

〈論 文〉

탄성체의 정규모드 안정성과 강제진동에 관한 연구

박철희* · 신현재**

(1993년 8월 12일 접수)

A Study on the Stability of Normal Modes and Forced Vibrations in an Elastic System

Choi-Hui Park and Hyeon-Jae Shin

Key Words : Structural Nonlinearity(구조적 비선형성), Bifurcation(분기), Nonlinear Normal Mode(비선형 정규모드), Stability(안정성)

Abstract

The nonlinear behavior of continuous structural systems which possess external resonances as well as internal resonances are found to exhibit interesting responses, arising because of the exchange of energy between the coupled modes. In this paper, the undamped forced vibrations were studied on the effect of primary resonance based on the concept of normal mode, which occurs when the exciting frequency lies close to the frequency of normal modes. By using the concept of normal mode the stability relation between free and forced vibrations was investigated in case of small exciting force. Numerical results show that the excitation of one unstable mode has a great influence on the response of the other mode but that of one stable mode does not.

1. 서 론

최근 여러 산업분야의 구조물은 유연·경량화 추세에 있기 때문에 이들 구조물의 설계와 제어를 위해서는 그 계의 동역학적 특성을 고려해야 한다. 특히 구조물에 내재한 비선형성들은 이러한 특성에 큰 영향을 미칠 수가 있다.

많은 연구가 보, 평판, 셀같은 구조물에서 비선형성을 고려하여 해석함에 따라 선형해석에서는 예기치 않았던 현상들을 규명하였다. Nayfeh 등⁽¹⁾은 판과 꺾쇠로 고정된 보의 강제진동을 보의 선형화 주파수비가 3인 내부공진(internal resonance) 경우에 대하여 다척도법(multiple scale method)으로

해석하여 가진모드의 영향이 비가진모드에 많이 미친다는 것을 보인 바가 있다. Afaneh 등⁽⁶⁾은 양단이 고정된 좌굴보가 선형화 주파수비가 1일때 다척도법과 실험을 통하여서 분기와 혼돈양상을 보였다. Nayfeh 등⁽²⁾은 선형화 주파수비가 1인 경우에 대한 연구로 원형단면을 갖는 외팔보의 한쪽방향을 가진시킨 영향이 다른 방향과 복합된 모드형태의 응답으로 나타남을 실험을 통하여 보였다. Chang⁽⁸⁾은 평판의 복합모드중에서 선형화 주파수비가 1인 내부공진을 갖는 경우에 모드의 분기, 혼돈양상에 대하여 연구하였다.

한편, Rosenberg⁽¹⁴⁾는 비선형 정규모드(non-linear normal mode)를 모든 일반화 좌표가 같은 주기를 갖는 주기운동을 함으로써 평형상태를 동시에 통과하고, 정체점도 동시에 갖는다고 정의하였다. 또한 어떤계가 주기력을 받고 있을때, 그 계가 선형계이든 비선형계이든지, 외력의 진동수가 그

*정회원, 인하대학교 기계공학과

**정회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

계의 고유진동수에 가까이 놓여 있으면 공진이 발생하고, 이 공진점 근처에서 그 계는 정규모드로 진동한다는 사실을 밝혔고, 그 후에 이에 관련된 많은 연구가 수행되어져 왔다.⁽¹⁶⁻²⁰⁾

본 연구에서는 기하학적 비선형성을 고려한 탄성체가 선형화 주파수비 1 근방을 가질 경우에 대한 강제진동을 정규모드 관점에서 주공진(primary resonance)의 영향에 대하여 연구하였다. 동특성을 규명하기 위해 자유진동을 해석하여 모드의 분기와 안정성 해석을 수행하였고, 이들 동특성이 강제진동의 안정성에 미치는 영향을 규명하였다. 또한, 이 방법에 의한 해석의 타당성을 확인하기 위하여 수치해석을 수행하였다.

2. 비선형 운동방정식 및 동특성 해석

비선형 다자유도계의 강제진동해석을 할 수 있는 일반적인 방법이 개발되어 있지 않은 실정이다. 선형계의 강제진동해석은 주어진 외력에 대하여 각 모드의 응답을 구하여 이를 합산하는 모달해석(modal analysis)이 가능하지만, 비선형계는 중첩 원리가 적용되지 않으므로 이 방법이 불가능하다. Rosenberg⁽¹⁴⁾는 다자유도계의 비선형계에서도 선형계처럼 정규모드에서 공진이 일어날 것이라는 비선형 정규모드(nonlinear normal mode) 개념을 구체적으로 정의하여 이에 대한 사례와 비선형계의 특이점을 밝힘으로써 많은 관심을 갖게 하였다.⁽¹⁶⁻²⁰⁾

따라서 본 연구에서는 한개의 좌표에 대한 운동을 알게 되면 mode shape의 관계로부터 다른 좌표의 운동을 계산할 수 있는 정규모드의 개념을 통하여 비선형 강제진동을 해석하려 한다. 따라서 우선 동특성을 해석하여 비선형 동력학 관점에서 안정성이 바뀔 때 따라 새로운 주기운동으로 분기되는 것을 보이고, 이런 특성이 강제진동의 안정성에 미치는 영향을 규명하려 한다.

2.1 자유진동의 주기해

양단이 고정되어 있는 경우의 구조물에서는 변형이 커짐에 따라 기하학적인 비선형성 때문에 구조내부에 인장력을 유발시킨다. 이는 응력과 변형률 관계 그리고 곡률의 관계에 의해서 운동방정식에 3차의 비선형항으로 표현된다.⁽⁴⁻⁸⁾ 이와 같은 비선형 운동방정식을 Galerkin방법을 사용하여 N개의 선형조합으로 나타내면 N자유도의 비선형방정식으

로 표현된다.⁽⁶⁻⁸⁾

이와 같은 구조물에서 관심있는 모드 2개만 표현하면 비선형 2자유도계가 되는데, 만약 구조물의 경계가 모두 단순지인 대칭계라면, 직교성에 의해 계는 다음과 같이 간략하게 표현될 수 있다.^(7,8)

본 논문에서 다른 계의 자유진동에 대한 운동에너지와 위치에너지는

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1a)$$

$$V = \frac{1}{2}(p_1^2 x^2 + p_2^2 y^2) + \varepsilon \left[\frac{1}{4} \alpha x^4 + \frac{1}{2} \beta x^2 y^2 + \frac{1}{4} \gamma y^4 \right] \quad (1b)$$

이고 이에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + p_1^2 x = -\varepsilon(\alpha x^3 + \beta y^2 x) \quad (2a)$$

$$\ddot{y} + p_2^2 y = -\varepsilon(\beta x^2 y + \gamma y^3) \quad (2b)$$

여기서, x 은 1번 모드, y 은 2번 모드, $p_{1,2}$ 는 선형화주파수, α , β , γ 는 비선형계수 그리고 ε 은 1보다 작은 양의 값이다.

운동방정식 (2)의 주기해를 다음과 같은

$$x(t) = a(t) \cos \omega t + c(t) \sin \omega t \quad (3a)$$

$$y(t) = b(t) \cos \omega t + d(t) \sin \omega t \quad (3a)$$

Vander Pol 좌표변환에 의해 x , \dot{x} , y , \dot{y} 를 a , b , c , d 로 표현한 후, 평균법(averaging method)에 의해 자율계(autonomous system)를 구하면 다음과 같다.

$$\dot{a} = -\frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega} c + \frac{3\alpha}{8\omega} (a^2 + c^2) c + \frac{\beta}{8\omega} (b^2 c + 3cd^2 + 2abd) \quad (4a)$$

$$\dot{b} = -\frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} d + \frac{3\gamma}{8\omega} (b^2 + d^2) d + \frac{\beta}{8\omega} (a^2 d + 3c^2 d + 2abc) \quad (4b)$$

$$\dot{c} = \frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega} a - \frac{3\alpha}{8\omega} (a^2 + c^2) a - \frac{\beta}{8\omega} (ad^2 + 3ab^2 + 2bcd) \quad (4c)$$

$$\dot{d} = \frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} b - \frac{3\gamma}{8\omega} (b^2 + d^2) b - \frac{\beta}{8\omega} (bc^2 + 3a^2 b + 2acd) \quad (4d)$$

여기서, \cdot 는 εt (slow time)에 대한 미분이고 ω 는 p_1 과 p_2 근방의 주파수이다.

자유진동의 주기해는 식(4)에서 $\dot{a}=\dot{b}=\dot{c}=\dot{d}=0$ 을 만족하는 해($a=A_0, b=B_0, c=C_0, d=D_0$)를 구하면 된다.

본 논문에서는 정규모드 관점에서 동특성을 해석하고, 이들이 강제진동에 미치는 영향을 고찰하기 위해서 앞의 해들에서 정규모드에 해당되는 $C_0=D_0=0$ 인 경우를 다루었다. 따라서 $a=A_0, b=B_0, c=0, d=0$ 를 식(4)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$(\omega^2 - p_1^2)A_0 - \frac{3}{4}\alpha A_0^3 - \frac{3}{4}\beta A_0 B_0^2 = 0 \quad (5a)$$

$$(\omega^2 - p_2^2)B_0 - \frac{3}{4}\beta A_0^2 B_0 - \frac{3}{4}\gamma B_0^3 = 0 \quad (5b)$$

이 식(5)를 만족하는 A_0, B_0 을 구하면 정규모드를 구할 수가 있고, 이 식은 조화균형법(harmonic balance method)에 의해 구한 식과 동일함을 알 수 있다.⁽¹⁸⁾

2.2 정규모드의 안정성변화에 따른 분기양상 선형 2자유도계에서는 2개의 정규모드(normal mode)가 있으나, 비선형 2자유도계에서는 분기(bifurcation)현상에 의해 여러개의 정규모드가 있을 수 있다. 이와 같은 정규모드는 x - y configuration space에 표현하면 modal curve $y=y(x)$ 가 곡선을 이루나, 실제 거의 직선을 형성하므로⁽¹⁸⁾ Fig. 1과 같이 표현할 수 있다.

여기서, θ 는 modal curve와 x 축이 이루는 각이고 R 은 원점에서 위치에너지 곡선, 즉 $V=h$ 선상의 정규모드의 정체점과의 거리를 의미한다. 따라서, 진폭을 각각 $A_0=R\cos\theta, B_0=R\sin\theta$ 로 표현할 수 있고, 이들 관계를 $p=\tan\theta$ 로 나타낼 수 있다.

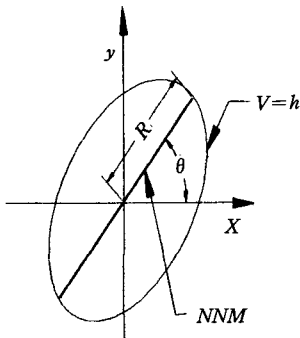


Fig. 1 Nonlinear normal mode

계의 정규모드를 구하는 식(5)에서 $A_0=0$ 인 y -mode와 $B_0=0$ 인 x -mode는 항상 존재함을 알 수 있고, 이들 이외의 분기된 모드를 구하기 위해 식(5)를 $p=\tan\theta$ 와 R 로 표현하면 다음식과 같이 된다.

$$p^2 = \frac{\Delta + (\beta - \alpha)r}{-\Delta + (\beta - \gamma)r}$$

$$\text{여기서, } \Delta = p_2^2 - p_1^2, \quad r = \frac{3}{4}R^2 \quad (6)$$

따라서, 식(6)에서 정규모드의 분기가 일어나기 위해선, 이 식에서 실근 p 가 존재하는 어떤 양의 r 값이 존재하여야 된다. 즉, 어느 에너지값 이상에서는 x -mode와 y -mode 이외의 모드가 존재한다는 것을 의미한다. 따라서 식(6)의 우변이 양의 값이 되기 위한 조건은 식(6)의 우변 분모와 분자의 분호가 같아야 하므로 다음과 같은 식으로 표현할 수가 있다.

$$F(r) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)r^2 + \Delta(\alpha - \gamma)r - \Delta^2 \\ = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(r - r_1)(r - r_2) \geq 0 \quad (7)$$

여기서, $r_1 = \frac{-\Delta}{\beta - \alpha}, \quad r_2 = \frac{\Delta}{\beta - \gamma}$ 이다.

식(7)의 $F(r)$ 은 $(-\Delta^2, 0)$ 을 통과하는 포물선이기 때문에 $(\beta - \alpha) \neq 0, (\beta - \gamma) \neq 0$ 그리고 $r_1 \neq r_2$ 인 경우에는 분기유형을 Fig. 2와 같이 나타낼 수가 있다.

위의 3가지 경우에 대하여 비선형 인자간의 관계를 살펴보면, 실제 탄성체에선 일반적으로 $p_2^2 > p_1^2$ 이기 때문에 분기가 일어날 수 있는 비선형 계수의 조건을 아래 경우와 같이 구할 수가 있고, 이와 같은 분기는 pitch-fork 형태⁽¹⁴⁾로 일어남을 알 수가 있다.

Case 1. $\beta > \alpha$ & $\beta > \gamma$

$r = \frac{\Delta}{\beta - \gamma}$ 에서 분기가 y -mode로부터 시작하여서 계속 존재

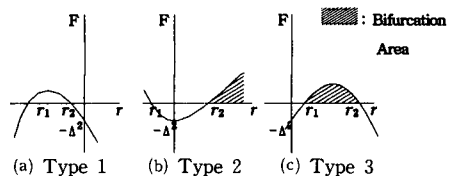


Fig. 2 Bifurcation types

Case 2. $\beta < \alpha$ & $\beta < \gamma$

$r = \frac{-\Delta}{\beta - \alpha}$ 에서 분기가 x -mode로부터 시작하여서 계속 존재.

Case 3. $\beta < \alpha$ & $\beta > \gamma$

r_1 에서 분기가 일어나서 r_2 에서 소멸

정규모드의 안정성을 해석하기 위하여 식(4)에 $a = A_0 + \eta_1$, $b = B_0 + \eta_2$, $c = \eta_3$, $d = \eta_4$ 와 같이 변분을 주어 선형화시키면 다음과 같은 선형화 변분방정식(linearized variational equation)을 얻을 수 있다.

$$\{\dot{\eta}\} = [G]\{\eta\} \quad (8)$$

여기서, $\{\eta\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}^T$

$$[G] = [g_{ij}], \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

이때 정규모드의 안정성은 Jacobian 행렬 $[G]$ 의 고유치의 실수부 형태에 따라 판단되고, 이 특성치(λ)는 다음 식에서 구한다.

$$\lambda^4 - K_0 \lambda^2 + \Delta_{10} \cdot \Delta_{20} = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$K_0 = g_{130}g_{310} + g_{140}g_{410} + g_{230}g_{320} + g_{240}g_{420}$$

$$\Delta_{10} = g_{130}g_{240} - g_{140}g_{230}$$

$$\Delta_{20} = g_{310}g_{420} - g_{320}g_{410}$$

이고, 각 g_{ij} 는

$$g_{130} = -\frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega} + \frac{1}{8\omega}(3\alpha A_0^2 + \beta B_0^2)$$

$$g_{140} = g_{230} = \frac{\beta}{4\omega} A_0 B_0$$

$$g_{240} = -\frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} + \frac{1}{8\omega}(3\gamma B_0^2 + \beta A_0^2)$$

$$g_{310} = \frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega} - \frac{3}{8\omega}(3\alpha A_0^2 + \beta B_0^2)$$

$$g_{320} = g_{410} = -\frac{\beta}{4\omega} A_0 B_0$$

$$g_{420} = \frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} - \frac{3}{8\omega}(3\gamma B_0^2 + \beta A_0^2)$$

정규모드는 식(5)를 만족하기 때문에 $\Delta_{10} = 0$ 임을 알 수 있으므로 특성치(λ)는

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{K_0}$$

가 되므로 $\lambda_{3,4}$ 값이 형태에 따라 안정성이 결정된다.

특히 x -mode만이 존재하는 경우는 $B_0 \equiv 0$ 인 경우에

해당하므로 특성치는

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\left(-\frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} + \frac{\beta}{8\omega} A_0^2\right) \left(\frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} - \frac{3\beta}{8\omega} A_0^2\right)}$$

와 같이 표현이 된다. 따라서 x -mode의 백골곡선식($\omega^2 = p_1^2 + \frac{3\alpha}{4} A_0^2$)을 대입하면 x -mode에서 분기가 일어날 조건인 $\alpha > \beta$ 에 대해서는 다음과 같다. 안정된 모드의 작은 진폭이 ω 에 따라 점차 커지면서 $A_0^2 = \frac{4(p_2^2 - p_1^2)}{3\alpha - \beta}$ 를 지나면 불안정해지기 시작하고, 더 커져 $A_0^2 = \frac{4(p_2^2 - p_1^2)}{3(\alpha - \beta)}$ 를 지나게 되면 다시 안정하게 된다. 그러므로 모드의 안정성이 바뀔 때 따라 기존의 모드에서 pitch-fork 형태의 분기가 일어남을 알 수 있다.

본 연구에서는 정규모드의 분기만을 고려하였지만, 불안정해질 때의 식으로 보아 정규모드 이외의 모드형태로 분기가 일어날 것으로 예상되므로 이에 대한 연구는 계속 진행되어야 할 것으로 보인다.

3. 비감쇠 강제진동해석

양단이 고정된 구조물에서는 기하학적인 비선형성에 의해 구조내부에 인장력이 유발되는데, 이는 운동방정식에 3차의 비선형항으로 표현된다.⁽⁶⁻⁸⁾ 이와 같은 계가 작은 주기력으로 가진 되었을 때의 운동방정식은 다음과 같이 비선형 강제진동계로 표현된다.

$$\ddot{x} + p_1^2 x = -\varepsilon(\alpha x^2 + \beta y^2)x - \varepsilon \nu c_1 \dot{x} + \varepsilon \mu f_1 \cos \omega t \quad (10a)$$

$$\ddot{y} + p_2^2 y = -\varepsilon(\beta x^2 + \gamma y^2)y - \varepsilon \nu c_2 \dot{y} + \varepsilon \mu f_2 \cos \omega t \quad (10b)$$

여기서, x 은 1번 모드, y 은 2번 모드, α, β, γ 는 비선형계수, $c_{1,2}$ 는 감쇠계수, $f_{1,2}$ 는 가진력, ω 는 가진주파수 그리고 ε, μ, ν 는 1보다 작은 양의 값이다.

본 논문에서는 자유진동의 안정성이 강제진동의 안정성에 미치는 영향을 해석하기 위해 감쇠력이 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하여 비감쇠 강제진동을 해석하였다. 따라서, $c_1 = c_2 = 0$ 로 한 식을 앞의 자유진동 해석에서와 같은 Van der Pol 좌표변환에 의해 x, \dot{x}, y, \dot{y} 를 a, b, c, d 로 표현

한 후, 평균법에 의해 시간 t 를 소거하면 다음과 같은 자율계 (autonomous system)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega}c + \frac{3\alpha}{8\omega}(a^2 + c^2)c \\ & + \frac{\beta}{8\omega}(b^2c + 3cd^2 + 2abd) \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = & -\frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega}d + \frac{3\gamma}{8\omega}(b^2 + d^2)d \\ & + \frac{\beta}{8\omega}(a^2d + 3c^2d + 2abc) \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \dot{c} = & \frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega}a - \frac{3\alpha}{8\omega}(a^2 + c^2)a \\ & - \frac{\beta}{8\omega}(ad^2 + 3ab^2 + 2bcd) + \frac{\mu f_1}{2\omega} \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \dot{d} = & \frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega}a - \frac{3\gamma}{8\omega}(b^2 + d^2)b \\ & - \frac{\beta}{8\omega}(bc^2 + 3a^2b + 2acd) + \frac{\mu f_2}{2\omega} \end{aligned} \quad (11d)$$

여기서, \cdot 는 ϵt 에 대한 미분이고, 가진주파수 (ω)는 선형화주파수 ($p_{1,2}$) 근방에 있다. 정상상태해 (steady state solution)는 $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = \dot{d} = 0$ 을 만족하는 $a=A$, $b=B$, $c=C$, $d=D$ 를 구하면 된다.

3.1 배골곡선과 응답곡선 구성

만약 가진력이 충분히 작다면, 진동수 ω 에서의 정규모드의 진폭에 매우 가까울 것이다.^(14,18) 따라서 정규모드의 진폭을 $A_o(\omega)$, $B_o(\omega)$ 라고 한다면 이들의 응답을 다음과 같이 가정할 수가 있다.

$$A = A_o + \epsilon A_1 + o(\epsilon^2), \quad (12a)$$

$$B = B_o + \epsilon B_1 + o(\epsilon^2) \quad (12b)$$

식(12)를 식(11)에 대입한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\epsilon^0: \omega^2 = p_1^2 + \frac{3\alpha}{4}A_o^2 + \frac{3\beta}{4}B_o^2 \quad (13a)$$

$$\omega^2 = p_2^2 + \frac{3\beta}{4}A_o^2 + \frac{3\gamma}{4}B_o^2 \quad (13b)$$

$$\epsilon^1: \mu f_1 = -\omega^2 A_1 + k_{11}A_1 + k_{12}B_1 \quad (14a)$$

$$\mu f_2 = -\omega^2 B_1 + k_{21}A_1 + k_{22}B_1 \quad (14b)$$

여기서,

$$k_{11} = p_1^2 + \left\{ \frac{9\alpha}{4}A_o^2 + \frac{3\beta}{4}B_o^2 \right\}$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{3\beta}{2}A_oB_o$$

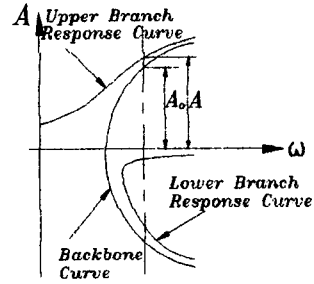


Fig. 3 Response curve

$$k_{22} = p_2^2 + \left\{ \frac{3\beta}{4}A_o^2 + \frac{9\gamma}{4}B_o^2 \right\}$$

식(13)으로부터, 주어진 ω 에 대하여 A_o 와 B_o 를 구함으로써 배골곡선 (backbone curve)를 얻게 된다. 또한 가진력에 의해서 생기는 A_1 과 B_1 은 식(14)로부터 구할 수 있으므로, 이들 (A_o , B_o , A_1 , B_1)을 식(12)에 대입하면 Fig. 3과 같은 주파수 응답곡선을 얻을 수 있다.

3.2 강제진동의 안정성 해석

정상해의 안정성을 해석하기 위해서 식(11)에 $a = A + \eta_1$, $b = B + \eta_2$, $c = \eta_3$, $d = \eta_4$ 와 같이 변분을 주어 선형화시킨 선형화 변분방정식을 얻는다.

$$\{\dot{\eta}\} = [G]\{\eta\} \quad (15)$$

여기서,

$$\{\eta\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}^T$$

$$[G] = [g_{ij}], \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

이때 정상해의 안정성은 Jacobian행렬 $[G]$ 의 고유치의 실수부 형태에 따라서 판단되고, 이 고유치 (λ)는 다음식에서 구한다.

$$\lambda^4 - K_\epsilon \lambda^2 + \Delta_{1\epsilon} \Delta_{2\epsilon} = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$K_\epsilon = g_{13\epsilon}g_{31\epsilon} + g_{14\epsilon}g_{41\epsilon} + g_{23\epsilon}g_{32\epsilon} + g_{24\epsilon}g_{42\epsilon}$$

$$\Delta_{1\epsilon} = g_{13\epsilon}g_{24\epsilon} - g_{14\epsilon}g_{23\epsilon}$$

$$\Delta_{2\epsilon} = g_{31\epsilon}g_{42\epsilon} - g_{32\epsilon}g_{41\epsilon}$$

이고, 각 $g_{ij\epsilon}$ 은

$$g_{13\epsilon} = g_{13o} + \epsilon \left\{ \frac{3\alpha}{4\omega} A_o A_1 + \frac{\beta}{4\omega} B_o B_1 \right\} + o(\epsilon^2)$$

$$g_{14\epsilon} = g_{14o} + \epsilon \left\{ \frac{\beta}{4\omega} B_o A_1 + \frac{\beta}{4\omega} A_o B_1 \right\} + o(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
 g_{23\epsilon} &= g_{23o} + \epsilon \left\{ \frac{\beta}{4\omega} B_o A_1 + \frac{\beta}{4\omega} A_o B_1 \right\} + 0(\epsilon^2) \\
 g_{24\epsilon} &= g_{24o} + \epsilon \left\{ \frac{3\gamma}{4\omega} B_o B_1 + \frac{\beta}{4\omega} A_o A_1 \right\} + 0(\epsilon^2) \\
 g_{31\epsilon} &= g_{31o} + \epsilon \left\{ -\frac{9\alpha}{4\omega} A_o A_1 - \frac{3\beta}{4\omega} B_o B_1 \right\} + 0(\epsilon^2) \\
 g_{32\epsilon} &= g_{32o} + \epsilon \left\{ -\frac{\beta}{4\omega} B_o A_1 - \frac{\beta}{4\omega} A_o B_1 \right\} + 0(\epsilon^2) \\
 g_{41\epsilon} &= g_{41o} + \epsilon \left\{ -\frac{\beta}{4\omega} B_o A_1 - \frac{\beta}{4\omega} A_o B_1 \right\} + 0(\epsilon^2) \\
 g_{42\epsilon} &= g_{42o} + \epsilon \left\{ -\frac{9\gamma}{4\omega} B_o B_1 - \frac{3\beta}{4\omega} A_o A_1 \right\} + 0(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

이고, g_{ij0} 는 가진력이 없는 경우 $g_{ij\epsilon}$ 는 가진력이 있는 경우에 각각 해당된다.

$f_2=0$ 인 경우에는 $A_o=0, B_o=0$ 에 해당되므로 이에 대하여 식(16)을 다시 정리하면

$$\lambda^4 - g_{13\epsilon}g_{31\epsilon} + g_{24\epsilon}g_{42\epsilon}\lambda^2 + g_{13\epsilon}g_{24\epsilon}g_{31\epsilon}g_{42\epsilon} = 0 \quad (17)$$

가 되고, 이 식의 특성치는

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\epsilon \left(\frac{3\alpha}{4\omega} \right)^2 A_o^3 A_1 + 0(\epsilon^2)} \\
 \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\left(K_o + \epsilon \left(\frac{\beta}{4\omega} g_{24o} - \frac{3\beta}{4\omega} g_{42o} \right) A_o A_1 + 0(\epsilon^2) \right)}
 \end{aligned}$$

가 된다. 따라서 가진력이 매우 작은 경우, $\lambda_{1,2}$ 는 $A_o^3 A_1$ 의 부호에 따라 안정성이 결정되기 때문에 응답곡선이 upper branch ($A_o + \epsilon A_1$)인지 lower branch ($-A_o + \epsilon A_1$)인지에 따라 안정성이 결정되고, $\lambda_{3,4}$ 는 K_o , 즉 자유진동의 정규모드의 안정성을 결정하는 1차에 의해 결정되기 때문에 정규모드의 안정성에 의해 지배됨을 알 수 있다.

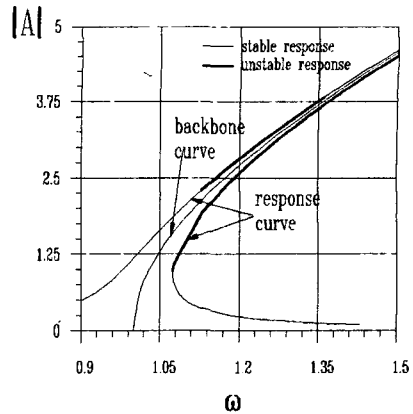
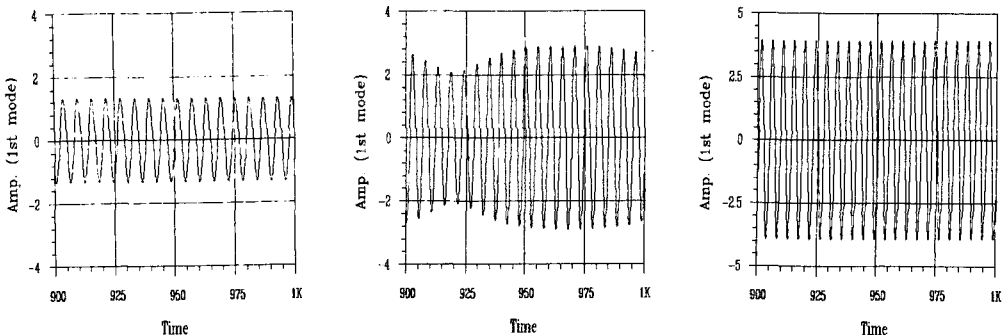


Fig. 4 Frequency response curve

4. 수치해석 결과 및 고찰

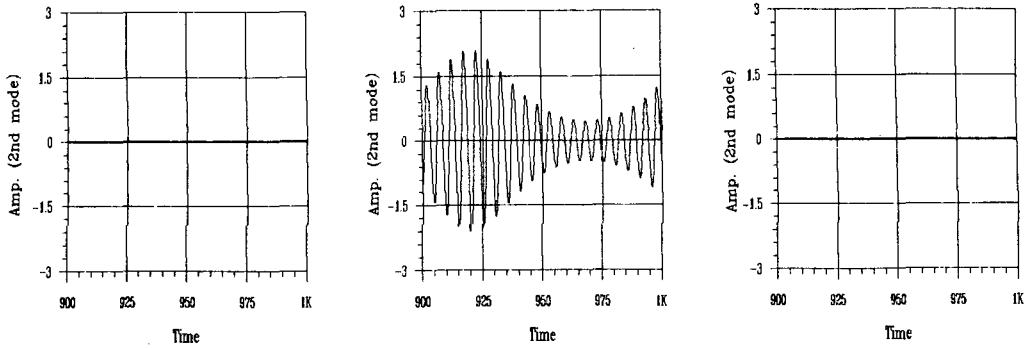
본 논문에서 자유진동의 안정성이 강제진동의 안정성에 영향을 미친다는 결과를 검증하기 위해 정규모드의 분기가 일어날 수 있는 비선형계수(α, β, γ)를 선정하여 4차 Runge-Kutta 수치해석 방법을 이용하여 계산을 수행하였다. Fig. 4~Fig. 9 및 Fig. 11은 1번 모드(y-mode)에서 분기가 일어날 수 있는 $\alpha=0.8, \beta=0.6, \gamma=0.7$ 을 선정하였으며, Fig. 10에서는 2번 모드(x-mode)에서 분기가 일어날 수 있는 $\alpha=0.8, \beta=0.25, \gamma=0.7$ 로 계산을 수행하였다.

Fig. 4는 주파수 응답을 나타낸 것으로 가진력이 작을 경우에는 응답곡선이 배곡곡선 주위에 놓이게 되는데, 이들 중에서도 $A_o + \epsilon A_1$ 에 해당되는 응답



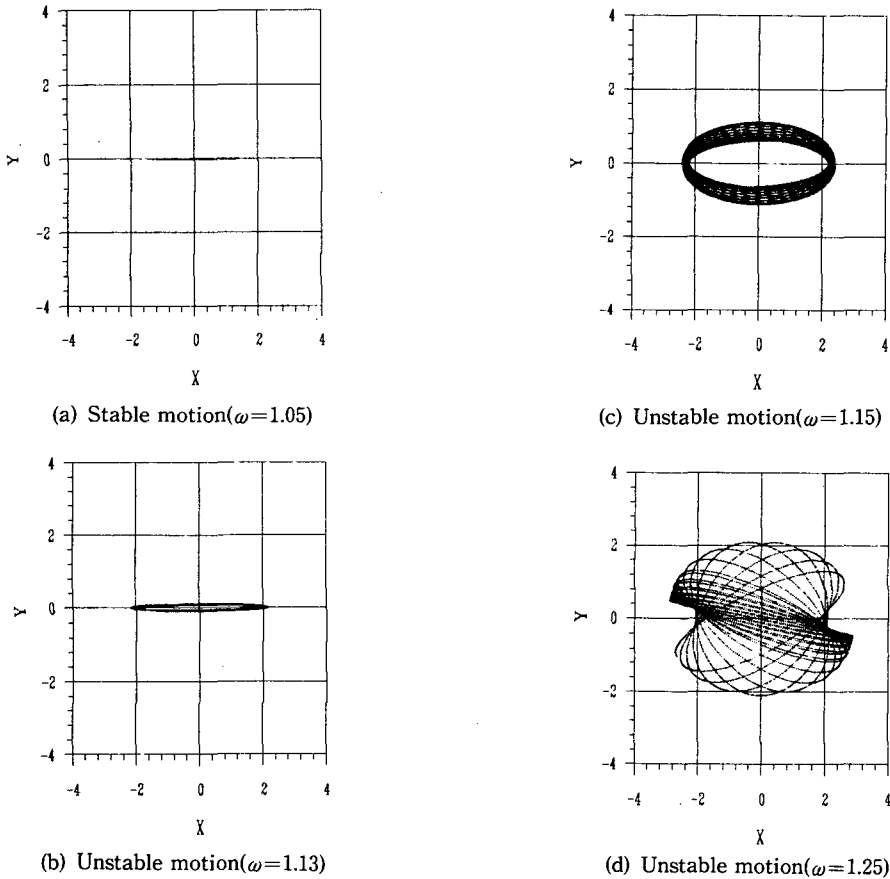
(a) Stable response($\omega=1.05$) (b) Unstable response($\omega=1.25$) (c) Stable response($\omega=1.4$)

Fig. 5 Time history of 1st mode($p_1=1, p_2=1.1, \alpha=0.8, \beta=0.6, \gamma=0.7, f_1=0.1, f_2=0$)



(a) Stable response($\omega=1.05$) (b) Unstable response($\omega=1.25$) (c) Stable response($\omega=1.4$)

Fig. 6 Time history of 2nd mode($p_1=1, p_2=1.1, \alpha=0.8, \beta=0.6, \gamma=0.7, f_1=0.1, f_2=0$)



(a) Stable motion($\omega=1.05$)

(c) Unstable motion($\omega=1.15$)

(b) Unstable motion($\omega=1.13$)

(d) Unstable motion($\omega=1.25$)

Fig. 7 Configuration space($p_1=1, p_2=1.1, \alpha=0.8, \beta=0.6, \gamma=0.7, f_1=0.1, f_2=0$)

에서도 불안정한 운동이 존재함을 도시하였다. 따라서 가진력의 주파수는 정규모드가 안정한 경우와 불안정한 경우에 해당되는 각각의 주파수(ω)를 선택하여 계산하였다. 또한, 본 수치계산에서는 매우

작은 감쇠($c_1=0.01, c_2=0.02$)의 영향을 고려하였기 때문에 강제진동의 정상상태의 응답을 충분히 고려하기 위해 900~1000초 동안의 계산결과를 받았다. 이때 초기조건은 해석적으로 얻은 정상해를

이용하였고, 파라미터 ε , μ 및 ν 는 각각 0.1로 계산하였다.

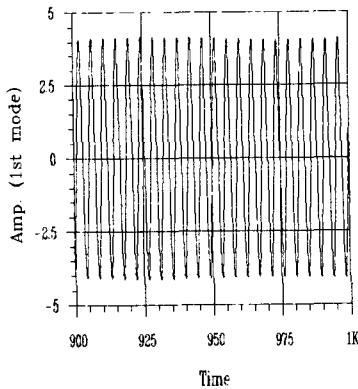
Fig. 5와 Fig. 6은 1번 모드를 가진시킨 경우에 대한 응답으로 Fig. 5는 가진모드인 1번 모드의 응답을 나타낸 것이고, Fig. 6은 비가진모드인 2번 모드의 응답을 나타낸 것이다. 계산 결과 정규모드가 안정한 경우에는 가진모드의 영향이 비가진모드에 미치지 않으나, 불안정한 경우에 대해선 많이 미침을 알 수가 있었다.

Fig. 7는 이들 운동을 각각 configuration space 상에 도시한 것으로 (a)의 경우에는 안정한 경우에 해당되는 결과로서 정규모드의 정의⁽¹⁴⁾와 같이 거의 직선관계의 운동을 함을 알 수 있다. (b)와 (c)는 불안정한 경우에 해당되는 것으로, 특히 안정성이 불안정으로 바뀌기 시작했을 때인 (b)의

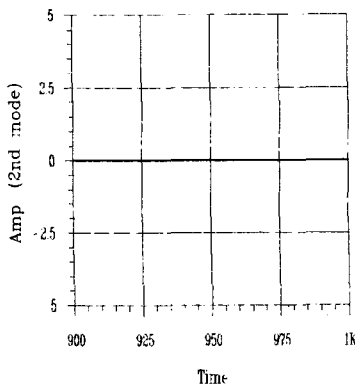
경우는 Pak, Rand, Vakakis⁽²⁰⁾에서 언급한 타원궤도(elliptic orbit)가 1번 모드로부터 분기되어감을 알 수 있었다. (c)의 경우에는 이 운동이 더 복잡해 짐을 알 수 있었다. (d)의 경우는 Fig. 5와 Fig. 6에서 불안정한 응답에 대한 configuration space를 도시한 것이다.

Fig. 8과 Fig. 9는 앞의 경우에서 안정한 주파수인 $\omega=1.4$ 로 가진시킨 결과로 Fig. 8은 Fig. 4의 upper branch($A=A_0+\varepsilon A_1$) 응답에 해당되는 결과이고, Fig. 9는 Fig. 4에서 불안정한 응답인 lower branch($A=-A_0+\varepsilon A_1$) 응답에 해당되는 결과이다.

Fig. 10은 2번 모드를 가진시킨 경우의 불안정한 영역에 해당되는 결과로써 1번 모드를 가진시킨 경우와는 달리 매우 큰 응답이 비가진 모드에 나타남

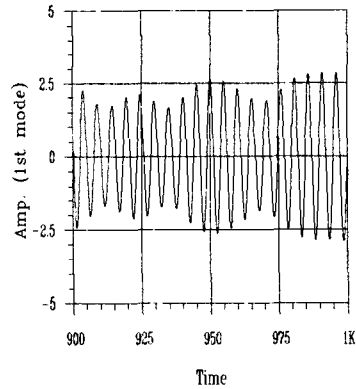


(a) 1st mode response

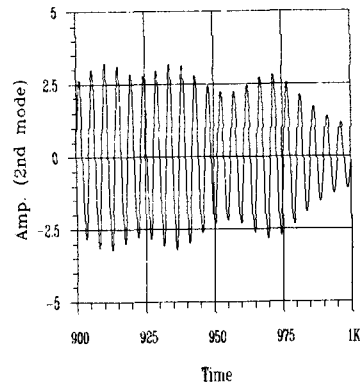


(b) 2nd mode response

Fig. 8 Time history of upper branch response($p_1=1$, $p_2=1.1$, $\alpha=0.8$, $\beta=0.6$, $\gamma=0.7$, $f_1=10$, $f_2=0$, $\omega=1.4$)

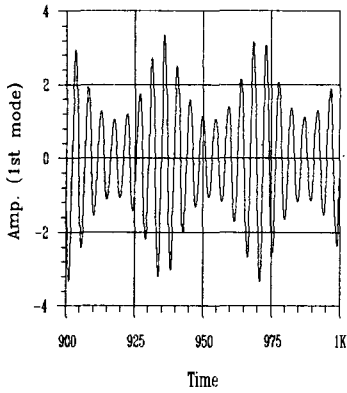


(a) 1st mode response

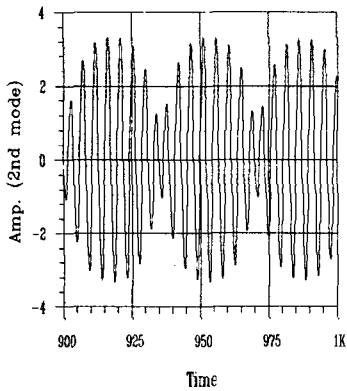


(b) 2nd mode response

Fig. 9 Time history of lower branch response($p_1=1$, $p_2=1.1$, $\alpha=0.8$, $\beta=0.6$, $\gamma=0.7$, $f_1=10$, $f_2=0$, $\omega=1.4$)

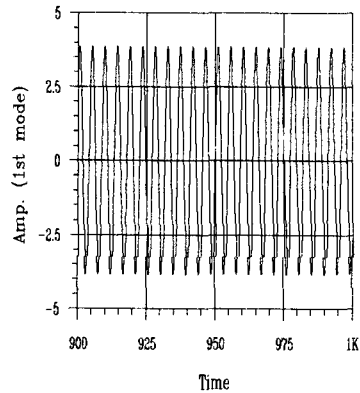


(a) 1st mode response

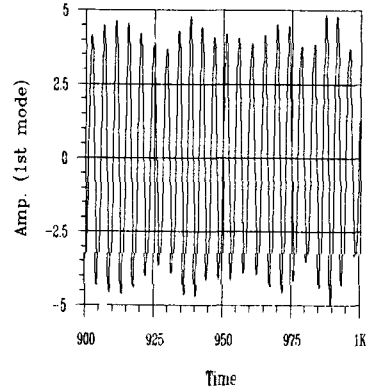


(b) 2nd mode response

Fig. 10 Time history for $f_1=0, f_2=0(p_1=1, p_2=1.1, \alpha=0.8, \beta=2.5, \gamma=0.7, f_1=0, f_2=0.1, \omega=1.4)$



(a) $f_1=0.01$



(b) $f_1=100$

Fig. 11 Time response of 1st mode($p_1=1, p_2=1.1, \alpha=0.8, \beta=0.6, \gamma=0.7, f_2=0, \omega=1.4$)

을 알 수 있었다.

Fig. 11는 가진력의 크기에 대한 영향을 고찰하기 위해 정규모드가 안정한 경우에 해당되는 주파수로 가진한 결과들이다. (a)는 가진력이 매우 작은 경우로 매우 안정된 운동을 함을 알 수 있다. 그러나 (b)와 같이 가진력이 점차 커짐에 따라 매우 불규칙한 혼돈운동으로 감을 알 수 있다. 현재까지는 비선형 2자유도계의 강제진동에 대한 주기해의 존재가 명확하게 규명되어 있지 않은 상태이므로 이에 대한 연구가 진행되어야 할 것으로 보인다.

4. 결 론

비선형 정규모드(nonlinear normal mode)에 대한 정립된 이론을 실제 모델인 탄성체에 적용시켜 연구한 결과 감쇠력과 가진력이 매우 작은 경우에

정규모드의 안정성이 강제진동의 안정성에 매우 밀접한 관계가 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 결과들을 정리하면 다음과 같다.

(1) 정규모드의 안정성이 바뀔 때 따라 기존의 모드에서 pitch-fork 형태의 분기가 일어남을 알 수 있었다.

(2) 가진력이 매우 작은 경우에 정규모드의 이론에 의해 강제진동의 주파수와 응답관계식을 구할 수 있었다.

(3) 정규모드가 안정할 때는 가진모드의 영향이 비가진모드에 미치지 않음을 알 수 있었다.

(4) 정규모드가 불안정할 때는 가진모드의 영향이 비가진모드에 상당히 미침을 알 수 있었다. 특히, 두번째 모드를 가진시킨 경우가 첫번째모드를 가진시킨 경우보다 비가진모드에 미치는 영향이 큼을 알 수 있었다.

(5) 본 논문에서는 정규모드 관점에서만 해석을 수행하였지만, 다른 주기해 형태에 관한 연구도 수행되어야 할 것이다.

(6) 실제 탄성체인 연속체를 Galerkin방법에 의해서 무한개의 모드중에서 첫번째와 두번째 모드만을 고려하였지만, 이는 구조동력학적으로 문제시되는 주파수에 해당되는 모드를 중심으로 간략화하여 수행함으로써, 이에 대한 연구는 앞으로 구조동력학적 측면에 많은 활용이 기대된다.

후 기

이 연구는 인하대학교 '92년도 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참고문헌

- (1) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York : Wiley-Interscience.
- (2) Nayfeh, S. A. & Nayfeh, A. H. 1992, "Energy Transfer from High- to Low-Frequency Modes in Flexible Structures," *Nonlinear Vibrations, ASME, DE-Vol. 50/AMD-Vol. 144*, pp. 69~81.
- (3) Maewal, A., 1986, "Chaos in a Harmonically Excited Elastic Beam," *J. of Applied Mech., ASME*, Vol. 53, pp. 625~632.
- (4) Tseng, W. Y. and Dusundji, J., 1971, "Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation," *J. of Applied Mech., ASME*, Vol. 38, pp. 467~476.
- (5) Afaneh, A. A. and Ibrahim, R. A., 1992, "Nonlinear Response of an Initially Bucked Beam with 1:1 Internal Resonance to Sinusoidal Excitation," *Nonlinear Vibrations, ASME, DE-Vol. 50/AMD-Vol. 144*, pp. 69~81.
- (6) Bennett, J. A. and Eisely J. G., 1970, "A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations," *AIAA J.*, Vol. 8, No. 4, pp. 734~739.
- (7) Tousei, S. and Bajaj, A. K., 1985, "Period-Doubling Bifurcations and Modulated Motions in Forced Mechanical Systems," *J. of Applied Mech., ASME*, Vol. 52, pp. 446~452.
- (8) Chang, S. I., 1993, *Studies in Non-Linear Multi-Mode Responses of Harmonically Excited Rectangular Plates with Internal Resonances*, Ph. D. Thesis, Purdue Univ.
- (9) Shames, I. H. and Dym, C. L., 1985, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, McGraw Hill, INC.
- (10) Dym, C. L., 1974, "Stability Theory and Its Applications to Structural Mechanics," *Nonrod-hoff Interational Pub., Leyden*, The Netherlands.
- (11) Stoker, J. J., 1950, *Nonlinear Vibrations*, Wiley, New York.
- (12) Marnus W. and Winkler, 1966, *Hill's Equation*, Interscience Publisher.
- (13) Bolotin, V. V., 1964 *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, INC.
- (14) Rosenberg, R. M., 1966, "On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom," *Academic Press Applied Mech.*, Vol. 9, pp. 155~242.
- (15) Guchkehemier, J. and Holmes, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcatinos of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- (16) Month, L. A. and Rand, R. H., 1977, "The Stability of Bifurcating Periodic Solutions in a Two-Degree-of-Freedom Nonlinear System," *J. Appl. Mech.*, pp. 782~784.
- (17) Pak, C. H., 1988, "On the Stability Behaviors of Bifuracated Normal Modes in Coupled Nonlinear Systems," *J. of Applied Mech., ASME*, Vol. 56, pp. 156~161.
- (18) Yun, Y. S., 1990, *On the Stability Relation between Free and Forced Vibrations in Coupled Nonlinear Oscillators*, Ph. D. Thesis, Inha Univ.
- (19) Pak, C. H., Rand, R. H. and Moon, F. C., 1992, "Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 3, pp. 347~364.
- (20) Pak, C. H., Rand, R. H. and Vakakis, A. F., 1992, "Bifurcation of Nonlinear Normal Modes in A Class of Two Degree of Freedom System," *Acta Mcchanica*, Vol. 3, pp. 129~145.