

〈論 文〉

# 입자복합재료 내부의 탄성과 분산에 관한 이론적 연구

김진연\* · 이정권\*\*

(1994년 1월 12일 접수)

## A Theoretical Study on the Dispersion of Elastic Waves in Particulate Composites

Jin-Yeon Kim and Jeong-Guon Ih

**Key Words :** Dispersion(분산), Self-Consistent Method(자기일치적 방법), Coherent Potential Approximation(상관포텐셜근사), Resonant Scattering(공명산란), Scattering Pperator(산란연산자)

### Abstract

Elastic wave propagation in discrete random medium studis to predict dynamic effective properties of composite materials containing spherical inclusions. A self-consistent method is proposed which is analogous to the well-known coherent potential approximation. Three conditions that must be satisfied by two effective elastic moduli and effective density are derived for the first time without limit of frequency. The derived self-consistency conditions have the physical meaning that the scattering of coherent wave by the constituents in effective medium is vanished on the average. The frequency-dependent complex effective wave speed and coherent attenuation can be obtained by solving the derived self-consistency conditions numerically. The wave speed and attenuation obtained from present theory are shown to be in better agreements with previous experimental observations than the previous theory.

### 1. 서 론

연속체내에 입자 형상의 비균질체가 불규칙적으로 분포한 복합매질의 유효물성치 (effective properties) 를 구하는 문제는 물리학 및 공학의 여러 분야에서 발생한다. 이러한 문제는 랜덤한 변수를 가지는 미분방정식으로 기술되므로 일반적으로 그 해를 구하기가 매우 힘들다. 몇 가지 근사법이 존재하지만, 거의 모두가 Foldy<sup>(1)</sup>와 Lax<sup>(2)</sup>에 의하여 제시된 확률론적 다중 산란 수식화에 그 근거를 두고 있다.

그 대표적인 예로서, 준결정근사(quasicrystalline approximation; QCA)<sup>(1,2,5,6)</sup>와 상관포텐셜근사(coherent potential approximation: CPA)<sup>(3,4,7,12)</sup>를 들 수가 있다. 일반적으로 다중 산란 문제를 확률론적으로 기술할 경우 무한개의 계층적인 적분방정식을 얻게 되는데, 그 차수는 입사파의 산란된 회수를 의미한다. 예를 들어 두번째의 적분방정식은 두번 산란된 파동에 관한 적분방정식을 나타내고 있다. 그런데, 두번 산란된 파동을 확률적으로 기술하기 위하여서는 두 산란체간의 상대적인 위치에 관한 확률밀도함수인 쌍상관함수(pair-correlation function)를 구하여야 하며, 마찬가지로 세번 산란된 파동의 기술을 위해서는 세 산란체간의 상대적인 위치에 관한 확률밀도함수를 구하여야 한다. 그

\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

러나, 통계학적인 면에서 세 산란체간의 위치에 관한 확률밀도함수나 그 이상의 확률밀도함수를 구하는 것은 이론적으로 불가능하며, 몬테칼로(monte carlo) 모의실험과 같은 수치적인 방법에 의해서도 방대한 계산시간이 요구되므로 현실적으로 계산이 불가능하다. 그러므로 다중 산란문제의 접근은 단일 산란파에 두번 산란된 파동을 근사적으로 포함시키는 것으로 국한된다. 준결정근사법은 다중 산란문제에 대한 가장 기본적인 근사법인 단일 산란 근사(single scattering approximation)에 두번 산란된 파동을 포함시키려는 수식화 과정에서 피할수 없는 마감근사(closure approximation)이다. 준결정근사는 두 개의 산란체가 고정되어 있을 경우에서의 산란파동과 한 개의 산란체가 고정되어 있을 경우의 산란파동이 근사적으로 같다는 가정인데, 이는 결정(crystal)과 같은 주기적인 구조에서는 옳은 가정이다. 준결정근사는 그 이론적인 근거를 추적하기는 매우 힘들지만, 개념적으로는 랜덤한 구조의 유효한 성질을 주기적인 구조에 대한 등가의 값에 의해 구하려는 노력으로 생각할 수 있다. 그런데, 만일 이와 같은 준결정근사를 취할 경우 쌍상관함수를 1 혹은 감소하는 지수함수로 근사하면, 오히려 단일 산란근사를 취하는 결과가 되어 조밀한 계에는 적용할 수 없게 된다. 그러므로 이 준결정근사를 적용할 경우에는 반드시 정확한 쌍상관함수를 구하여, 유효한 물성치를 구하는 것이 필수적이다.<sup>(6)</sup>

한편, 앞에서 설명한 방법이 반복 산란파를 수식화에 직접적으로 포함시키려는 방법임에 반하여, 상관포텐셜근사는 다중 산란효과를 간접적으로 포함시키려는 방법이다. 이 방법은 복합매질을 유효매질과 그것에서 벗어나는 국부적인 차이로 구분하고, 유효매질의 정의에 근거하여, 미지의 유효매질 내를 진행하는 상관파(coherent wave)의 국부적인 물성차이에 의한 산란장이 평균적으로 영이 되게 유효매질의 물성을 구하는 자기일치적(self-consistent) 방법이다. 이 방법은 고체물리학(solid-state physics)에서 처음으로 알려져서,<sup>(3,4)</sup> 그 유용성이 몇몇 연구가들에 의하여 증명되었다. 즉, 강산란(strong scattering)일 경우에는 산란체의 조밀도가 낮을 때, 약산란(weak scattering)일 경우에는 임의의 조밀도에 대하여 정확한 값을 얻을 수 있다고 알려져 있다. 탄성과 문제에서는 이 방법이 주로 저주파수 극한일 경우에만 국한되어 적용되어

왔다.<sup>(7,8)</sup> Gubernatis와 Krumhansl<sup>(7)</sup>은 처음으로 고체물리학에서 활용되고 있었던 산란 수식화를 탄성문제에 적용하였는데, 그들은 산란 수식화의 중요성을 인식하였으나 평균 응력텐서에 Born근사를 취하여 정적인 유효강성을 구하였다. Berryman<sup>(8)</sup>은 산란 변위장에 대한 체적적분 방정식에 대한 일차 Born근사를 취하여 저주파수 극한의 물성치를 얻었다. 또한, Devaney<sup>(9)</sup>는 압축파와 전단파에 대한 일반적인 자기일치적인 분산관계식(dispersion relation)을 구하였지만, 그는 얻어진 분산관계식을 계산할 체제적인 방법을 찾지 못하여, 그의 예도 마찬가지로 저주파 근사에 머물렀다. 자기일치적 방법으로 산란문제를 정의하여 저주파수 극한의 유효물성을 기술할 경우, 적어도 저자의 지식에 의하면 Hill<sup>(10)</sup>과 Budiansky<sup>(11)</sup>에 의한 방법과 같이, 처음부터 정적인 문제로부터 유효강성을 구하는 방법과 비교하여 장점이 거의 없다. 따라서, 본 연구에서는 상관포텐셜근사를 동적인 문제로 확장하여 모든 주파수에 대하여 적용할 수 있는 방법을 제시하고, Kinra<sup>(13,14)</sup>등에 의한 실험결과 및 기존의 Waterman과 Truell<sup>(5)</sup>에 의하여 체계화된 다중 산란이론과 비교하여 제시된 방법의 우월성을 예시하였다. 유도된 식은 분산관계식이 아닌 유효물성이 만족하여야 할 세가지 조건이어서, 동적인 밀도를 체적비 가중합(rule of mixture)으로 가정하지 않고 직접적으로 물성치를 구할 수가 있다. 분산 및 감쇠곡선에서 가장 중요한 물리현상인 공명산란(resonant scattering)을 관찰할 수 있고, 각 공명이 복합재료의 분산 및 감쇠에 미치는 영향을 쉽게 이해할 수가 있다.

## 2. 이 론

### 2.1 자기일치적 유효매질 근사

자기일치적으로 동적인 유효물성을 구하는 문제는 다음과 같이 요약할 수 있다. 먼저, 유효매질을 평균장(average field) 혹은 상관장(coherent field)이 존재할 수 있는 매질이라고 정의한다. 그러므로, 유효매질내에서는 국부적 물성이 유효물성치에서 벗어나에 의하여 발생하는 요동장(fluctuating field)이 평균적으로 영이 되어야 한다. 이러한 유효매질의 정의로 부터 자기일치적 조건을 얻기 위하여, 원래의 기지와 산란체들이 아직 모르는 유효매질내에 매몰되어 있다고 가정한다. 이 때, 유

효율성치는 원래의 복합재료를 구성하고 있던 구성 물질들에 의한 다중 산란을 모두 기술하고 있는 전 산란연산자(total scattering operator),  $T$ 를 평균적으로 영이 되게 하여 구할 수 있다. 그렇지만, 일반적으로 전 산란연산자는 구할 수가 없으므로, 단일 산란연산자,  $t$ 를 이용한다.<sup>(4,8)</sup> 그러므로, 유효물성치는

$$\langle t \rangle = 0 \tag{1}$$

를 이용하여 구할 수 있다. 여기서,  $\langle \rangle$ 는 산란체의 분포, 방향, 모양에 관한 평균을 취하는 연산자이다. 본 연구에서는 Fig. 1과 같이 산란체의 크기가 같고, 구형인 경우를 다루고 있으므로, 위의 식은

$$\langle t \rangle = \sum_j v_j t^j = 0 \tag{2}$$

과 같이 체적비에 관한 평균으로 간단화 된다. 여기서,  $v_j$ 는  $j$ -번째 구성물질의 체적비를 표시한다. 그런데 이 방법에서는 산란체들간의 상관관계를 수학적으로 포함시키지 않고 있으나, 유효매질내에서 산란문제를 정의하므로, 다중 산란효과가 평균적으로 고려되고 있다고 생각할 수 있다.

### 2.2 등적인 유효물성치의 결정

먼저, 유효매질내의 평균변위장을 Fig. 1과 같이 평면 압축파로 가정을 한다. 즉,

$$\bar{u} = \bar{a} \exp[i(k_l^e \bar{a} \cdot r - \omega t)] \tag{3}$$

으로 표현된다. 여기서,  $\bar{a}$ 는 입자의 운동방향을 표시하는 단위벡터인데 압축파이므로 파동의 진행 방향과 같다. 또한, 유효파수  $k_l^e (= \omega/c_l^e)$ 는 아직 결정되지 않았고, 마찬가지로 압축파의 속도  $c_l^e$ 도 미정의 변수이다. 시간의존항  $\exp(-i\omega t)$ 는 표현의 간편화를 위하여 이후로는 생략하겠다. 삼첨자

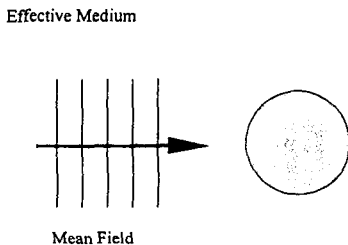


Fig. 1 Mean field propagation in the effective medium with a spherical inclusion

' $e$ '는 유효매질의 물성과 변수를 나타내고 있다. 그러면 이 평균장은 물성의 국부성에 의하여 산란을 일으키게 되므로 산란장(혹은 요동장)  $\tilde{u}$ 를 유발시켜 전장(total field)은 다음과 같이 표시된다. 즉,

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \tag{4}$$

균질하고 등방성인 기지와 산란체에 대하여 그 산란장은 다음과 같은 적분에 의하여 나타내어 질 수 있다.<sup>(15)</sup>

$$\tilde{u}_k = \int_{\Omega} G_{ki} \{ \delta\rho\omega^2 \tilde{u}_i + \delta C_{ijpq} \tilde{u}_{p,qj} \} dr \tag{5}$$

여기서,  $\delta\rho = \rho - \rho^e$ 와  $\delta C_{ijpq} = C_{ijpq} - C_{ijpq}^e$ 는 주위 매질과 산란체간의 밀도 및 강성의 차이를 의미하고,  $G_{ki}$ 는 균질하고 등방성인 무한 매질의 Green 텐서<sup>(15)</sup>를 나타낸다. 그러한 매질에서 탄성계수 텐서는

$$C_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \tag{6}$$

의 관계를 가지는데,  $\lambda, \mu$ 는 Lamé의 탄성계수를 의미한다. 또한 적분영역  $\Omega$ 는 산란체가 차지하고 있는 공간이 된다. 일반적으로 무한대에서의 경계 조건을 만족하는 Green텐서는

$$G_{ij}(r-r') = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ k_s^2 \frac{e^{ik_s R}}{R} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{e^{ik_s R}}{R} - \frac{e^{ik_p R}}{R} \right) \right] \tag{7}$$

로 구해진다.<sup>(21)</sup>  $R = |r-r'|$ 은 가진점  $r'$ 과 수신점  $r$  사이의 거리를 표시한다.  $k_l = \omega\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$  및  $k_s = \omega\sqrt{\rho/\mu}$ 는 각각 주위 매질의 압축파와 전단파 파수이다. 본 연구에서는 산란문제에 관한 체적적분 방정식을 다루므로, 해당하는 산란연산자는

$$\{ \delta\rho\omega^2 \tilde{u}_i + \delta C_{ijpq} \tilde{u}_{p,qj} \} = t_{ik} \bar{u}_k \tag{8}$$

로서 정의가 된다.<sup>(9)</sup> 식(2), (5) 및 (8)로 부터 자기일치조건을 유도하기 위하여, 원거리 산란장(far-field scattering field)을 근사적으로 구하면, 원거리에서는 Green텐서가

$$G_{ij}(r-r') \sim \frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r} [ k_s^2 (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) e^{ik_s(r-\hat{r}r')} + k_l^2 \hat{r}_i \hat{r}_j e^{ik_l(r-\hat{r}r')} ] \tag{9}$$

로 표현되고, 변위장은

$$\tilde{u}_i \sim f_i(k_l^e) \frac{e^{ik_l r}}{r} g_i(k_s^e) \frac{e^{ik_s r}}{r} \tag{10}$$

이 된다. 여기서,  $\hat{r}_i$ 는  $r$ -방향의 단위벡터,  $f_i(k_i^e)$ 와  $g_i(k_i^e)$ 는 각각 산란 압축파와 산란 전단파의 원거리 크기를 표시한다. 원거리 산란 압축파는

$$f_i(k_i^e) = \frac{ik_i^e}{4\pi\rho^e\omega^2} \hat{r}_i \int_{\Omega} \{ \delta\rho\omega^2 u \cdot \nabla + \delta\lambda k_i^e \Delta - 2\delta\mu E : \nabla\nabla \} e^{-ik_i^e \cdot r} dr \quad (11)$$

이 된다. 여기서,  $\Delta (= \epsilon_{ii})$ 와  $E$ 는 각각 산란체 내부의 순팽창(dilatation)과 변형률텐서를 의미하고 있고,  $:$ 는 2차 텐서의 스칼라곱을 나타낸다. 한편, 식(1)의 자기일치조건은 다음과 같이 표현되는 식과 동등하다. 즉,

$$\langle \hat{a} \cdot t \cdot \hat{a} \rangle = 0 \quad (12)$$

이 조건은 물리적으로 평균 전방산란장(forward scattering field)을 영으로 하는 조건으로 볼 수 있다. 전방산란과 산란연산자간의 아래와 같은 조건<sup>(7)</sup>을 이용하면

$$\hat{a} \cdot t \cdot \hat{a} = 4\pi\rho^e \frac{\omega^2}{k_i^e} \hat{a} \cdot f \quad (13)$$

이 되고, 원래의 자기일치 조건은

$$\sum_i v_i \hat{a} \cdot f_i = 0 \quad (14)$$

으로 유도된다. 식(14)에서, 유효매질의 성질을 평균 전방산란이 영이 되도록 결정할 수가 있는데, 전방산란정리(forward scattering theorem)에 의하면 전방산란의 크기는 총단면적(total cross section)에 비례하므로 산란체의 존재로 인하여 발생하는 모든 입사파로부터의 손실이 평균적으로 영이 되게 하는 조건으로 해석될 수 있다. 그러므로, 식(11), (13) 및 (14)로부터 동적인 유효밀도와 두개의 동적인 유효강성이 만족해야 할 조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sum_i v_i \delta\rho_i \omega^2 \int_{\Omega} \hat{u}_i \cdot \nabla e^{-k_i^e \cdot r} d\Omega = 0 \quad (15)$$

$$\sum_i v_i \delta\lambda_i \int_{\Omega} \Delta_i e^{-k_i^e \cdot r} d\Omega = 0 \quad (16)$$

$$\sum_i v_i \delta\mu_i \int_{\Omega} E_i : \nabla\nabla e^{-k_i^e \cdot r} d\Omega = 0 \quad (17)$$

여기서, 하첨자 'i'는 i-번째 구성물질의 물성을 의미한다. 위의 세 조건을 만족하는 해를 구하므로써 유효물성치를 결정할 수 있다. 한편, 이 조건을 적용하는데 있어서는 기본적으로 탄성파의 입사에 의한 산란체 내부장을 구하여야 한다. 이에 대한 근사로서는 대표적으로 Born근사를 들 수가 있다.<sup>(21)</sup>

그런데 이 Born근사는 전통적으로 많이 쓰이는 방법이기도 하나, 약산란일 경우에만 적용 가능하다. 즉, 저주파수에서나 산란체와 매질간의 물성차이가 매우 작은 경우에만 적용되는 것으로 국한된다. 따라서, 본 연구에서는 해가 주파수에 대한 제한을 받지 않게 하기 위하여, Ying과 Truell<sup>(16)</sup>에 의하여 잘 알려진 완전해를 구하여 자기일치 조건을 계산하였다. 이 방법에서는 식(3)과 같은 압축 입사파에 대하여 압축 및 전단 산란파의 변위포텐셜을  $\tilde{\Phi}_e$ ,  $\tilde{\Psi}_e$ 로 하고, 산란체 내부장의 압축 및 전단파 변위포텐셜을  $\tilde{\Phi}_i$ ,  $\tilde{\Psi}_i$ 로 표시할 때, 이들은 각각

$$\tilde{\Phi}_e = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(k_i^e r) P_n(\cos\theta) \quad (18)$$

$$\tilde{\Psi}_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(k_i^e r) P_n(\cos\theta) \quad (19)$$

$$\tilde{\Phi}_i = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(k_i^e r) P_n(\cos\theta) \quad (20)$$

$$\tilde{\Psi}_i = \sum_{n=0}^{\infty} D_n j_n(k_i^e r) P_n(\cos\theta) \quad (21)$$

로 표시할 수 있다. 여기서,  $j_n$ 과  $h_n$ 는 각각  $n$ -차 구베셀(spherical Bessel) 및 구한켈(spherical Hankel) 함수를,  $P_n$ 은 르장드르(Legendre) 함수를 의미한다. 또한, 산란계수  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ 과  $D_n$ 은 산란체의 경계에서의 변위 및 응력의 연속조건으로부터 구해질 수 있다. 이 산란계수들로부터 내부의 변위 및 변형률 장이 계산될 수 있고, 식(15)~(17)의 적분들은 부록에 나타난 방법을 이용하면 얻을 수 있다.

### 2.3 Waterman-Truell의 근사이론<sup>(6)</sup>

다중 산란이론 중에서 가장 널리 알려져 있는 이론은 Waterman-Truell의 근사이론이다. 본 연구에서 유도된 이론적인 결과를 Waterman-Truell의 근사이론과 비교하려하므로, 그 이론의 결과만을 간략하게 요약하면 다음과 같다. 즉, 이들의 이론이 제시하고 있는 유효파수는

$$\left(\frac{k^e}{k_1}\right)^2 = \left(1 + 2\pi n_o \frac{f(0)}{k_1}\right)^2 - \left(2\pi n_o \frac{f(\pi)}{k_1}\right)^2 \quad (22)$$

이고, 여기서,  $k_1$ 와  $n_o$ 는 각각 주위 매질의 파수와 산란체의 개수밀도를,  $f(0)$ 와  $f(\pi)$ 는 전방산란 크기와 후방산란 크기를 표시하고 있는데, 식(18)의 산란계수와는

$$f(0) = \frac{1}{ik_1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \quad (23)$$

$$f(\pi) = \frac{1}{ik_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) A_n \quad (24)$$

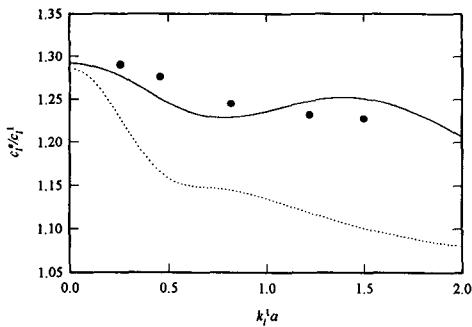
의 관계를 가진다. 식(22)의 의미는 산란체 군이 랜덤하게 분포할 경우, 전방산란과 후방 산란만이 평면 입사파와 상관된 파동을 형성할 수가 있는데, 진행되는 방향의 파동은 결국 앞으로 가는 파동과 뒤로 반사된 파동의 차이로 결정됨을 나타낸다.

### 3. 결과 및 고찰

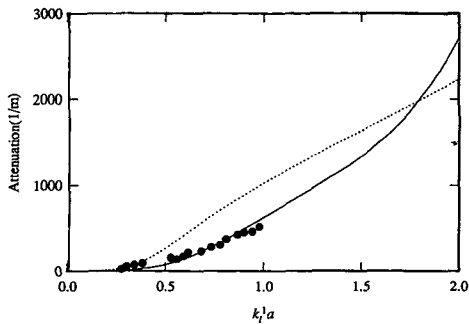
본 연구에서 제시된 이론의 타당성을 검증하기 위하여 glass/epoxy (Tra-cast 3012), steel/PMMA 및 lead/epoxy (Epon 828Z) 입자 복합재료에 대하여, 평균파동의 속도와 감쇠계수를 기준

**Table 1** Material properties of constituents

Materials	Longitudinal wave speed (m/sec)	Shear wave speed (m/sec)	Density (kg/m <sup>3</sup> )
Epon 828Z epoxy	2640	1200	1202
Lead	2210	860	11300
Tra-cast 3012 epoxy	2540	1160	1180
Glass	5280	3240	2492
PMMA	2630	1320	1160
Steel	5940	3220	7800

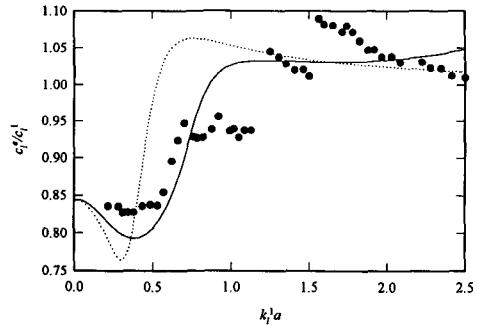


(a) Normalized wave speed

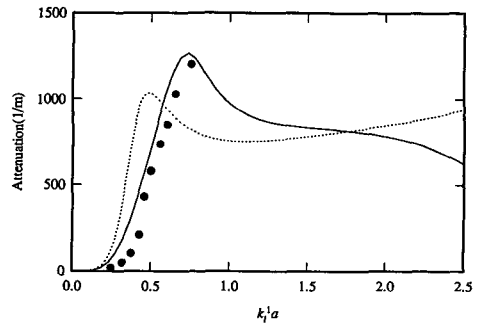


(b) Coherent attenuation

**Fig. 2** Effective longitudinal wave speed and attenuation in glass/epoxy composite of volume fraction 45%. Present theory(—), Waterman-Truell theory(.....), experiment by Kinara et al. ( ● )



(a) Normalized wave speed



(b) Coherent attenuation

**Fig. 3** Effective longitudinal wave speed and attenuation in steel/PMMA composite of volume fraction 15%. Present theory(—), Waterman-Truell theory(.....), experiment by Kinara et al. ( ● )

의 실험치와 (13,14) 비교하였으며, 동시에 Waterman-Truell의 이론에 의한 예측치와 비교하였다. 세가지 복합재료를 구성하고 있는 물질들의 기계적 성질은 Table 1에 나타나 있다.

체적비가 45%인 glass/epoxy 복합재료를 진행하는 압축파의 평균속도와 감쇠계수를 Fig. 2에서 보여주고 있다. 이 그림에서는 평균파동의 속도와 감쇠계수에 있어서 모두 본 연구에서의 이론의 결과가 Waterman-Truell에 의한 결과보다 실험치와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 이 재료는 계산된 주파수 범위안에서 산란체의 공명이 존재하지 않는다는 사실을 Fig. 2에서 알 수 있다. 따라서, 평균파동의 속도에는 급격한 변화가 나타나지 않았고, 감쇠계수에는 피크가 발생하지 않았다. Fig. 3에서는 체적비가 15.2%인 steel/PMMA 복합재료의 압축파 평균속도와 감쇠계수에 대한 이론치와 실험 결과를 비교하였다. 평균파동의 속도를 비교한 Fig. 3(a)에서는 본 연구에서의 이론치, 실험치 및 Waterman-Truell의 이론치 등 세 가지 모두 서로 잘 일치하지 않는 경향을 보이고 있어서 비교하기가 어려우나, 평균속도가 매우 빨리 증가하는 주파수( $ka \approx 0.75$ )를 상대적으로 잘 예측하고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 3(b)에서는 감쇠계수를 비교하였는데 평균파동의 속도에서와는 달리 비교가 가능하였고, 본 연구에서 제안한 이론의 결과가 실험치와 매우 잘 일치하고 있다. 특히 감쇠계수의 피크값과 그 위치를 정확히 예측하고 있다. 감쇠계수의 피크에 해당하는 주파수는 속도가 급격히 증가하는 주파수와 일치하는데 이는 산란체, 즉, 강구(steel ball)의 공명주파수에 해당된다. Steel/PMMA 복합재료와 뒤에서 예시될 lead/epoxy 복합재료는 그 동특성이 glass/epoxy 복합재료와는 전혀 달리 저주파에서의 산란체의 공명에 매우 크게 영향을 받고 있음은 주목할 만한 사실이다. 요약하면, 분포되어 있는 산란체의 공명주파수에서 속도는 급격히 증가하고, 감쇠계수는 피크를 나타낸다는 사실인데, 이는 Fig. 3과 4에서 공통적으로 발견할 수 있다. Steel/PMMA 복합재료의 평균파동의 속도를 비교하기가 어려웠던 점을 감안하여 Fig. 4에서는 체적비가 5%, 15%인 lead/epoxy 복합재료에서의 압축파 평균속도를 비교하였다. 이 경우에 대해서도 본 연구에서의 이론은 실험치와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 특히, 산란체의 공명주파수에서 나타나는

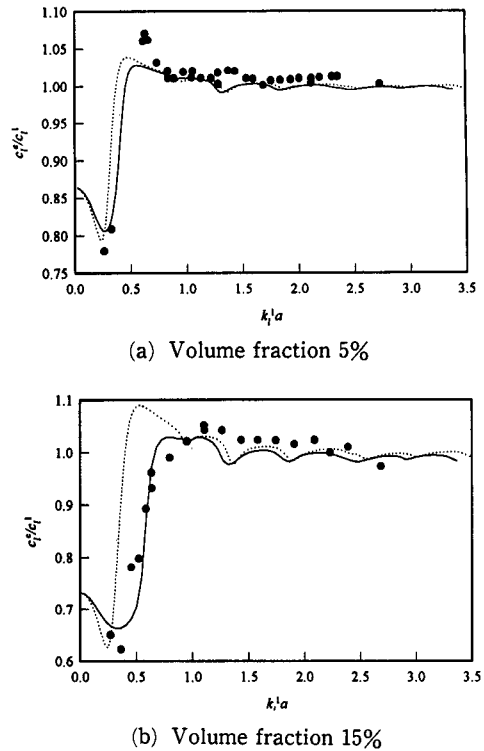


Fig. 4 Effective longitudinal wave speed vs. frequency in lead/epoxy composites. Present theory(—), Waterman-Truell theory(.....), experiment by Kinara et al.(●)

속도의 급격한 변화를 잘 예측하고 있다. 체적비가 각각 5%, 15%인 경우를 비교해 보면 공명주파수가  $ka \approx 0.4$ 에서  $ka \approx 0.6$ 으로 증가하였음을 볼 수 있다. 그 이유는 체적비가 증가함에 따라 산란체 주위의 유효매질의 강성이 증가하므로 공명주파수가 따라서 증가하게 되는 것으로 해석할 수 있다. 이와 같이 체적비의 증가에 따른 공명주파수의 이동을 정확히 예측할 수 있다는 사실은 본 이론에서 산란체 간의 상호작용, 즉 다중 산란이 충분히 고려되고 있음을 간접적으로 보여주고 있는 것으로 생각할 수 있다. 반면, Waterman-Truell의 이론에서는 비자기일치적으로 산란문제물 수식화하며 산란체간의 상관관계를 무시하므로 산란체간의 상호작용이 충분히 고려될 수 없다. 이러한 사실은 Sayers와 Smith<sup>(17)</sup>의 지적과 일치한다. 앞에서 언급한 산란체의 공명효과에 대한 설명은 Kinra등이 그들의 실험결과를 설명하는 방법과 유사하다. 그들은 Moon과 Mow<sup>(18)</sup>의 HIT(heavy

inclusion theory)를 근거로 하여 설명하려 하였지만, Moon과 Mow의 이론은 입자의 무게가 기지보다 매우 클 때만 적용 가능한 것이어서 일반성이 약하다. 산란체의 공명이 복합재료 내부를 진행하는 탄성파의 분산 및 감쇠에 미치는 영향에 관한 더욱 자세한 물리적 설명과 정량적인 예측방법은 참고문헌<sup>(19,20)</sup>에 나타나 있다.

#### 4. 결 론

불연속적이며 랜덤한 매질내에서의 탄성과 전파에 관하여 연구하였고, 특히 상관포텐셜 근사를 동적인 문제로 확장하였다. 그 결과 유효물성이 유한한 주파수에서 만족해야 할 세가지 조건식을 얻었고, 이 조건식들을 동시에 풀므로써 동적물성을 직접 얻을 수 있었다. 산란체의 공명이 일어날 경우 체적비의 증가에 따라 공명주파수는 고주파수로 이동함을 뚜렷이 관찰할 수 있었다. 본 연구에서 구한 평균파동의 속도를 타 이론에 의하여 예측된 결과와 세 가지 복합재료에 대한 기존의 실험치와 비교한 결과, 본 연구에서의 결과는 실험 결과와 매우 잘 일치하며, 공명주파수가 고주파수로 이동하는 현상을 매우 잘 예측하였다. 이는 본 연구에서 유도한 자기일치조건은 계산된 주파수 범위내에서 다중 산란효과를 매우 잘 고려되고 있는 것으로 생각할 수 있다. 결론적으로, 본 연구에서 제안한 이론은 기존의 정적유효 탄성계수를 구하기 위하여 사용되어 왔던 자기일치적방법을 주파수영역에서 확장한 이론이라 할 수 있으며, 널리 알려진 Waterman-Truell의 이론결과보다 더 정확한 평균파동의 속도와 감쇠계수를 예측할 수 있는 것으로 나타났다.

#### 참고문헌

- (1) Foldy, L. L., 1945. "The Multiple Scattering of Waves," *Phys. Rev.* 67, pp. 107~119.
- (2) Lax, M., 1952, "The Effective Field in Dense Systems," *Phys. Rev.* 88, pp. 621~629.
- (3) Soven, P., 1967, "Coherent-Potential Model of Substitutional Disordered Alloys," *Phys. Rev.* 156, pp. 809~813.
- (4) Velicky, B., Kirkpatrick, S. and Ehrenreich, H., 1968, "Single-Site Approximations in the

- Electronic Theory of Simple Binary Alloys," *Phys. Rev.* 175, pp. 747~766.
- (5) Waterman, P. C. and Truell, R., 1961, "Multiple Scattering of Waves," *J. Math. Phys.* 2, pp. 512~537.
- (6) Varadan, V. K., Ma, Y. and Varadan, V. V., 1985, "A Multiple Scattering Theory for Elastic Wave Propagation in Discrete Random Media," *J. Acoust. Soc. Am.* 77, pp. 375~385.
- (7) Gubernatis, J. E. and Krumhansl, J. A., 1975, "Macroscopic Engineering Properties of Polycrystalline Materials: Elastic Properties," *J. Appl. Phys.* 46, pp. 1875~1883.
- (8) Berryman, J. G., 1979, "Theory of Elastic Properties of Composite Materials," *Appl. Phys. Lett.* 35, pp. 856~858.
- (9) Devaney, A. J., 1980, "Multiple Scattering Theory for Discrete, Elastic, Random Media," *J. Math. Phys.* 21, pp. 2603~2611.
- (10) Hill, R., 1965, "A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials," *J. Mech. Phys. Solids.* 13, pp. 213~222.
- (11) Budiansky, B., 1965, "On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials," *J. Mech. Phys. Solids.* 13, pp. 223~227.
- (12) Diener, G. and Kaseberg, F., 1976, "Effective Linear Response in Strongly Heterogeneous Media: Self-Consistent Approach," *Int. J. Solids Structures*, 12, pp. 173~184.
- (13) Kinra, V. K., Ker, E. and Datta, S. K., 1982, "Influence of Particle Resonances on Wave Propagation in a Random Particulate Composite," *Mech. Res. Commun.* 9, pp. 109~114.
- (14) Kinra, V. K., 1985, "Dispersive Wave Propagation in Random Particulate Composite," *Recent Advances in Composites in the U.S. and Japan, ASTM STP864*, pp. 309~325.
- (15) Gubernatis, J. E., Domany, E. and Krumhansl, J. A., 1977, "Formal Aspects of the Theory of the Scattering of Ultrasound by Flaws in Elastic Materials," *J. Appl. Phys.* 48, pp. 2804~2811.
- (16) Ying, C. F. and Truell, R., 1956, "Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Spherical Obstacle in an Isotropically Elastic Solid," *J.*

*Appl. Phys.* 27, pp. 1086~1097.

- (17) Sayers, C. M. and Smith, R. L., 1983, "Ultra-sonic Velocity and Attenuation in An Epoxy Matrix Containing Lead Inclusions," *J. Phys. D : Appl. Phys.* 16, pp. 1189~1194.
- (18) Moon, F. C. and Mow, C. C., 1970, "Wave Propagation in a Composite Material Containing Dispersed Rigid Spherical Inclusions" *Rand Corp. Report*, RM-6139-PR, Santa Monica, CA.
- (19) Kim, J.-Y., Ih, J.-G. and Lee, B.-H., 1994, "Dispersive Wave Propagation in a Viscoelastic Matrix Reinforced by Elastic Fibers," *J. Acoust. Soc. Am.* 95 (3), pp. 1213~1222.
- (20) 김진연, 1994, "복합재료내를 전파하는 탄성파의 다중산란 및 분산해석," 한국과학기술원 박사학위논문.
- (21) Morse, P. M. and Feshbach, H., 1953, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, NewYork,

p. 1466.

- (22) Achenbach, J. D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, New York.
- (23) Watson, G. N., 1966, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, New York.

부 록 : 식 (15)~(17)의 적분

탄성구 내부의 변위장( $u$ )과 변형률( $E$ )은 식 (18)~(21)을 다음과 같은 변위-포텐셜, 변형률-변위관계<sup>(22)</sup>에 대입함으로써 구할 수 있다.

$$u = -\nabla\Phi + \nabla \times \Psi \tag{A1}$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + u\nabla) \tag{A2}$$

구좌표계에서는 각 성분들이 다음과 같이 표현된다.

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n \frac{dX_n}{dr} - n(n+1) D_n \frac{Y_n}{r} \right\} P_n(\theta) \tag{A3}$$

$$u_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n \frac{X_n}{r} - D_n \frac{1}{r} \frac{d(rY_n)}{dr} \right\} \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} \tag{A4}$$

$$\epsilon_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n \frac{d^2 X_n}{dr^2} - n(n+1) D_n \frac{d}{dr} \left( \frac{Y_n}{r} \right) \right\} P_n(\theta) \tag{A5}$$

$$\epsilon_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left\{ C_n X_n - D_n \frac{d(rY_n)}{dr} \right\} \frac{d^2}{r^2 d\theta^2} + \left\{ C_n \frac{dX_n}{rdr} - n(n+1) D_n \frac{Y_n}{r^2} \right\} \right] P_n(\theta) \tag{A6}$$

$$\epsilon_{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{dX_n}{C_n r dr - n(n+1) D_n \frac{Y_n}{r^2}} + \left\{ C_n X_n - D_n \frac{d(rY_n)}{dr} \right\} ct\theta \frac{d^2}{r^2 d\theta^2} \right] P_n(\theta) \tag{A7}$$

여기서,  $X_n = j_n(kr)$ ,  $Y_n = j_n(k'sr)$ 이고,  $\theta = \cos\theta$  이다. 또한 자기일치 식에 포함된 위상요소는 마찬가지로

가지 방법으로 구좌표계에서 다음과 같이 표현된다.<sup>(21)</sup>

$$\exp(ik' \cdot r) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n j_n(k'r) \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\theta) P_n^m(\theta_0) \cos(\phi - \phi_0) \tag{A8}$$

여기서,  $\epsilon_m$ 은 노이만인자(Neuman factor)이고,  $(\theta_0, \phi_0)$ 는 파동벡터의 방향각이다. 식(A8)과 식

(A4)~(A7)의 곱은 다음과 같은 무한 급수로 전개될 수 있다.<sup>(23)</sup> 즉,

$$j_p(\alpha z) j_q(\beta z) = \frac{\pi \alpha^p \beta^q}{2^{p+q+2} \Gamma(q+1.5)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!} \frac{F(-m, -p-0.5-m; q+1.5; \alpha^2/\beta^2)}{\Gamma(p+1.5+m)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 z^{2m+p+q} \tag{A9}$$

여기서,  $F$ 와  $\Gamma$ 는 각각 초기하(hypergeometric) 함수와 감마(gamma) 함수를 나타낸다. 그러므로 식

(A9)와 거듭제곱의 적분은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_0^1 z^s j_p(\alpha z) j_q(\beta z) dz = \frac{\pi \alpha^p \beta^q}{4^{p+q} \Gamma(q+1.5)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!} \frac{F(-m, -p-0.5-m; q+1.5; \alpha^2/\beta^2)}{(2m+p+q+s+1) \Gamma(p+1.5+m)} \tag{A10}$$

식(A10)을 이용하면, 자기일치적 조건에 포함된 모든 적분들은 쉽게 해석적인 값으로 얻을 수 있

다.