{-1}\xi_\mu<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)> \\
&\quad+\mu^{-1}\xi_\mu<\nabla_y W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\
&\boldsymbol{g}_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}(S\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{y}), \mu)> \\
&\quad\le[-\tilde{\alpha}_1 V(\boldsymbol{x})+\tilde{\alpha}_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})+\tilde{\epsilon}] \\
&\quad+[\eta_0 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]+\xi_\mu[\psi_1 W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad+\psi_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\psi_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \\
&\quad+\mu^{-1}\xi_\mu[-\zeta W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]+\xi_\mu[\tilde{k}_1 W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad+\tilde{k}_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{k}_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \\
&=-\tilde{\alpha}_1 V(\boldsymbol{x})+(\eta_0+\xi_\mu\eta_2) V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad+\xi_\mu(\eta_1-\zeta/\mu) W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{\alpha}_2 V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad+\xi_\mu\eta_3 W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{\epsilon} \\
&=-<\begin{bmatrix} V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) \\ W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix}, M_\mu\begin{bmatrix} V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) \\ W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix}> \\
&\quad+<\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 \\ \xi_\mu^{\frac{1}{2}}\eta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) \\ \xi_\mu^{\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix}>+\tilde{\epsilon} \\
&\le-\|M_\mu^{-1}\|^{-1}[V(\boldsymbol{x})+W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \\
&\quad+[\tilde{\alpha}_2^2+\xi_\mu\eta_3^2]^{\frac{1}{2}}[V(\boldsymbol{x})+\xi_\mu W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^{\frac{1}{2}}+\tilde{\epsilon} \\
&\le-\|M_\mu^{-1}\|^{-1}\min\{1, \xi_\mu^{-1}\} U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad+[\tilde{\alpha}_2^2+\xi_\mu\eta_3^2]^{\frac{1}{2}} U_\mu^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{\epsilon} \\
&=-\sigma_\mu U_\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{\beta}_\mu U_\mu^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\tilde{\epsilon}
\end{aligned}$$

시스템 (25), (26)의 해를 따라서 거의 모든 곳에서(almost everywhere) $\dot{U}_\mu(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))=u_\mu(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))$임을 주목하면, 증명의 나머지 부분은 정리 1의 증명과 동일한 방법으로 진행될 수 있다.

마지막으로 전차수시스템의 거동은 μ가 0으로 접근함에 따라 축소차수시스템의 거동에 접근함을 보일 수 있다.

따름정리

$\mu\in(0, \mu^*)$일 때 시스템 (25), (26)의 모든 궤적 $(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))$에 대한 투영운동(projected motion) $\boldsymbol{x}(t)$는 대역적 평등흡인성을 가지고, $\sum_{r_\mu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\textstyle\sum_{r_\mu}=\{\boldsymbol{x}\in R^n: V(\boldsymbol{x})\le r_\mu^2\}$$

또한 $\lim_{\mu\to0^+} d(\sum_{r_\mu}, \sum_{r_0})=0$이다. 여기서, d는 Hausdorff metric(부록참조)이고, 이것은 두 긴밀 집합 사이의 거리를 정의한다.

증명 :

$$\lim_{\mu\to0^+}\sigma_\mu=\lim_{\mu\to0^+}\|M_\mu^{-1}\|^{-1}=\tilde{\alpha}_1, \lim_{\mu\to0^+}\xi_\mu=0$$

으로부터

$$\lim_{\mu\to0^+} r_\mu=\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^{-1}[\tilde{\alpha}_2+(\tilde{\alpha}_2^2+4\tilde{\alpha}_1\tilde{\epsilon})^{\frac{1}{2}}]=r_0$$

이러한 의미에서 $\mu\to0^+$일 때, 축소차수시스템의 거동은 회복된다.

7. 결 론

본 논문에서는 특이섭동 파라미터 μ로 특정지워지는 특이섭동 불확실시스템에 대하여 출력 되먹임 제어법칙인 견실확정제어법칙을 설계하였다. $\mu=0$으로 둠으로써 불확실 축소차수시스템을 유도하고, 이 불확실 축소차수시스템으로부터 제어기의 구조를 설계하고, 제어기 파라미터는 전차수시스템의 정보를 참조하여 결정하였다. 제어된 축소차수시스

템은 어떤 안정한 성질(정확하게 대역적 평등흡인성)을 가짐을 증명하고, 이 안정한 성질은 특이섭동에 대하여 견실함을 보였다. 즉, $\mu<\mu^*$일 때 전차수시스템이 안정한 성질을 가짐을 보였다. 여기서, μ^*는 계산할 수 있는 상한값이다. 또한 μ가 0으로 접근함에 따라 전차수시스템의 거동이 축소차수 시스템의 거동에 접근함을 보였다.

이 제어법칙은 일반적으로 제어기설계시 무시되는 센서나 작동기 동역학과 같은 기생동역학을 고려하고자 할 때 이용될 수 있다.

후 기

이 연구는 1992년도 한국과학재단 연구비지원(과제번호 923-0900-014-2)으로 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

(1) Ambrosino, G., Celentano, G. and Garofalo, F., 1985, "Robust Model Tracking Control for a Class of Nonlinear Plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 275~279.

(2) Barmish, B.R. and Leitmann, G., 1982, "On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absense of Matching Conditions," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol AC-27, pp. 153~157.

(3) Corless, M. and Leitmann, G., 1981, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 26, pp. 1139~1144.

(4) Corless, M., Leitmann, G. and Ryan, E. P., 1990, "Control of Uncertain Systems with Neglected Dynamics," Zinober, A., Editor, *Deterministic Nonlinear Control of Uncertain Systems: Variable Structure and Lyapunov Control*, Chapter 12, Peregrinus, London.

(5) Corless, M. and Ryan, E. P., 1988, "Robust Feedback Control of a Class of Singularly Perturbed Uncertain Dynamical Systems," *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, pp. 1684~1686, Austin, Texas.

(6) Kang, C. G., Leitmann, G. and Horowitz, R., 1989, "Robust Deterministic Controller Design of a Two Degree of Freedom SCARA Manipulator," *Proc. American Control Conf.*, pp. 1457~1462, Pittsburgh, PA.

(7) Leitmann, G. and Ryan, E. P., June 1987, "Output Feedback Control of a Class of Singularly Perturbed Uncerain Dynamical Systems," *Proc. American Control Conf.*, pp. 1590~1594, Minneapolis, MN.

(8) Leitmann, G., Ryan, E. P. and Steinberg, A., 1986, "Feedback Control of Uncertain System: Robustness with Respect to Neglected Actuator and Sensor Dynamics," *Int. J. Control*, Vol.43, pp. 1243~1256.

(9) Kokotović, P. V.,1984, "Application of Singular Perturbation Techniques to Control Problem, *Society for Industrial Applied Mathematics(SIAM) Review*, Vol. 26, Oct. pp. 501~550.

(10) Kokotović, P. V., O'Malley, R. E. and Sannuti, P., 1976, "Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory - an Overview," *Automatica*, Vol. 12, pp. 123~132.

부 록

부록 1 절대연속함수

정의.

함수 $\boldsymbol{x}: I \rightarrow R^m$이 다음 조건을 만족할 때, 유한구간 I에서 절대연속(absolutely continuous)이라고 한다. 주어진 $\epsilon>0$에 대하여, I의 겹치지 않는 구간 $I_1, I_2, \cdots, I_n$의 임의의 유한집합의 길이 총합 $(I_1+I_2+\cdots+I_n)$이 δ보다 작고,

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{\|\boldsymbol{x}(t'_i)-\boldsymbol{x}(t''_i)\| : t'_i,\ t''_i \in I_i\} \leq \varepsilon$$

인 $\delta>0$가 존재한다.

참고.

절대연속함수는 Lebesgue측도 영인 점의 집합을 제외한 구간 I내의 모든 점(즉 거의 모든 곳)에서 도함수를 갖는다.

부록 2 **Carathéodory**함수

정의.

구간 I를 $I=\{t \in R : |t-t_0| \leq c,\ t_0 \in R,\ c>0\}$로

정의하자. 함수 $\boldsymbol{f}: I \times R^m \to R^m$이 다음 조건을 만족할 때 Carathéodory함수이다.

(i) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$는 t가 고정될 때 $\boldsymbol{x}$에 대해 연속이다.

(ii) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$는 $\boldsymbol{x}$가 고정될 때 t에 대해 Lebesgue 가측(Lebesgue measurable)이다.

(iii) 다음을 만족하는 Lebesgue적분 가능함수 $m: I \to R$이 존재한다.

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq m(t), \ \forall (t, \boldsymbol{x}) \in I \times R^m$$

Carathéodory 정리.

$\boldsymbol{f}: I \times R^m \to R^m$가 Carathéodory함수이면 미분방정식

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

는 구간 I에서 절대연속함수인 일반해를 갖는다.

부록 3 Hausdorff metric

정의.

(X, ρ)를 거리공간(metric space)이라고 하고, $\boldsymbol{x}$를 X의 공집합이 아닌 긴밀부분집합이라고 하자.

$$\rho(a, B) = \min_{y \in B} \rho(a, y), \ \rho(b, A) = \min_{x \in A} \rho(b, x)$$

$$\underline{\rho}(A,B) = \min_{x \in A} \rho(\boldsymbol{a},B), \underline{\rho}(B,A) = \min_{y \in B} \rho(y,A)$$

일 때,

$$d(A, B) = \max\{\rho(A, B), \ \rho(B, A)\}$$

로 정의한다. 여기서, d를 Hausdorff metric이라고 한다.