

〈論 文〉

유연한 구조물 위를 주행하는 물체의 동역학적 해석

이 기 수

(1994년 1월 7일 접수)

Dynamic Analysis of a Body Moving on a Flexible Structure

Kisu Lee

Key Words : Dynamic Interaction of Moving Bodies and Flexible Structures(움직이는 물체와 유연한 구조물 사이의 동적 상호작용), Contact Force(접촉력), Constraints(구속 조건), Error Vector(오차벡터), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

An efficient iterative method is presented for the dynamic analysis of bodies moving on flexible structures. In contrast to traditional approaches, the nominal motion of the body is considered here as an unknown. The correct contact forces between the bodies and the flexible structures are computed by an iterative method reducing the specially defined error vectors to zero, and thus satisfying the constraints between the bodies and the structures. Even though only simple equations of motions and simple time integrators are adopted, the correct solutions are economically obtained and the Timoshenko paradox is completely resolved. Numerical simulations are conducted to demonstrate the accuracy and reliability of the solution and to compare the results with the reference.

1. 서 론

유연한 구조물 위를 주행하는 물체에 관한 동역학적 해석은 전통적으로 철도차량과 관련되어 연구가 수행되었으며, 최근에는 일반 기계의 고속화 및 경량화와 더불어 각종 산업용 기계에도 그 중요성이 인식되고 있다. 철도차량의 경우 현재의 기술 수준에 의하여 고속의 자기부상열차를 운행할 경우 궤도(guideway)의 처짐은 미소하여야 하고 궤도의 강성도는 높아야 하므로 궤도구조물이 전체 시스템 제작 비용에서 차지하는 비율은 대단히 높아진다. 그런데 자동제어 등 기술의 진보와 더불어 좀더 유연한 수준의 궤도 사용이 가능하리라고 예상되고

있으며 이를 위하여는 차량과 유연한 구조물 사이의 동역학적 상호작용을 엄밀히 해석할 필요가 있다. 또한 바퀴에 의하여 주행하는 전통적인 철도차량의 경우에도 고속화 및 성능향상을 위하여는 차량과 철도레일을 포함한 전체 시스템에 대하여 동역학적 해석이 필요하다.

전통적으로 유연한 구조물 위를 주행하는 물체에 관한 동역학적 해석을 위하여는, 대단히 복잡한 방정식 유도 및 그 해를 피하기 위하여, 참고문헌^(1,2)에서 보인 바와 같이 물체의 주행속도(nominal velocity)를 사전에 지정하여 계산을 수행하였다. 그러나 이 같은 가정에 의하여서는 동역학적 해석 자체가 불완전해지고, 특히 Timoshenko paradox⁽³⁾에 의하여 에너지보존법칙이 성립되지 않으며, 그 부정확성에 대하여는 이들 참고문헌에 언급되어 있다. 최근 Vu-Quoc과 Olsson⁽⁴⁾은 물체의 주행속도

*정희원, 전북대학교 기계공학과

를 사전에 지정하지 않고 미지수로 하여 방정식을 유도하였으며 차량과 구조물의 비선형 연립방정식을 미분대수방정식(differential algebraic equation) 해법을 이용하여 시간적분에 의하여 해를 구하였다. 그러나 이 경우 방정식은 속도전달항(velocity convective terms) 등으로 인하여 대단히 복잡한 비선형 형태가 되며 상미분방정식 해법이 적용될 수 없고 특수한 해법이 필요하다. 그리고 이상의 방법들은 주로 유연한 구조물 위에서 바퀴가 항상 접촉하여 주행하는 경우의 해석이었으며, 실제로 차량과 같은 다물체(multibody)가 유연한 구조물 위에서 주행하는 문제를 해석할 수 있도록 그 이론 및 방법을 확장하기가 쉽지않으며, 특히 철도레일처럼 유연한 구조물에 간격(gap)이 있는 경우의 해석은 불가능하다.

현재 다물체 동역학은 참고문헌^(6,8)에 이미 교과서적인 수준으로 정리되어 있으며, 이를 이용한 상업용의 일반적인 전산 프로그램은 각종의 차량 동역학 등에 광범위하게 응용되고 있다. 그러나 바퀴와 유연한 구조물 사이의 상호작용은 참고문헌^(6,8)에 기술되어 있는 것과 같은 형태의 구속 조건을 이용하여 표시할 수 없다. 또한 유한요소법을 이용한 경우 유연한 구조물의 절점은 질량과 탄성을 동시에 가지므로, 참고문헌⁽⁷⁾의 예제 등과 같이 접촉 부분에 질량이 없는 스프링의 존재를 가정하여 시간적분의 정확도를 유지시키는 방법에 의하여 접촉 문제를 풀 수 없다. 따라서 다물체 동역학의 일반적인 해법 즉, 참고문헌^(6,8)에 기술된 방법을 이용한 상업용의 일반적인 전산 프로그램으로 본 논문과 같은 문제를 정확히 해석하기 위하여는 접촉력 계산을 위한 별도의 루틴을 만들어야 한다.

본 논문에서는 참고문헌^(8,9)에서 각각 접촉문제와 다물체 동역학문제를 해석하기 위하여 제안된 반복계산법(iterative scheme)에 의하여 유연한 구조물 위를 주행하는 물체에 대한 동역학적 해석을 수행하고자 한다. 유연한 구조물은 간단한 유한요소법에 의하여 모델링하며 유연한 구조물과 그 위를 주행하는 물체 사이에 작용하는 힘을 반복계산법에 의하여 구한 후 단순한 시간적분법을 적용하면 되므로, 방정식 및 계산과정이 대단히 단순 명확하며 또한 경제적인 계산이 가능하다. 잘 알려져 있는 문제의 예제 계산을 통하여 본 방법의 정확도와 신뢰성을 점검하며 또한 본 계산방법을 통하여 Timoshenko paradox를 해소할 수 있음을 보여준다.

2. 기본 방정식 및 구속조건

2.1 일반적 고찰

본 논문에서는 Fig. 1에 보인 바와 같이 강체바퀴가 유연한 보로 구성된 구조물 위를 미끄러지지 않고 굴러서 주행하는 문제를 해석하기로 하며 그 결과를 참고문헌⁽⁴⁾과 비교 검토하기로 한다. 바퀴가 유연한 보위를 굴러가는 경우 보에는 탄성변형이 일어나고 바퀴의 속도는 변하게 되며 결국 바퀴의 속도 및 운동방향은 해의 함수가 되고 사전에 이를 결정할 수 없다. 만약 바퀴의 주행속도 및 방향을 해 이전에 지정하여 일정하다고 가정한다면 Timoshenko paradox에 봉착하게 되며 정확한 해를 얻을 수 없다. 그런데 만약 보에 작용하는 힘의 크기, 방향, 위치를 매 시간간격(time step)마다 시간적분 이전에 알 수 있다면 보의 운동방정식은 기초적인 유한요소법 및 간편한 시간적분법에 의하여 정확히 풀리게 된다. 한편 바퀴에 작용하는 힘의 크기, 방향, 위치를 매 시간간격마다 사전에 알 수 있다면 바퀴의 운동방정식 역시 간편한 시간적분법에 의하여 정확히 풀리게 된다. 또한 바퀴와 보 사이의 정확한 접촉력이 주어지면 이들 사이의 동역학적 구속조건은 각각의 운동방정식의 해에 의하여 자동적으로 만족된다. 이러한 사항을 근거로 하여, 본 논문에서는 바퀴와 보 사이에 작용하는 힘을 매 시간간격마다 반복계산법에 의하여 계산하며, 여기에서 계산된 접촉력을 이용하여 시간적분을 수행한다. 이와 같은 과정은 참고문헌^(8,9)의 반복계산법에 의한 계산과정과 실질적으로 동일하며 이들 참고문헌과 동일한 이론에 의하여 정확한 해가 얻어짐을 증명할 수 있다. 즉 본 논문에서는 참고문헌^(8,9)과 유사한 방법에 의하여 오차벡터를 정의하며 매 시간간격마다 이러한 오차벡터를 0으로 감소시키는 방법에 의하여 정확한 접촉력 및 해를 구하는 것이다. 특히 본 논문에서는 각 시간간격(time step)에서 매 반복계산(iteration)마다 바퀴의 중심에서 보에 수직선을 그어 접촉점을 계산하므로 정확한 접촉점을 찾을 수 있다.

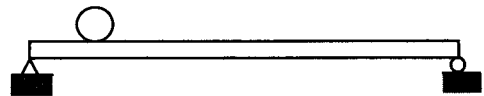


Fig. 1 Rigid body/structure model

2.2 바퀴와 보의 운동방정식

본 논문에서는 바퀴의 운동방정식 및 보의 운동방정식을 Fig. 2와 같은 관성좌표계 (x, y) 를 이용하여 표시한다. Fig. 2와 같이 바퀴의 접촉점이 수직방향과 각도 ϕ 를 이루고 그 점에 보와의 접촉에 의하여 Fig. 3과 같이 접촉력 p 가 작용하면, 본 논문에서는 접촉력 p 를 접선방향 힘과 법선방향 힘으로 구분하여 다음과 같이 표시한다.

$$p = \begin{bmatrix} p_t \\ p_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

위에서 하첨자 t 와 n 은 접선과 법선방향을 표시한다. 한편 (x, y) 방향의 벡터성분은 다음과 같은 행렬 T 를 이용하여 (t, n) 방향의 성분으로 변환된다.

$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

바퀴의 접촉점에 접촉력 p 가 작용하며, 바퀴중심에 외력 \bar{F} 가 작용하면 운동방정식은 다음과 같다.

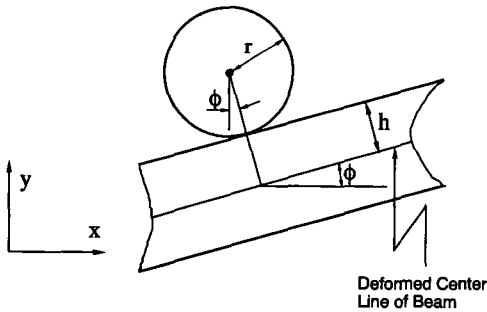


Fig. 2 Coordinates and model parameters

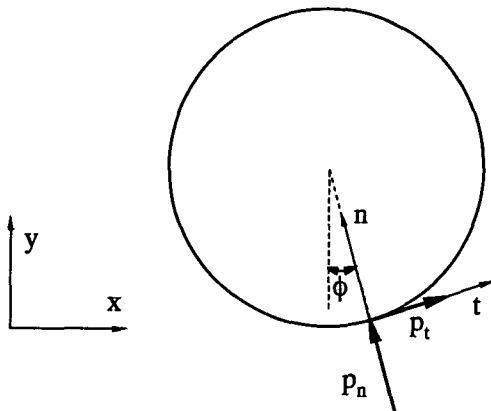


Fig. 3 Contact forces on the wheel

$$\begin{aligned} \bar{M}\ddot{u} &= T^T p + \bar{F} \\ \bar{J}\ddot{\theta} &= p_t r \end{aligned} \quad (3)$$

위에서 \bar{M} 은 바퀴의 질량행렬, \bar{J} 는 바퀴의 관성모멘트, \ddot{u} 는 관성좌표계에 대한 바퀴중심의 x, y 방향 변위, $\ddot{\theta}$ 는 바퀴의 회전각(반시계 방향으로 측정함), r 은 바퀴의 반경, 상첨자 T 는 전치(transpose)를 나타낸다. 위에서 접촉력 p 를 제외한 나머지 벡터는 모두 (x, y) 좌표계 성분으로 구성되어 있다.

본 논문에서 보는 참고문헌(4)과 마찬가지로 미소변형을 가정하며 Bernoulli Euler 보이론을 적용하고, 현실적인 모델인 경우 보의 축방향 변형은 무시할 수 있으므로, 본 논문에서 보의 축방향 변형은 방정식에 포함시키지 않는다. 보에는 Newton 제3법칙에 의하여 바퀴에 작용하는 접촉력과 크기는 같고 방향은 반대인 접촉력이 작용한다. Fig. 4와 같이 보 표면위의 한 점에 힘 p_t 및 힘 p_n 이 작용한다면 이들 힘은 x, y 방향으로 좌표변환시킬 수 있으며, 특히 표면에 작용하는 x 방향의 힘과 중립면에서의 높이 h 를 곱하면 굽힘모멘트가 유발된다. 이들 접촉점에서 발생하는 굽힘모멘트 및 수직방향의 힘성분은 기초적인 유한요소법에 의하여 절점에서의 하중(consistent load) p^* 로 변환되며(10) 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$p^* = \begin{bmatrix} hN_2 \\ -N_1 \end{bmatrix}^T T^T p \quad (4)$$

위에서 접촉력 p 는 힘 p_t 및 힘 p_n 으로 이루어진 열벡터, p^* 는 굽힘모멘트 및 수직방향의 힘으로 이루어진 유한요소 절점의 열벡터, N_1 은 기본적인 보이론의 C_1 연속 Hermitian 보간함수를 이용한 행벡터, N_2 는 N_1 을 x 로 미분한 함수로 이루어진 행벡터이다. 보에 바퀴에 의한 상기의 접촉력 및 기타 외력 f^* 가 작용할 때, 유한요소법의 기본적인

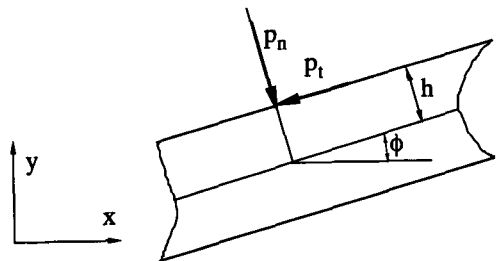


Fig. 4 Contact forces on the beam

인 이론에 의하여, 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M\ddot{u} + Ku = p^* + f^* \quad (5)$$

위에서 M 은 보의 질량행렬, K 는 보의 강성도행렬, u 는 보 절점의 변위벡터(즉, 단면 회전 및 수직변위), p^* 는 바퀴의 접촉력에 의한 힘벡터(consistent load vector), f^* 는 접촉력을 제외한 외력벡터를 나타낸다.

2.3 접촉점, 구속조건, 오차벡터

Fig. 2와 같이 보의 중립면과 보의 윗면 사이의 수직거리를 h , 바퀴의 반경을 r 이라고 할 때, 바퀴가 항상 보와 접촉하여 굴러간다면 접촉점에서 바퀴의 접선과 보의 접선은 동일하여야 하며 바퀴의 중심과 보 중립면 사이의 법선방향의 거리는 $r + h$ 로 일정하여야 한다. 또한 바퀴가 미끄러지지 않고 굴러간다면 바퀴의 접촉점과 보 접촉점의 접선방향의 속도는 항상 동일하여야 한다. 그런데 본 논문에서는 바퀴와 보 사이에 작용하는 접촉력을 가정하여 바퀴의 운동방정식과 보의 운동방정식을 각각 별도로 시간적분하는 방법을 사용하고 있으므로 이와 같은 구속조건을 항상 만족시키기 위하여는 특별한 대책을 필요로 한다. 계산도중 임의의 접촉력을 가정하였을 경우 보와 바퀴는 일반적으로 접촉하지 않으며 Fig. 5와 같이 서로 분리되거나 또는 중첩된다. Fig. 5의 바퀴의 중심에서 부록의 방법에 의하여 보의 중립면에 내린 수직선이 바퀴 원둘레 및 보 표면과 만나는 점 \bar{c} 와 c 를 각각 바퀴와 보의 접촉가능점(possible contact pairing points)이라고 정의한다. Fig. 5 바퀴의 중심에서 보의 중립면에 내린 수직선이 중립면과 만나는 점을 d 라고 하면, 점 d 에서의 단면 회전속도와 수직

방향속도는 유한요소법 보간이론에 의하여 다음 식에서와 같이 절점의 속도벡터 \dot{u} 로부터 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \omega_d \\ v_{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 \\ N_1 \end{bmatrix} \dot{u} \quad (6)$$

위에서 ω_d 는 점 d 에서의 단면의 회전속도, v_{dy} 는 점 d 에서의 수직방향 속도를 가리키며, \dot{u} 는 유한요소 절점에서의 속도벡터로서 단면의 회전속도와 수직방향 속도로 구성되어 있다. 미소변형인 경우, 보 접촉가능점 c 의 x 방향 속도와 y 방향 속도를 v_{cx} 와 v_{cy} 라고 하면

$$\begin{aligned} v_{cx} &= -h\omega_d \\ v_{cy} &= v_{dy} \end{aligned} \quad (7)$$

따라서 접촉점 c 의 접선과 법선방향 속도 v_{ct} 와 v_{cn} 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} v_{ct} \\ v_{cn} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_{cx} \\ v_{cy} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} -hN_2 \\ N_1 \end{bmatrix} \dot{u} \quad (8)$$

또한 접촉점 \bar{c} 의 접선과 법선방향 속도 \bar{v}_{ct} 와 \bar{v}_{cn} 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{ct} \\ \bar{v}_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & r \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

위에서 $\dot{u} (\dot{u} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y)^T)$ 는 바퀴중심의 x, y 방향 속도이다. 계산초기($t=0$)에 Fig. 2의 바퀴와 보의 접촉가능점들은 서로 접촉하고 있었다면, 그 후 시간에서 바퀴와 보가 항상 접촉할 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &-(\bar{u}_x - x_c - u_{cx}) \sin \phi \\ &+ (\bar{u}_y + r + h - u_{cy}) \cos \phi - r - h = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

위에서 \bar{u}_x 와 \bar{u}_y 는 바퀴중심의 x, y 방향 변위이고, u_{cx} 와 u_{cy} 는 접촉가능점 c 의 x, y 방향 변위이며, x_c 는 접촉가능점 c 초기 위치의 x 좌표이다. 한편 Fig. 5에서 보와 바퀴 사이에 미끄러짐이 없을 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\bar{v}_{ct} - v_{ct} \\ &= (\dot{u}_x - v_{cx}) \cos \phi + (\dot{u}_y - v_{cy}) \sin \phi + r\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

구속조건 (10)과 (11)은 항상 만족되어야 한다. 따라서 접촉조건 (10)을 미분한 다음의 조건도 항상 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} &\bar{v}_{cn} - v_{cn} = -(\bar{u}_x - v_{cx}) \sin \phi + (\bar{u}_y - v_{cy}) \cos \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

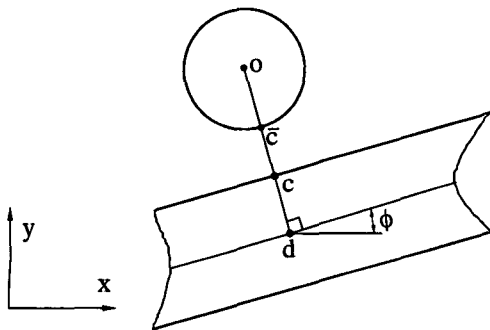


Fig. 5 Possible contact points on the wheel and beam

식(11)은 2점측가능점 사이의 접선방향 속도는 동일하다는 것을 나타내고, 식(12)는 2점측가능점 사이의 법선방향 속도는 동일하다는 것을 나타낸다. 본 논문에서는 속도 구속조건 (11)과 (12)를 이용하여 접촉점에서의 속도 오차벡터 e 를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \begin{bmatrix} \bar{v}_{ct} - v_{ct} \\ \bar{v}_{cn} - v_{cn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(8), (9), (13)에 의하여 속도 오차벡터 e 는 다음과 같이 된다.

$$e = \begin{bmatrix} T \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} r \\ \dot{\bar{u}} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

위에서 I 는 단위행렬을 나타낸다. 한편 변위 구속조건 (10)을 이용하여 위치 오차 g 를 다음과 같이 정의한다.

$$g = -(\bar{u}_x - x_c - u_{cx}) \sin \phi + (\bar{u}_y + r + h - u_{cy}) \cos \phi - r - h \quad (15)$$

본 논문에서는, 매 시간간격마다, 반복계산법에 의하여 위에서 정의한 오차 (13)과 (15)를 0으로 만들어서 바퀴와 보 사이의 구속조건 (11), (12) 및 (10)이 만족되도록 하는 방법을 사용한다. 그런데 변위를 이용한 구속조건 (10)과 운동방정식 (3) 및 (5)를 연립하여 상미분방정식 해법에 의한 시간적분을 적용하면 계산의 정확도와 안정성이 상실되어 해를 구할 수 없다.^(11,12) 따라서 본 논문에서는 기본적으로 속도를 이용한 구속조건 (11)과 (12)를 운동방정식들과 연립하여 시간적분을 수행하기로 하며, 필요한 경우에는 변위 구속조건 (10)을 추가로 적용하는 방법을 사용한다.

3. 방정식 해법

3.1 반복계산법

본 논문에서는, 매 시간간격마다, 다음과 같은 반복계산법에 의하여 접촉력 p 를 계산한다.

$$p_{i+1}^m = p_{i+1}^{m-1} - \alpha A e_{i+1}^{m-1} \quad (16)$$

위의 반복계산법은 참고문헌^(8,9)과 본질적으로 유사하다. 위에서 $i+1$ 은 시간간격, m 과 $m-1$ 은 반복회수를 나타내며, α 는 참고문헌^(8,9)에서 설명된 양의 상수이고, A 는 경제적인 계산(계산 가속)을 위

한 행렬이며, α 와 A 는 참고문헌^(8,9)에서 자세히 소개되어 있으므로 여기에서는 이에 대한 설명은 생략한다. (본 논문의 A 는 참고문헌⁽⁸⁾의 경우 QM_nQ 에 해당하고 참고문헌⁽⁹⁾의 경우의 A_n 에 해당한다.) 접촉력 p 가 위의 반복계산법에 의하여 주어지면 운동방정식 (3)과 (5)를 시간적분하여 바퀴와 보의 변위, 속도와 가속도를 각각 구할 수 있으며, 다음 절에서 약술된 바와 같이 참고문헌^(8,9)과 동일한 방법에 의하여 속도 오차벡터 e 는 0을 향하여 단조 감소하게 된다.

한편 시간적분 오차 및 현실적인 전산기의 정밀도 제한 등으로 인하여, 속도 오차 e 가 매 시간간격마다 0이 되더라도 변위로 표시되는 접촉오차 g 가 반드시 0으로 되지는 않는다. 따라서 필요한 경우에는 다음의 반복계산법에 의하여 접촉력 p_n 을 계산한 후, 운동방정식 (3)과 (5)를 시간적분하여 변위 오차벡터 g 를 허용치(tolerance) 이내로 수정하여야 한다.

$$(p_n)^{m+1} = (p_n)^{m-1} - \alpha' A' g_{i+1}^{m-1} \quad (17)$$

위에서 α' 와 A' 는 반복계산법 (16)의 α 와 A 에 대응하는 상수이다.

3.2 반복계산법의 수렴

본 절부터는 편의상 시간간격을 표시하는 하첨자 $i+1$ 은 생략하기로 한다. 시간간격의 크기 Δt 와 상수 α 가 상당히 작은 경우, 연속인 시간간격 사이에서 가속도의 변화는 거의 선형이므로, 반복계산법에 의하여 접촉력이 변하는 경우, 식 (14)로부터 속도 오차벡터 e 의 변화는 다음과 같이 된다.

$$e^m - e^{m-1} \approx \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} T \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} r \\ \dot{\bar{u}}^m - \dot{\bar{u}}^{m-1} \\ \bar{\theta}^m - \bar{\theta}^{m-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

한편 시간간격의 크기 Δt 와 상수 α 가 상당히 작다면 반복계산법 (16)에 의하여 접선 및 법선방향의 접촉력이 변화하는 경우, 식(3), (4) 및 (5)에 의하여 가속도의 변화는 근사적으로 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^m - u^{m-1} \\ \dot{\bar{u}}^m - \dot{\bar{u}}^{m-1} \\ \ddot{\bar{\theta}}^m - \ddot{\bar{\theta}}^{m-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} M \\ \bar{M} \\ J \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} T \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} r \\ p^m - p^{m-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

따라서 반복계산법 (16) 및 식(18), (19)에 의하여 다음과 같은 식이 성립된다.

$$e^m - e^{m-1} \approx -\alpha CAe^{m-1} \quad (20)$$

위의 행렬 C 는 다음과 같은 대칭이며 양정(positive definite)인 행렬이다.

$$C = \frac{\Delta t}{2} \left[T \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \bar{M} \\ \bar{J} \end{bmatrix} \right]^{-1} \times \left[T \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (21)$$

위의 식은 참고문헌^(8,9)의 기본식과 완전히 동일할 형태이며, 따라서 참고문헌^(8,9)의 수렴에 관한 모든 이론이 그대로 적용되며, 반복계산법 (16)에 의하여 오차벡터 e 는 0을 향하여 단조 감소하게 된다.

본 논문에서는 기본적으로 속도오차 (13)을 이용한 반복계산법 (16)에 의하여 접촉력을 계산한 후, 운동방정식 (3)과 (5)의 시간적분법에 의하여 바퀴와 보의 변위, 속도, 가속도를 구하고 있다. 그러나 현실적인 수치해석상의 오차 및 계산기의 정밀도 제한 등으로 인하여 속도 구속조건 (12)가 만족되더라도 변위 구속 조건 (10)에는 상당한 오차가 포함될 수 있다. 이러한 경우에는 반복계산법 (17)에 의하여 변위를 보정하고 있는데, 이 경우에도 Δt 와 α' 가 충분히 작은 경우, 식 (18)~(21)과 동일한 방법에 의하여 다음과 같은 식이 유도되며 변위 오차 g 는 반복계산법에 의하여 0을 향하여 단조 감소하게 된다.

$$C' = \frac{\Delta t^2}{6} [-\sin\phi \cos\phi] \begin{bmatrix} hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \bar{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [-\sin\phi \cos\phi] \\ hN_2 & I \\ -N_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$g^m - g^{m-1} \approx -\alpha' C' A' g^{m-1} \quad (23)$$

3.3 실제적인 계산방법

실제 계산시에는 앞 절의 식(18)~(23)과 같은 복잡한 과정은 불필요하며, 단지 오차벡터(13), (15) 및 반복계산법 (16), (17)만이 필요하다. 각 시간간격에서의 반복계산법에 의한 계산과정은 참고문헌^(8,9)에서 제시된 계산과정과 실질적으로 동일하므로 여기에서는 중복되는 설명을 피하기로 하며, 시간간격 $i+1$ 에서의 계산과정을 요약하기로 한다.

(1) 반복회수 m 을 $m=0$ 으로 한다. 시간간격 i 에서의 계산결과 ($t=0$ 에서는 초기 조건)를 이용하여 접촉가능점, 접촉각 ϕ 및 접촉력 p^0 를 근사적으로 추정한다. (예로써 이전 시간간격까지의 결과를 외삽하여 접촉가능점, 접촉각 및 접촉력 p^0 를 initial guess) 참고문헌^(8,9)과 유사한 방법에 의하여 반복계산법에 필요한 상수 α 를 계산한 후 step 3으로 간다.

(2) 반복계산법 (16)에 의하여 p^m 을 계산한다. (현 시간간격에서의 접촉력 p 는 여기에서 결정된다.)

(3) 바퀴와 보에 관한 운동방정식 (3)과 (5)를 시간적분하여 각각의 변위, 속도 및 가속도를 계산한다.

(4) Step 3에서 계산된 바퀴와 보의 변위를 이용하여, 부록의 방법에 의하여 접촉가능점 및 접촉각 ϕ 를 계산한다.

(5) 식(14)에 의하여 속도 오차벡터 e^m 를 계산한다.

(6) 속도 오차벡터 e^m 의 크기가 지정된 허용치 (tolerance)보다 작으면 step 8로 가고, 그렇지 않으면 Step 7으로 간다.

(7) 계산가속을 위하여 필요한 경우, 참고문헌⁽⁹⁾의 방법에 준하여 가속행렬 A 를 계산한다. (본 논문의 경우 반복계산법의 수렴 속도가 대단히 빠르므로 5 iterations 이내에 A 를 합리적으로 계산할 수 있음.) $m=m+1$ 로 하여 step 2로 가서 현 시간간격에서의 계산을 반복한다.

(8) $m=0$ 으로 하며, 이후 식(15)에서 정의된 위치오차 g 및 반복계산법 (17)을 이용하여 step 2~step 7의 과정을 반복하여 운동방정식을 적분하고 위치오차 g 의 크기를 허용치 이내로 감소시킨다. Step 3에서 결정된 변위를 여기에서 수정한다. 다음 시간간격으로 가서 step 1부터 반복한다.

4. 예제 계산

여기에서는 참고문헌⁽⁴⁾에서 사용된 예제와 동일한 예제를 사용하여 본 계산 방법의 정확도를 검사하기로 한다.(참고문헌⁽⁴⁾에 의한 전산프로그램은 참고문헌⁽¹⁴⁾에 기초편이 소개된 전산프로그램 FEAP의 연구용 편에 첨가되었음.) 본 예제 계산시 시간적분은 간단한 4차 Runge-Kutta방법(classical 4th order Runge-Kutta method)를 사용하였으며 참고

문헌⁽⁴⁾의 경우와 비교하기 위하여 시간간격의 크기 (time step size)는 일정하게 하였다. (복잡한 문제인 경우 참고문헌⁽¹³⁾ 등에 소개된 고급의 시간적분법을 이용하여 시간간격의 크기를 변화시킬 수 있다.) 본 예제 계산에서 속도오차 e 의 허용치 (tolerance)는 spectral norm으로 10^{-7} m/s로 하였으며 위치오차 g 의 허용치는 10^{-5} m로 하였다.

4.1 예제 1

Fig. 1에서 보인 바와 같이 강체바퀴가 보 위를 미끄러짐없이 굴러간다. 바퀴의 질량은 3000 kg, 중심에 대한 회전 관성모멘트는 135 kgm^2 , 반경은 0.3 m이다. 보의 길이는 24 m, 단위 길이당 질량은 1250 kg/m , 굽힘강성도 EI는 10^9 Nm^2 이다. 또 보의 중심선에서 보의 윗면까지의 거리는 0.6 m이며, 바퀴의 중심에는 600 KN의 힘이 수직하향으로 작용하고 있다(이 힘은 바퀴 중력의 약 20배이다). 이 하중으로 인한 보 중앙지점에서의 정역학적인 최대 처짐은 약 0.1728 m이다. 보는 유한요소법의 Hermitian 보간을 이용하여 2개의 요소로 분할하며 하나의 절점에서는 2개의 자유도가 존재한다. (참고문헌⁽⁴⁾의 경우에는 축방향의 자유도까지 합하여 하나의 절점에서 7개의 자유도가 존재하며, 수직방향 변위와 관련된 자유도는 절점당 4개이다.)

바퀴는 보의 왼쪽 끝에서부터 주행하기 시작하며, 초기 주행속도를 각각 1 m/s, 10 m/s, 100 m/s의 3개의 경우에 대하여 계산하기로 한다. 시간간격의 크기는 초기 속도 1 m/s의 경우에는 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ 이고 나머지의 경우에는 $\Delta t = 0.0025 \text{ s}$ 로 하였다. 본 예제에서 주행속도는 참고문헌⁽⁴⁾에서 사용된 다음의 속도 V 를 말한다.

$$V = \dot{u}_x + (r+h) \dot{\phi} \tag{24}$$

각각의 경우에 대하여 주행속도의 변화가 Fig. 6~8에 표시되어 있다. 초기 주행속도 1 m/s의 경우에는 최고 주행속도가 도중 약 400% 증가하며 주행 시간은 보가 강체인 경우에 비하여(즉, 주행속도가 불변인 경우에 비하여) 약 1/3 수준이며 참고문헌⁽⁴⁾의 경우와 완전히 일치하고 있다. 초기 주행속도 10 m/s의 경우에는 최고 주행속도가 약 10% 증가하며 출구속도는 9.96 m/s로서 역시 참고문헌⁽⁴⁾의 경우와 완전히 일치하고 있다. 초기 주행속도 100 m/s의 경우에는 최고 주행속도가 약 0.1% 증가하며 출구속도는 99.30 m/s로서 참고문헌⁽⁴⁾와 비슷한

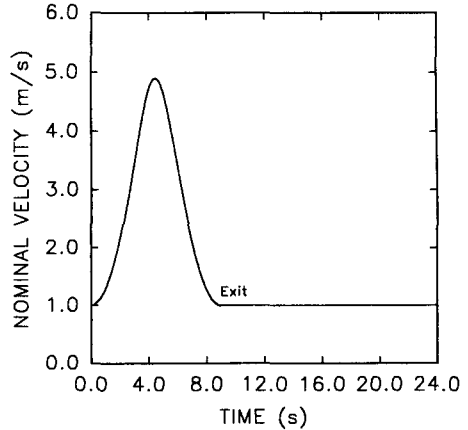


Fig. 6 Nominal velocity vs. time with initial velocity 1 m/s (model 1)

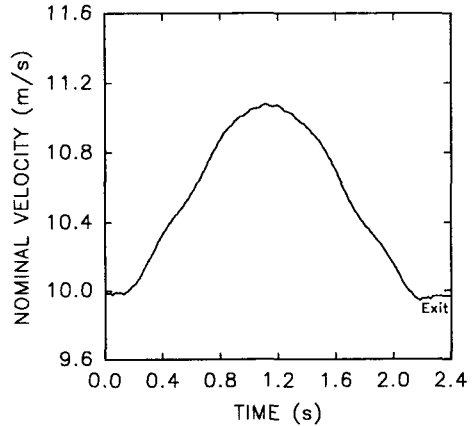


Fig. 7 Nominal velocity vs. time with initial velocity 10 m/s (model 1)

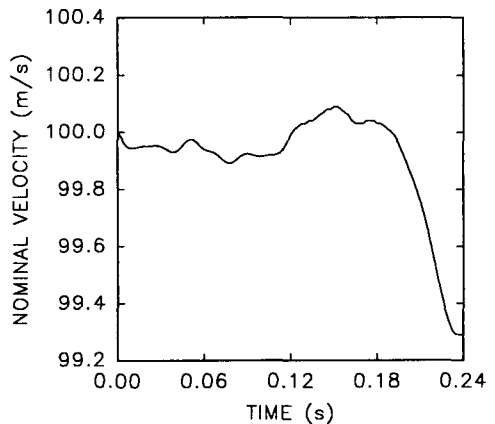


Fig. 8 Nominal velocity vs. time with initial velocity 100 m/s (model 1)

모양으로 변하고 있지만 최고 속도가 약간의 차이를 보이고 있다.

그런데 참고문헌(4)에서는 운동방정식 유도과정의 편의상 바퀴의 회전각, 각속도, 각가속도를 보의 처짐을 무시하고 유도하였다. 예로써 참고문헌(4)의 방정식 유도과정에서 가정한 바퀴의 각속도를 본 논문의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = -V/r \quad (25)$$

위에서 V 는 식(24)에서 정의된 속도이며 r 은 바퀴의 반경이다. 본 논문의 경우에는 위와 같은 가정이 불필요하며 바퀴의 각속도에 관한 아무런 가정없이 운동방정식 (3)이 정확히 성립한다. 본 논문에서 계산된 각속도 $\dot{\theta}$ 와 식(25)에 의하여 계산된 $\dot{\theta}$ 를 Fig. 9에 비교하였는데 2개의 각속도는 거의 일치하지만 약간의 차이를 보이고 있는데, 이러한 차이가 참고문헌(4)와 본 논문의 계산결과에 미소한 차이를 일으킨다고 보인다. 한편 수직방향 변위와 관련된 유한요소 절점에서의 자유도가 본 논문의 경우 2이지만 참고문헌(4)의 경우에는 4이며, 따라서 참고문헌(4)의 경우에는 보다 고차의 형상함수를 이용하고 있는 점도 미소한 차이의 원인이 될 수 있다. (본 논문과 참고문헌(4) 모두 2개의 보요소를 사용했음.) 한편 참고문헌(4)의 경우 해에 축방향 변형이 포함되어 있다. (축방향 강성도 EA는 $5 \times 10^9 \text{N}$) 본 논문의 경우 축방향 변형은 원래의 방정식에 포함되지 않았으나, 축방향 접촉력을 계산한 후 이로 인한 변형 및 축방향 속도를 계산해보았던 바 이로 인한 영향은 극히 미소한 수준이

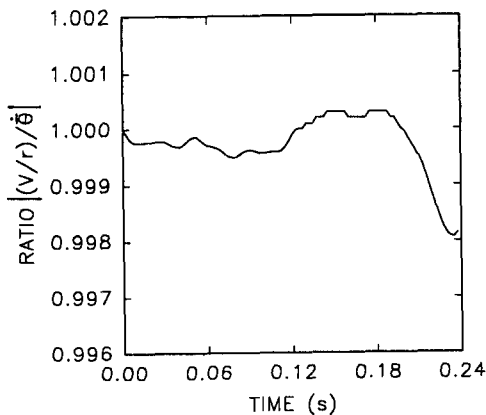


Fig. 9 Comparison of angular velocity of wheel between the present work and reference 4 with initial velocity 100 m/s (model 1)

며 결과에 영향을 주지 못함을 확인할 수 있었다.

각각의 초기 속도에 대하여 보 중앙지점의 변위의 변화를 Fig. 10에 표시하였다. 여기에서 시간은 바퀴가 강체로 된 보 위를 주행하는 시간에 대하여 표준화(normalize) 하였으며 변위는 정역학적인 처짐인 0.1728 m로 나누어 표준화 하였다. Fig. 10은 참고문헌(4)의 결과와 완전히 일치하였다.

초기 주행속도 10 m/s인 경우에 대하여 에너지의 변화가 Fig. 11에 표시되어 있다. 여기에서 에너지균형(energy balance)은 바퀴의 운동에너지, 보의 운동에너지 및 탄성에너지의 합에서 외력에 의한 일을 뺀 것으로 다음과 같은 값이며 일정하여

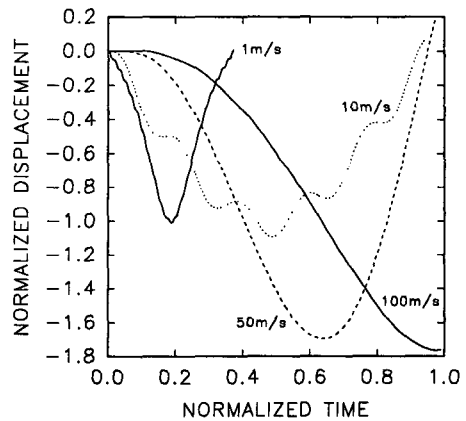


Fig. 10 Vertical midspan displacement (normalized w.r.t. 0.1728 m) vs. time (normalized w.r.t. traversing time on rigid beam) with various initial velocities (model 1)

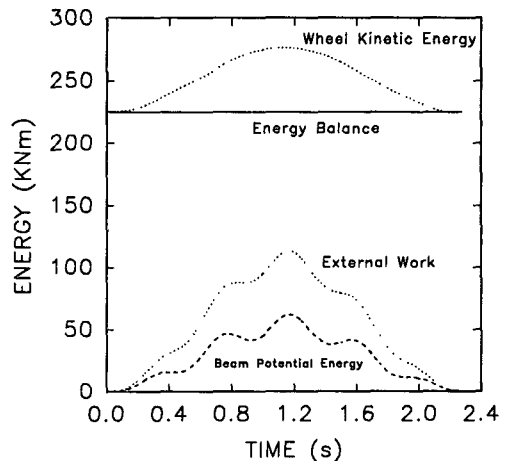


Fig. 11 Energy vs. time with initial velocity 10m/s (model 1)

야 한다.

$$\text{Energy balance} = 0.5 \cdot (\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \int \bar{\theta}^2 + \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}) - \text{External work}$$

Fig. 11에서 보의 운동에너지는 대단히 작으므로 표시하지 않았다. Fig. 11에서 에너지균형 변화의 최대치는 약 0.0029%로서 실질적으로 변하지 않으며 Timoshenko paradox를 완전히 해소시키고 있다. 참고문헌(4)의 경우 동일한 문제에 대하여 $\Delta t = 0.012$ s를 사용하였으며 에너지균형 변화의 최대치는 약 0.008%로서 본 논문의 경우보다 크다. 초기 속도가 100 m/s인 경우에 대하여 에너지균형 및 바퀴의 운동에너지 변화가 Fig. 12에 나타나 있으며 참고문헌(4)과 일치하고 있다. 출구에서의 바퀴 운동에너지는 초기 운동에너지보다 작는데 이로 인하여 보는 진동을 계속하는 것이며 Timoshenko paradox를 해소시키고 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 대단히 단순한 운동방정식을 시간 적분하며, 접촉력을 계산하기 위한 반복계산법의 수렴속도 역시 참고문헌(9) 등에 나타난 바와 같이 대단히 빠르므로 매우 경제적인 계산이 가능하다. 예로써 개인용 전산기(486 DX2-66, 8M RAM)를 이용한 예제 계산 소요 시간은 초기 주행속도가 10 m/s이고 Δt 가 0.0025 s인 경우(총 913 time steps)에 15 sec 미만이며, 초기 주행속도가 100 m/s이고 Δt 가 0.0025 s인 경우(총 96 time steps)에 2 sec 미만으로서 대단히 경제적인 계산임을 알 수 있다.

4.2 예제 2

여기에서는 바퀴의 관성모멘트와 바퀴의 반경을

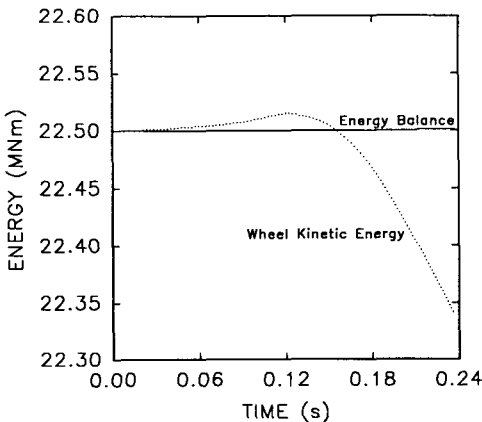


Fig. 12 Energy balance vs. time with initial velocity 100 m/s (model 1)

제외하고는 앞의 예제 1과 동일한 모델을 사용한다. 예제 2에서 바퀴의 관성모멘트와 바퀴의 반경은 모두 0으로 취급하는데, 이것은 자기부상열차 계산시 필요한 모델이다. 본 논문에서 이와 같은 모델을 계산하려면 자료입력시 바퀴의 관성모멘트와 바퀴의 반경을 0으로 하는 이외에 오차벡터 (13)의 1번째 성분 (즉 접선방향 성분)을 0으로 하면 된다(반복계산법 (16)에서 접촉력의 접선방향 성분은 자동적으로 0이 된다). 초기 주행속도 30 m/s인 경우에 본 논문의 방법에 의하여 계산한 에너지균형 변화가 Fig. 13에 표시되어 있으며 참고문헌(4)에서 구한 해보다 더 정확함(즉 변하지 않음)을 알 수 있다. 여기에서 $\Delta t = 0.005$ s를 사용하였다. 참고문헌(4)의 해에는 큰 진폭의 극심한 고주파 요동이 포함되어 있으며 이를 해소하기 위하여

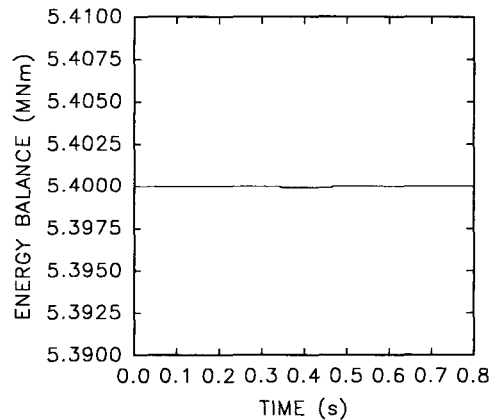


Fig. 13 Energy balance vs. time (model 2)

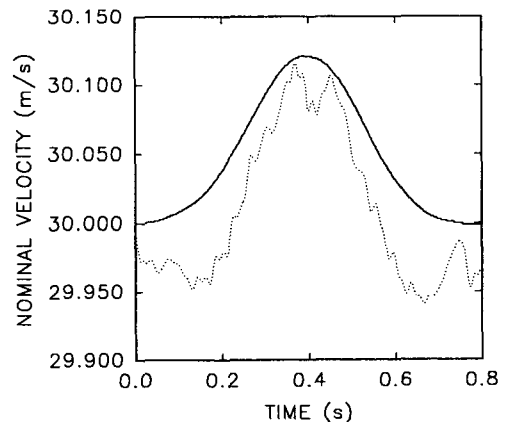


Fig. 14 Nominal velocity vs. time. Solid line: u_x , Dotted line: V (model 2)

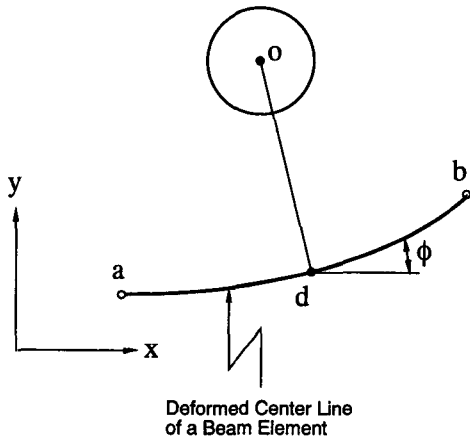


Fig. 15 Point d on the deformed center line of a beam element with the normal line od drawn from a wheel center

시간적분시 특별한 대책을 사용하였다. 그러나 본 논문의 경우에는 예제 1과 동일한 방법에 의하여 해를 구하면 되며 특별한 대책이 필요없다. Fig. 14에 주행속도의 변화가 표시되어 있는데 실선으로 표시된 것은 바퀴 질량 중심의 수평방향 속도 (즉 \dot{u}_x) 이고 점선으로 표시된 것은 식 (24)에서 정의된 속도 V 이다. 속도 \dot{u}_x 는 참고문헌(4)에서 특별한 방법을 통하여 구한 주행 속도와 잘 일치하고 있으나 속도 V 의 변화에는 상당한 요동이 포함되어 있는데 이것은 보의 탄성 진동의 영향으로 보인다. 참고문헌(4)의 경우 원래의 해에서는 큰 진폭의 극심한 고주파 요동이 포함되어 있으며 특별한 해법을 적용시켜 원래의 주행속도 변화에 포함된 극심한 고주파 요동을 해소하였으나, 본 논문에서는 그러한 특별한 대책이 전혀 불필요하다.

5. 결 론

유연한 보 위에서 주행하는 물체의 운동방정식을 반복계산법에 의하여 풀기 위한 효율적인 방법을 제시하였다. 전통적인 해석방법과는 달리 물체의 주행속도를 미지수로 하였으며, 바퀴와 보 사이에 작용하는 접촉력을 미지수로 하여 대단히 단순하고 기초적인 운동방정식을 이용하였다. 바퀴와 보 사이에 작용하는 접촉력은 매 시간간격 마다 반복계산법에 의하여 구하여 특별히 정의된 오차벡터를 0으로 만드는 방법을 사용하였으며 바퀴와 보 사이의 구속조건이 만족되도록 하였다. 시간적분 역시

단순한 방법을 사용하였다. 예제 계산을 통하여 본 계산방법의 정확도를 복잡하고 특수한 방법을 사용하여 해석한 참고문헌의 경우와 비교하였으며 본 계산방법의 신뢰성과 경제성을 입증하였다.

본 논문에서 사용한 반복계산법은 참고문헌(8,9)에서 각각 접촉과 다물체 동역학 문제를 해석하기 위하여 사용한 것과 원칙적으로 동일한 반복계산법이다. 따라서 본 논문의 계산방법은 유연한 구조물 위를 주행하는 다물체의 동역학적 해석, 철도 레일 처럼 간격(gap)이 있는 유연한 구조물 위를 주행하는 물체의 해석 등에 그대로 확장 적용될 수 있다고 판단되며 이에 대한 연구가 추후에 요망된다.

참고문헌

- (1) Blejwat, T. E., Feng, C. C. and Ayre, R. S., 1979, "Dynamic Interaction of Moving Vehicles and Structures," *J. Sound and Vibration*, Vol. 67, pp. 513~521.
- (2) Olsson, M., 1985, "Finite Element Modal Coordinate Analysis of Structures Subjected to Moving Loads," *J. Sound and Vibration*, Vol. 99, pp. 1~12.
- (3) Maunder, L., 1960. "On the Work of a Force Crossing a Beam," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 17, pp. 437~440.
- (4) Vu-Quoc, L. and Olsson, M., 1989, "A Computational Procedure for Interaction of High-Speed Vehicles on Flexible Structures Without Assuming Known Vehicle Nominal Motion," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 76, pp. 207~244.
- (5) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, Boston.
- (6) Amirouche, F. M. L., 1992, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (7) Liang, C. G. and Lance, G. M., 1987, "A Differentiable Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis," *ASME J. Mechanisms, Transmissions, and Automations in Design*, Vol. 109, pp. 405~411.
- (8) Lee, K., 1989, "An Accelerated Iterative

- Method for Contact Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 270~293.
- (9) 이기수, 임철호, 1992, "반복계산법 및 계산 가속기법에 의한 다물체 동역학 해법," 대한기계학회논문집, 제16권 제5호, pp. 899~909.
- (10) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- (11) Petzold, L., 1982, "Differential Algebraic Equations Are Not ODEs," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 3, pp. 367~384.
- (12) Petzold, L. R., 1989, "Recent Developments in the Numerical Solution of Differential Algebraic Equations," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 75, pp. 77~89.
- (13) Hairer, H., Norsett, S. P. and Wanner, G., 1987, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag, Berlin.
- (14) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, 4th Ed., Vol. 1, McGraw-Hill, New York.

부 록

바퀴의 중심에서 보의 중립면에 내린
수직선이 보의 중립면과 만나는 점

절점이 2개인 하나의 보요소 (beam element) ab

의 수직변형을 C_1 연속인 Hermitian 보간을 이용하여 표시할 때, Fig. 15의 보 중립면의 수직변위 y 는 다음과 같이 x 에 관한 3차 방정식이 된다.

$$y = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \quad (\text{A.1})$$

위에서 상수 c_0, c_1, c_2, c_3 는 보요소 양끝 절점 a와 b의 변위에 의하여 결정되는 상수이다. Fig. 15의 바퀴의 중심 o에서 보의 변형된 중립면에 내린 수직선이 중립면과 d점에서 만나며 바퀴 중심의 좌표가 (x_0, y_0) , d점의 좌표가 (x_d, y_d) 이면 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{(y_0 - y_d)}{(x_0 - x_d)} (3c_3x_d^2 + 2c_2x_d + c_1) = -1 \quad (\text{A.2})$$

식(A.2)에 식(A.1)을 대입하면 다음과 같이 x 에 관한 5차 방정식이 얻어진다.

$$(y_0 - c_3x_d^3 - c_2x_d^2 - c_1x_d - c_0) (3c_3x_d^2 + 2c_2x_d + c_1) + (x_0 - x_d) = 0 \quad (\text{A.3})$$

바퀴중심의 좌표가 주어지면 식 (A.3)을 Newton 반복법에 의하여 풀어서, 바퀴의 중심 o에서 변형된 보의 중립면에 내린 수직선이 보의 중립면과 만나는 점 d의 좌표를 구할 수 있다.