

〈論 文〉

확률 유한요소법을 사용한 구조물 최적설계

임오강* · 이병우**

(1993년 9월 22일 접수)

Structural Optimization Using Stochastic Finite Element Method

O Kaung Lim and Byung Woo Lee

Key Words : Stochastic Finite Element Method(확률 유한요소법), Optimal Design(최적설계), Sensitivity Analysis(민감도해석)

Abstract

The stochastic finite element method(SFEM) based structural optimal design is presented. Random system response including uncertainties for the design variable is calculated with first order perturbation method. A method for calculating the sensitivity coefficients is developed using the equilibrium equation and first-order perturbed equation. Numerical results are presented for a truss, frame and plate structures with displacement and stress constraints. The sensitivity calculation proposed here is compared with finite difference method. A nonlinear programming technique is used to solve the problem. The procedure is easily incorporated with existing deterministic structural optimization.

1. 서 론

구조계에서 불확정 요인을 포함한 응답은 확률 유한요소법(stochastic finite element method)의 사용으로 해석이 가능하다. 공학설계에 있어서 재료의 물성과 기하학적 매개변수, 외부 하중 등이 측정의 부정확이나 시스템의 복잡성으로 인한 것이 불확정 요인에 해당한다. 불규칙적으로 변하는 매개변수를 가진 시스템은 랜덤변수를 사용하여 수학적으로 모델링될 수 있다.

SFEM은 기존의 유한요소법에 랜덤분야를 통합한 것으로서 정적, 동적 시스템의 응답에 대한 기대치와 분산 등의 확률변수의 통계적인 모멘트를 구하는데 주로 사용이 되어왔다. 현재 SFEM에 사용되고 있는 근사법에는 테일러 전개를 사용한 급

수전개방법과 섭동법(perturbation method), 그리고 선형편미분법(linear partial derivatives method) 등이 있으나 똑같은 이론적인 배경을 가지고 있다.⁽¹⁾ 또한 본 방법은 구조물의 안전성이나 신뢰성 설계와 관련하여 많이 적용되고 있다. 이와 관련하여 Contreras(1980)는 동적모델의 신뢰성 설계⁽²⁾에 본 방법을 적용하였으며, Vanmarcke와 Grigoriu(1980)는 강성이 축을 따라 랜덤하게 변화되는 보를 해석⁽³⁾한 바 있다. 그 외에 Shinozuka, Nakagiri, Liu, Mani 등에 의해서 계속해서 연구가 진행 되어왔다.^(4~8)

구조 신뢰성 설계분야에서는 Hasofer-Lind가 제안한 first-order, second-moment 기준을 사용하여 two-stage 프로그래밍법, chance 프로그래밍법 등의 연구^(9,10)가 수행되었다. 또한 신뢰성지수(reliability index)가 한계 상태방정식까지의 거리를 최소화하는 신뢰성 최적설계기법에 많은 연구^(11,12)가 있었다. 그러나 재료상수나 재질의 공차 등에

*정회원, 부산대학교 기계공학과 및 기계기술연구소

**정회원, 부산대학교 대학원 기계공학과 및 기계기술연구소

의한 시스템의 불확정 요인을 확률 유한요소법을 사용해서 최적설계를 수행한 연구는 없었다. 그래서 확률 유한요소법을 사용해서 불확정성을 설계에 반영하는데 관심을 가지게 되었다.

본 논문에서는 랜덤시스템에 일계섭동법을 적용하여 확률 구조해석을 수행하고, 평형방정식과 변동을 결정방정식을 이용하여 민감도해석법을 개발한 것이 본 논문의 주요한 결과이다. 섭동법은 랜덤함수가 결정론적인 부분과 랜덤성분의 수열의 합으로서 표현되며, 그 합을 변분법에 적용을 하면 변동을 결정식을 얻을 수 있다. 본 방법의 주요한 장점으로서의 현재 구조물 최적설계를 수행할 때 적용되고 있는 유한요소법을 사용한 방법에 쉽게 접목이 되어질 수 있는 점이다. 그러나 확률변수의 변동률이 작을 때에만 적용이 가능한 단점 또한 있다.

수치예제는 트러스와 프레임 및 판구조물을 대상으로 설계변수가 불확정적인 경우에 대해서 수치해석 하였다.

사용된 최적설계 알고리즘은 반복 이차계획법 중의 하나인 PLBA 최적설계 알고리즘을 사용하였다. 민감도해석은 직접미분법에 의해 구하였으며, 확률 유한차분법과 그 값을 비교하였다.

그래서 본 방법은 현재 유한요소법을 사용한 확정적인 구조물의 최적설계와 마찬가지로 불확정 요인을 포함한 구조계에 쉽게 적용이 되어질 수 있리라 여겨진다.

2. 확률 유한요소법을 사용한 최적설계 정식화

본 절에서는 확률 유한요소법을 사용한 정식화에 대하여 언급하였다. 또한 기술기에 근거를 둔 최적설계의 수행에 필요한 민감도 해석법을 설명하였다.

2.1 섭동법에 의한 변동을 결정식

정적 구조물의 기계적인 거동은 유한요소 변위법으로 구성되는 평형방정식에 의해 지배 받는다.

$$KZ = F \quad (1)$$

식(1)에서 Z 는 미지의 절점변위벡터이고, F 는 외부 하중벡터이다. K 는 강성행렬로서 다음에 의하여 구성된다.

$$K = \int_V B^T DB dV \quad (2)$$

식(2)에서 D 는 응력과 변형률간의 관계행렬이고, B 는 변형률과 절점변위간의 관계행렬이다

구조계에서 재료특성이나 기하학적 특성에 변동을 포함한 경우 기대치가 0인 확률변수 α 를 사용하여 강성행렬은 다음 일차식으로서 전개될 수 있다고 가정한다.

$$K = K^0 + \sum_{k=1}^n K'_k \alpha_k + \dots \quad (3)$$

식(3)에서 하첨자 k 는 구조계가 포함한 확률변수의 개수이다. 또한 상첨자 0은 확정적인 구조에 대한 값이며, 상첨자 I 는 일차 변동된 값이다. 마찬가지로 외부 하중벡터에 대해서도 가정을 한다.

$$F = F^0 + \sum_{k=1}^n F'_k \alpha_k + \dots \quad (4)$$

식(1)에서 미지의 절점변위 Z 에 대해서 다음과 같이 일차 형태로 가정을 한다.

$$Z = Z^0 + \sum_{k=1}^n Z'_k \alpha_k + \dots \quad (5)$$

식(3)에서 식(5)까지를 지배방정식 (1)에 대입하고 α 의 차수에 대해서 정리를 하면 평균에 중심을 둔 변동을 결정방정식을 얻는다.

$$K^0 Z^0 = F^0 \quad (6)$$

$$K'_k Z^0 + K^0 Z'_k = F'_k \quad (7)$$

식(6)은 확정적인 구조에 관한 평형방정식이며, 식(7)은 변동을 결정방정식이다. 식(6)과 식(7)으로부터

$$Z^0 = (K^0)^{-1} F^0$$

$$Z'_k = (K^0)^{-1} (F'_k - K'_k Z^0) \quad (8)$$

섭동하는 식(6)의 평형방정식으로부터 기대치에 대한 미지의 변위벡터를 구한후, 식(7)로부터 구한다. 보통의 경우 K^0 의 역행렬 한번만 구하면 섭동법에 근거를 둔 해를 얻을 수 있으나, 실제 강성행렬의 역행렬을 구하는 것이 비실용적이므로 식(6)의 연립방정식을 푸는 것과 같은 가우스소거법으로 섭동해를 구할 수 있다. 식(8)에서 구한 기대치의 변위와 변동된 변위를 식(5)에 대입하면 불확정 구조계의 변위값이 구해진다.

2.2 SFEM을 사용한 최적설계 정식화

불확정성을 갖는 구조물의 최적설계는 다음의 일반적인 비선형 계획법 문제로 정의할 수 있다.

Minimiz $J(x^0)$ (9)

Subject to $K^0 Z^0 = F^0$ (10)

$K_k^i Z^0 + K^0 Z_k^i = F_k^i$ (11)

$G_i \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, m$ (12)

And $x^{0L} \leq x^0 \leq x^{0U}$ (13)

식(9)의 $J(x^0)$ 는 최소화되어질 스칼라양으로서 목적함수이다. x^0 는 확률변수의 기대치인 설계변수 벡터로서 부재의 단면적, 판의 두께, 보의 관성이나 구조물의 형상을 특정하는 변수가 될 수 있다.

식(12)의 G_i 는 확률 유한요소법으로부터 계산되는 구조물의 변위, 응력 등의 제한식이며, m 은 제한식의 개수이다. 식(13)은 설계변수가 취할 수 있는 값의 범위로서 상·하한 값이다. 식(9)에서 식(13)까지의 정식화가 확정적인 설계와 다른 점은 등호 제한식에서는 변동률 결정방정식을 추가로 풀어야 하고, 변위, 응력 등의 부등호 제한식에는 변동 양이 포함되어서 구성되어야 한다는 점이다.

2.3 SFEM을 사용한 민감도해석

효율적인 최적설계 알고리즘에는 방향탐색을 수행할 때 목적함수와 제한식의 설계 미분값이 필요하다. 구조물의 민감도 해석법에는 직접미분법과 보조변수법, 차분법 등⁽¹³⁾이 있다. 본 논문에서는 직접미분법을 사용하여 제한식의 설계 민감도를 구하였다. 식(12)의 제한식은 일반적으로 설계변수와 상태변수의 합축함수로 되어 있기에 합성함수 미분법을 사용하여 미분하면 미분치가 구해진다. 우선 변위에 대한 민감도는 다음에 의하여 계산된다. 식(6)으로부터 기대치의 변위 민감도는 설계변수 x^0 에 대하여 편미분하면

$$K^0 \frac{\partial Z^0}{\partial x^0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} - \frac{\partial K^0}{\partial x^0} Z^0 \right) \quad (14)$$

식(14)에서 우변의 괄호안의 항은 하중 미분계수(force derivatives)라 한다. 식(14)의 우변항 중 킬드는 미분을 수행할 때 고정함을 의미한다.

변동된 변위의 민감도는 변동률 결정방정식(7)을 설계변수에 대해 편미분하면 얻을 수 있다.

$$K^0 \frac{\partial Z_k^i}{\partial x^0} = \frac{F_k^i}{\partial x^0} - \left(\frac{\partial K_k^i}{\partial x^0} Z^0 + K_k^i \frac{\partial Z^0}{\partial x^0} + \frac{\partial K^0}{\partial x^0} Z_k^i \right) \quad (15)$$

그러므로 불확정성을 갖는 구조계의 상태변수에 대한 설계변수의 총 민감도는 식(5)의 총 변위를 설계변수에 대해서 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial Z}{\partial x^0} = \frac{\partial Z^0}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial Z_k^i}{\partial x^0} \alpha_k \quad (16)$$

식(16)에서 우변의 첫번째 항은 식(14)에서 계산이 되고, 두번째 항은 식(15)에서 계산이 된다. 불확정 구조계의 설계변수 미분값은 확정적인 설계 민감도 값과 변동된 민감도 항의 합으로서 계산됨을 알 수 있다. 응력 제한식에 대한 설계 민감도 값은 다음에 의하여 계산이 된다. 요소응력의 일반적 인 표현은

$$\sigma = DBZ \quad (17)$$

식(17)을 설계변수 x^0 에 대해서 미분을 수행하면

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^0} = \frac{\partial DB}{\partial x^0} Z + DB \frac{\partial Z}{\partial x^0} \quad (18)$$

식(18)에서 응력에 대한 설계 민감도 값은 식(5)에서 계산되는 변위값과 식(16)에서 계산되는 변위의 민감도 값이 포함되어 계산된다.

3. 수치예제

본 절에서는 불확정 요인을 갖는 구조물에 대한 최적설계의 수치예가 제시된다. 전절에서 제시한 방법의 타당성을 검토하기 위하여 간단한 예제에 대해서 수치해석하였다. 예제는 HWS-S200K 워크스테이션에서 FORTRAN 언어를 사용하여 수행하였다.

설계변수가 불확정성을 갖는 즉, 기하학적 특성이 불확정적인 경우에 대해서 수행하였으며 나머지 재료정수와 하중은 결정적이라 가정하였다.

식(9)~(13)의 비선형 최적화 문제의 해법에 사용된 알고리즘은 PLBA⁽¹⁴⁾이다. PLBA 알고리즘은 비선형의 목적함수와 제한조건식을 이차계획법으로 단순화시킨 문제의 해를 반복적으로 해석하여 최적해를 구한다. 특징은 근사해세 정보를 이용하기에 수렴속도가 빠르고, 활성화 제한조건식 기법을 사용하여 제한된 범위의 조건식을 이용한다.

3.1 3절 트러스

3.1.1 문제 설명

부재 3개로 구성된 트러스 구조물이 Fig. 1에 나타나 있다. 최소 중량을 가지는 단면적의 기대치를 설계하는 문제이다. Fig. 1에서 기대치가 영인 미소 확률변수 α 를 사용하여 단면적 값을 확률변수

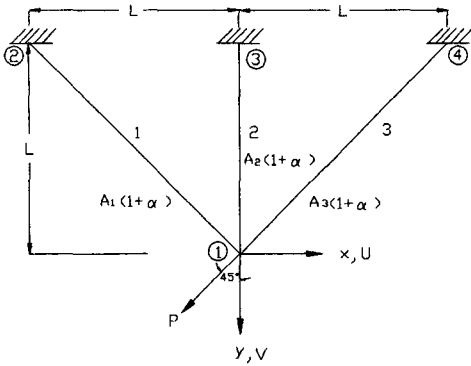


Fig. 1 Three bar truss

로 선정하였다. 설계변수는 단면적의 기대치인 A_1^0, A_2^0, A_3^0 이다. 하중은 절점 1에서 40,000 N이 주어진다. 부재의 재료는 탄성계수 $E=207 \text{ GPa}$, $\rho=0.03 \text{ kg/cm}^3$ 이다. 부재의 길이 L 은 100 cm로 하였다.

제한조건은 변위와 응력값을 부가하였다. 각 절점의 변위한계는 1.0 cm, 단면적의 하한은 0.1 cm^2 이며 상한은 10.0 cm^2 을 주었다. 또한 각 부재의 응력 한계는 부재 당 14000 N/cm^2 를 부가하였다. 설계변수의 평균 초기치는 3개의 변수를 각각 2.5, 1.0과 2.5 cm^2 로 하였다. 확률변수의 변동률은 0, 0.01, 0.1의 세가지 경우로 주고 수치해석 하였다. 한편 각 설계변수의 변동계수는 동일하다고 가정하였다. 우선 본 문제 다음과 같은 정식화로 표현될 수 있다.

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^n \rho A_k^0 L_k \quad (19)$$

Subject to stress constraints

$$|\sigma_i(X^0) = DBZ^0 + DBZ_k| \leq \sigma_i^a \quad (20)$$

$$i=1,2,3(k=1,2,3)$$

Displacement constraints

$$|z_i(A^0) = z_i^0 + z_{ki}| \leq z_i^a \quad i=1,2(k=1,2,3) \quad (21)$$

And bounds

$$A^{0L} \leq A^0 \leq A^{0U} \quad (22)$$

식 (19)는 목적함수로서 자중값이고 최소화되어질 스칼라양이다. 식 (20)과 식 (21)의 제한식에서 확정적인 최적설계와의 차이점은 식 (5)와 식 (17)에서 계산되는 불확정적인 구조응답을 포함하고 있는데 있다. 식 (22)는 설계변수의 기대치에 대한 상·하한 값이다.

3.1.2 최적설계 결과

PLBA 알고리즘에서 사용한 매개변수의 값은 다음과 같다. 벌칙 매개변수가 1.0, 최대 위반량 0.1, 최적치의 정확도 및 선택색의 정확도를 0.001로 택하였다. 우선 민감도 계산값을 검토한 후 최적설계를 수행하였다.

확정적인 구조에 대한 민감도해석 결과가 Table 1에 나타나 있다. Table 1과 Table 2에서 ψ_1 는 초기 설계값에서의 제한식의 값이고, ψ_2 는 개선된 설계에서의 제한식의 값이다. $\Delta\psi_1$ 는 ψ_2 에서 ψ_1 를 감한 값이며 5%의 설계 변화를 주어서 구하였다. Table 1에서 ψ_1 는 해석적으로 구한 값이다. $\Delta\psi_1$ 와 ψ_1 의 정확도의 비교는 100배로 하여 비교 하였다. 또한 ψ_1 은 절점 1에서의 x방향 변위 제한식 값이고, ψ_2 는 절점 1에서 y방향 변위 제한식 값이다. ψ_3 는 요소 1번에서의 응력 제한식 값이다. Table 1에서 ψ_1 와 ψ_2 에 대한 ψ_3 는 식 (14)로 구하였다. 단면적이 확정적일 때 직접미분법에 의한 결과와 차분법에 의한 값이 104~106%로 잘 일치함을 알 수가 있다.

다음은 단면적의 변동계수가 비교적 작은 경우 0.01에 대한 민감도 값을 비교하였다. 결과가 Table 2에 나타나 있다. Table 2에서 ψ_1 와 ψ_2 에 대한 ψ_3 는 식 (16)으로 구하였다. ψ_3 에 대한 ψ_1 는 식 (18)로 구하였다.

이 경우에도 마찬가지로 상대 비교값이 약 103~105%로 잘 일치함을 알 수가 있다.

Table 1 Comparison of sensitivity calculation ($\alpha=0$)

Const.	ψ^1	ψ^2	$\Delta\psi = \psi^2 - \psi^1$	ψ'	$(\psi'/\Delta\psi \times 100) \%$
ψ_1	6.1872	6.1336	-0.0536	-0.0559	104.3
ψ_2	3.9856	3.9520	0.0336	0.0357	106.3
ψ_3	1.6526	1.5876	-0.0650	-0.0677	104.2

Table 2 Comparison of sensitivity calculation ($\alpha=0.01$)

Const.	ψ^1	ψ^2	$\Delta\psi = \psi^2 - \psi^1$	ψ'	$(\psi'/\Delta\psi \times 100) \%$
ψ_1	6.1248	6.0720	-0.0528	-0.0554	104.9
ψ_2	3.9120	3.9464	0.0344	0.0354	102.9
ψ_3	1.6361	1.5717	0.0644	-0.0671	104.4

Table 3 Results of 3 bar truss optimization

Case	Cost (kg)	Design variables (cm ²)			F. E.	G. E.	Time(sec)
		A_1^0	A_2^0	A_3^0			
$\alpha=0$	12.67	0.1	0.1	2.8168	9	10	0.34
$\alpha=0.01$	12.55	0.1	0.1	2.7883	9	10	0.36
$\alpha=0.1$	11.46	0.1	0.1	2.5309	76	19	1.32

상기의 민감도 계산값을 이용하여 세가지 경우 ($\alpha=0$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.1$)에 대해서 최적설계를 수행하였다.

확정적인 경우 5번의 반복회 동안에 12.67 kg에 수렴하였으며, 절점 1번에서의 변위 제한식과 요소 3번에서의 응력 제한식 그리고 설계변수 A_1^0 , A_2^0 의 하한값이 최적화되는데 영향이 있었다.

단면적의 변동률이 0.01로 작은 경우에 대해서는 마찬가지로 5번의 반복회 동안에 12.55 kg에 수렴하였으며 최적치에서의 활성화 제한식은 동일하였다.

마지막으로 변동계수가 0.1인 경우에 대해서는 9

번의 반복회 동안에 11.46 kg에 수렴하였으며 역시 활성화 제한식에는 변함이 없었다.

반복회당 목적함수의 변화된 값이 Fig. 2에 나타나 있으며, Table 3에는 최적치에서의 설계변수의 값과 함수계산수(function evaluation number), 기울기계산수(gradient evaluation number) 또한 컴퓨터 실행시간을 비교하였다.

상기 결과를 고찰해 보면 다음과 같다. 실제 트러스 부재의 제작시나 설계시에 단면적에는 공차의 개념이 포함되어져 있다. 그래서 단면적에 대한 변동계수를 +공차값을 주고 수치해석하였다. 변동계수가 커짐에 따라 제한식에 사용되는 변위와 응력 값이 확정적인 경우보다 줄어든다. 이는 강성행렬의 랜덤항에 변동계수를 포함한 부분이 원래 강성행렬에 더해져서 구조해석이 수행되므로 당연히 예상되는 결과이다. 그 결과로 인하여 최적설계 수행시 목적함수의 값이 점차적으로 줄어들었다. 변동계수가 0.01인 경우는 1%, 0.1인 경우는 9.6%의 값이 원래 목적함수 값과 변동폭을 가지고 있었다.

3.2 10절 트러스

3.2.1 문제 설명

부재가 10개로 구성된 트러스 구조물이 Fig. 3에 나타나 있다. 확률변수는 부재의 단면적으로 선정하였으며, 하중이나 재료상수는 확정적이라 가정하였다. 설계변수는 10개 부재의 단면적의 평균치로

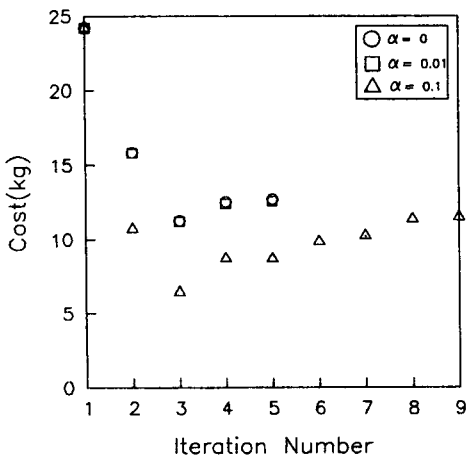


Fig. 2 Cost function history for three bar truss

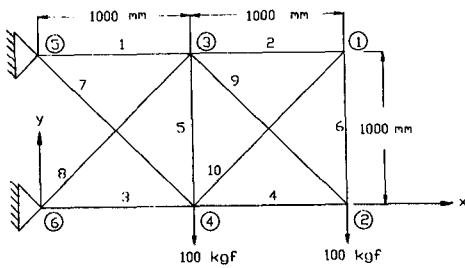


Fig. 3 Ten bar truss

택하였다. Fig. 3에서 하중은 절점 2와 절점 4에서 y 방향으로 100 kgf를 부가하였다. 사용된 재료는 탄성계수가 21000 kgf/mm²이고, 비중은 2.768E-05 kgf/mm³이다. 설계변수의 초기치는 50 mm²으로 하였으며, 상·하한값은 각각 10 mm², 100 mm²으로 부가하였다. 허용 변위값은 5 mm, 허용 응력값은 15 kgf/mm²으로 설정하였다. 정식화는 요소 개수 및 제한식 수를 제외하고는 식 (19)~식 (22)와 유사하다. 제한식의 개수는 변위 제한식 8개와 응력 제한식 10개이다.

3.2.2 최적설계 결과

벌칙 매개변수가 1.0, 최대 위반량 0.1, 최적치의 정확도 및 선탐색의 정확도를 0.01로 택하여 수치해석 하였다. 목적함수가 반복회당 감소한 그림이 Fig. 4에 나타나 있다.

Fig. 4에서 확정적일 경우는 14.82 kgf에 수렴하였다. 그 때 설계변수 벡터는 (47.652, 43.108, 48.836, 41.805, 55.872, 44.807, 48.655, 43.369, 41.096, 45.990) mm²이었다. 요소 5번의 응력이 최적화되는데 영향이 있었다. 함수 계산수는 57번이었으며, 기울기 계산은 18회 수행하였다.

변동계수가 0.01인 경우는 14.66 kgf에 수렴하였다. 그 때 설계변수 벡터값은 (47.235, 42.811, 48.343, 41.591, 54.936, 44.434, 48.010, 42.923, 40.711, 45.361) mm²이었다. 활성화 제한식은 확정적인 경우와 동일하였다. 함수 계산수는 55번이었으며, 기울기 계산은 16회 수행하였다.

변동계수가 0.1인 경우는 13.33 kgf에 수렴하였다. 그때 설계변수 벡터값은 (43.849, 39.203, 44.996, 37.939, 51.814, 40.920, 43.296, 38.008, 35.685, 40.506) mm²이었다. 활성화 제한식은 확정적인 경우와 동일하였다. 함수 계산수는 92번이었으며, 기울기 계산은 18회 수행하였다.

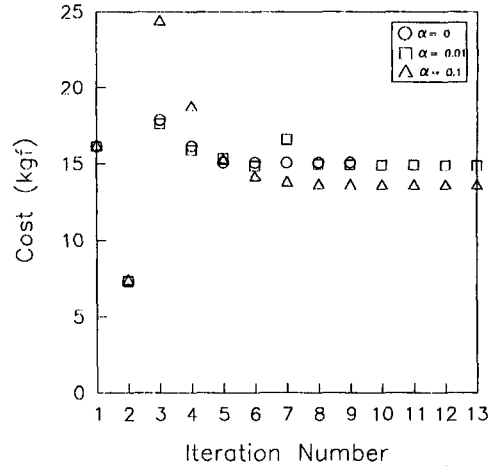


Fig. 4 Cost function history for ten bar truss

확률변수의 변동량을 0.01로 준 경우 원래 목적함수값에 비해 1% 변동이 있었다. 변동량을 0.1로 준 경우 원래 목적함수값에 비해 10% 변동폭이 있었다.

3.3 격자구조물 문제

3.3.1 문제 설명

본 문제는 자동차나 비행기 또는 기계 구조물에 많이 적용이 되는 수직하중을 받는 두 부재로 구성된 프레임을 설계하는 문제⁽¹⁵⁾로 Fig. 5에 나타나 있다. 즉, 응력 제한식과 설계변수의 크기 제한을 만족하면서 부피를 최적화하는 것이다. 확률변수는 부재의 폭(d)과 높이(h) 그리고 두께(t)로 선정하였다. 설계변수는 부재의 폭과 높이 및 두께의 평균값이다. 사용된 재료는 탄성계수가 206.8 GPa이고, 전단계수는 79.57 GPa이며 중공 사각형 단면을 가진다. 하중은 절점 2에서 상방향으로 44482.22 N이 작용된다. 부재의 길이 L 은 2.54 m로 하였으며, 설계변수 벡터의 초기치는 $x^0 = (0.0635, 0.0635, 0.0025)$ m로 하였다. 또한 허용 응력값은 275.79 Mpa로 하였다. 이 문제에 대한 변동계수도 동일하게 가정하였으며, 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } f(x^0) = 2L(2dt + 2ht - 4t^2) \quad (23)$$

Subject to normalized constraint

$$\frac{1}{\sigma_a}(\sigma^2 + 3\tau^2) - 1.0 \leq 0 \quad (24)$$

And bounds

$$\begin{aligned} 0.0635 \leq d^0 \leq 0.254 \\ 0.0635 \leq h^0 \leq 0.254 \\ 0.0025 \leq t^0 \leq 0.0254 \end{aligned} \quad (25)$$

식(24)는 등가응력값이며, σ 는 부재의 굽힘응력이고, τ 는 전단응력이다. 식(25)는 설계변수의 상·하한 값이다.

3.3.2 설계 민감도해석

확률 설계변수인 부재의 폭, 높이 그리고 두께의 변동계수가 확정적인 경우와 0.1인 경우 응력 제한식에 대한 직접 미분법으로 구한 민감도 값과 차분법으로 구한 값을 비교하였다. 차분값인 $\Delta\psi$ 는 초기 설계변수의 5% 증분을 주어서 구하였다. Table 4, 5에서 $\psi_{1,d}$ 는 응력 제한식 값을 폭에 대해서 편미분 한 값이다. $\psi_{1,t}$ 와 $\psi_{1,h}$ 는 각각 응력 제한식을 두께와 높이에 관하여 편미분 한 값이다. Table 5에서 ψ 는 식(18)로 계산된 값이다.

민감도해석 결과 높이 설계변수에 대한 값이 약

간 차이가 있었다. 차이는 차분법에서 증분을 5%로 주었기에 나타난 현상이다. 증분양을 줄여주면 오차는 감소할 것이다.

3.3.3 최적설계 결과

PLBA 알고리즘에서 벌칙 매개변수를 1.0, 최대 위반량 0.1, 최적치의 정확도 및 실험색의 정확도를 0.001로 택하였다. 그리고 최대 반복회수를 30번으로 주었다. 확률 설계변수의 변동계수는 0, 0.01, 0.1인 세가지 경우에 대해서 해석하였다. 결과가 Table 6에 나타나 있다.

수행결과 세가지 경우 모두 요소 1번의 응력 제한식과 보의 높이의 상한값 및 두께 하한값이 최적치에서 활성화 제한식이었다. 확정적인 경우의 최적값은 Ref.(15)의 값보다 약 3.6%가 높게 나타났다.

변동계수가 0.01인 경우의 해는 확정적인 것과 결과가 동일 하였다. 이 현상을 고찰해 보면 다음과 같다. 변동계수가 0.01일때 변위에 대한 섭동해

Table 4 Comparison of sensitivity calculation ($\alpha=0$)

Const.	ψ^1	ψ^2	$\Delta\psi = \psi^2 - \psi^1$	ψ'	$(\psi'/\Delta\psi \times 100) \%$
$\psi_{1,d}$	65789.79	60411.53	-5378.27	-5728.07	106.5
$\psi_{1,t}$	65789.79	58239.37	-7550.42	-8203.69	108.7
$\psi_{1,h}$	1392553.33	1278033.33	-114519.9	-147451.47	128.8

Table 5 Comparison of sensitivity calculation ($\alpha=0.1$)

Const.	ψ^1	ψ^2	$\Delta\psi = \psi^2 - \psi^1$	ψ'	$(\psi'/\Delta\psi \times 100) \%$
$\psi_{1,d}$	65750.24	60375.43	-5374.81	-5725.26	106.5
$\psi_{1,t}$	65750.24	58204.41	-7545.83	-8200.28	108.7
$\psi_{1,h}$	1391713.33	1277266.67	-114446.66	-147377.75	128.8

Table 6 Results of two-member frame optimization

Case	Cost (m ³)	Design variables (m)			F. E.	G. E.	Time(sec)
		Width	Height	Thickness			
$\alpha=0$	0.1196E-1	0.2003	0.254	0.2621E-2	10	10	0.42
$\alpha=0.01$	0.1196E-1	0.2003	0.254	0.2621E-2	10	10	0.43
$\alpha=0.1$	0.1195E-1	0.2003	0.254	0.2620E-2	10	10	0.41

Table 7 Perturbed displacements

Degree of freedom	Perturbed value	
	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$
U_1	3.375E-08	0.0003
U_2	-1.742E-08	-0.0002
U_3	1.742E-08	0.0002

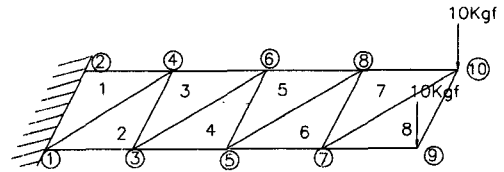


Fig. 6 Cantilever beam

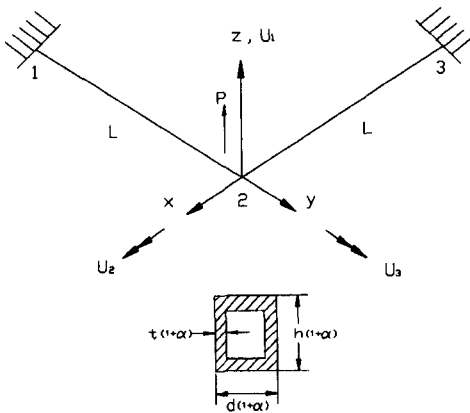


Fig. 5 Two member frame

가 Table 7에 나타나 있다. Table 7에서 U_1 은 Fig. 5에서 절점 2에서 수직변위이고, U_2 는 선 2~3에 대한 회전 변위값이고, U_3 는 선 1~2에 대한 회전 변위값이다.

Table 7에서 변동계수가 0.01인 경우의 섭동해는 order가 작으므로 확정적일 경우와 거의 차이가 없다. 그래서 제한식 구성시에 변위나 응력값이 원래해와 유사하였기에 동일한 최적치에 수렴하였다. 또한 설계변수의 보의 높이의 상한값 및 두께 하한값이 최적치에서 활성화되었으므로 이 영향때문에 더 줄어들지 못했다. 그러나 변동양이 증가할 수록 섭동해의 값이 커지고 있음을 알 수 있다.

설계변수의 변동계수를 0.1로 한 경우는 원래 최적값에 대해 1%의 변동률을 가지고 있었다.

3.4 외팔보의 균일응력에 대한 최적설계

3.4.1 문제 설명

보의 길이가 400 mm이고, 폭이 100 mm인 외팔보를 Fig. 6에 나타내었다. 유한요소 모델링은 절점수가 10개, 요소수가 8개로 하였다. 경계조건은

절점 1번과 2번의 모든 자유도를 구속하였고, 자유단의 9번과 10번 절점에 각각 10 kgf의 하중을 판에 수직인 방향으로 가하였다.

유한요소 모델링은 판요소에서 기본요소 중의 하나인 삼각형 요소를 사용하였다. 요소의 각 절점은 6자유도를 가지며 전체 강성행렬은 평면응력 요소와 순수굽힘요소를 중첩하여 구성하였다. 평면응력 요소는 CST(constant strain triangle) 요소를 사용하였으며, 순수굽힘 요소는 9자유도 부적합 요소를 사용하였다.

사용한 재료는 탄성계수가 21000 kgf/mm², 프와송 비가 0.3, 밀도는 78.57E-07 kgf/mm³이다.

확률변수는 판의 두께로 선정하였다. 설계변수는 판 두께의 평균치이며, 그룹화하였다. 즉, 요소 1번과 2번의 두께(b_1^0), 3번과 4번의 두께(b_2^0), 5번과 6번의 두께(b_3^0), 7번과 8번의 두께(b_4^0)가 같은 값을 가지도록 하였다. 본 문제에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^N \rho A b_j^0 \quad (26)$$

Subject to

$$\psi_i(b_i, z_i) \leq 0 \quad (27)$$

$$b_i^{0L} \leq b_i^0 \leq b_i^{0U} \quad (28)$$

식(26)은 목적함수로서 외팔보의 자중이며, NG 는 같은 설계변수를 가지는 요소들의 그룹의 수이다. N 은 각 그룹에 속한 요소의 수이다. 식(27)의 제한식은 변위와 각 요소의 등가응력으로 구성하였다. 등가응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{eq} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

허용 변위값은 전체 자유도에 대해서 5 mm를 부가하였다. 허용응력은 3 kgf/mm²이다. 식(28)에서 설계변수의 상·하한은 각각 10 mm, 100 mm로 주었다.

3.4.2 최적설계 결과

PLBA 알고리즘에서 벌칙 매개변수를 1.0, 최대

Table 8 Results of the cantilever beam optimization

Case	Cost (kgf)	Design variables (mm)				F. E.	G. E.
		Group 1	Group 2	Group 3	Group 4		
$\alpha=0$	2.744	11.715	10.238	8.006	4.9591	33	8
$\alpha=0.01$	2.743	11.715	10.238	8.006	4.9590	33	8
$\alpha=0.1$	2.742	11.709	10.232	8.002	4.9493	33	8

위반량 0.1, 최적치의 정확도 및 선택색의 정확도를 0.001로 택하였다.

확률변수인 각각 두께의 변동계수는 +공차를 가지도록 하고, 동일한 값을 주고 수치해석하였다. 결과가 Table 8에 나타나 있다.

Table 8에서 확정적인 경우 최적치에서 응력 제한식 모두가 최적화되는데 영향이 있었다. 목적함수 값은 반복회 9회만에 2.744 kgf에 수렴하였다. 그때 설계변수는 응력이 적게 나타나는 자유단으로 갈수록 판 두께가 얇아졌다.

변동계수가 0.01인 경우는 응력이 제일 작은 외팔보 자유단에 속하는 설계변수 네번째 그룹인 b_4 가 다소 줄었다. 이것은 Table 9의 등가응력의 변화를 살펴보면 알수 있다. Table 9에서 σ_{eq1} 는 요소 1번의 등가응력임을 의미한다.

Table 9에서 확정적인 경우와 변동계수가 0.01인 경우 등가응력은 거의 변동이 없음을 알수 있다. 실제로 값의 차이는 소수점이하 6자리에서 차이가 있었다. 그래서 변동계수가 0.01인 경우는 원래 목적함수값에 비해 차이가 없었다. 변동계수가 0.1인 경우는 반복회 8회만에 2.742 kgf에 수렴하

였다.

5. 결 론

실제 시스템에는 재료정수나 경계조건 및 외부하중등에 결정론적으로 사용할 수 없는 불확정량을 내포하고 있다. 일례로 구조물을 제작시 단면적이나 판의 두께와 같은 설계변수에 공차개념을 주고 설계를 한다. 확률 유한요소법은 재료정수나 기하학적 특성이 불확정할 때 정적이나 동적 시스템의 응답을 구하는데 주로 사용이 되어왔다. 구조 최적설계에서는 많은 연구가 수행되어 왔으나 상기에서 언급한 불확실성을 설계에 반영할 필요가 있다.

본 연구에서는 확률 유한요소법을 이용하여 변동량을 제한조건식에 부가해 주었다. 최적설계 알고리즘 중에는 제한조건식의 설계 민감도를 요구한다. 그래서 확률 유한요소법의 평형방정식과 변동량 결정식을 이용하여 설계 민감도해석법을 개발하였다.

기하학적 특성이 불확정한 구조계에 대한 수치해제로서 트러스 및 프레임과 판 구조물의 최적설계 문제에 본 방법을 적용하였다. 수치예제에서는 각기 설계변수의 변동량을 동일하게 가정하였으며 +공차를 적용하였다. 고찰한 결과는 다음과 같다.

(1) 불확정 구조계의 최적해는 확정적인 구조계의 해에 비하여 약간의 차이가 발생하였다. 그러나 일부 문제에서는 변동계수가 작을 경우 결과가 동일하였다. 이 결과는 제한식에 사용되는 변위, 응력의 섭동해에 연관이 있었다.

(2) 본 연구에서 제시한 민감도해석법은 차분법과 잘 일치하였다.

(3) 불확정 요인을 포함한 구조계에는 공차개념을 사용하므로 확정 설계값에 변동폭만큼 고려한다면 기존의 방법에 비하여 신뢰성을 향상시킬 수 있

Table 9 Comparison of the equivalent stresses

Equivalent stress	$\alpha=0$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$
σ_{eq1}	6.3372	6.3372	6.3309
σ_{eq2}	5.8175	5.8175	5.8117
σ_{eq3}	4.8753	4.8753	4.8704
σ_{eq4}	4.4384	4.4384	4.4339
σ_{eq5}	3.0284	3.0284	3.0254
σ_{eq6}	2.6546	2.6546	2.6519
σ_{eq7}	1.3359	1.3359	1.3345
σ_{eq8}	0.7887	0.7887	0.7879

다.

(4) 재료상수나 외부 하중 또한 기하학적인 특성에 불확정성이 동시에 포함된 경우 변동폭은 더 증가할 것이라고 예측할 수 있다.

참고문헌

- (1) Benaroya H. and Rehak, M., 1988, "Finite Element Methods in Probabilistic Structural Analysis: A Selective review," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 41, No. 5, pp. 201~213.
- (2) Liu, W. K., Belytschko, T. and Mani, A., 1986, "Random Field Finite Elements," *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 23, pp. 1831~1845.
- (3) Contreras, H., 1980, "The Stochastic Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 341~348.
- (4) Vanmarcke, E. and Grigoriu, M., 1983, "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, No. 5, pp. 1203~1214.
- (5) Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Shueller, G. I. and Grigoriu, M., 1986, "Random Fields and Stochastic Finite Elements," *Structural Safety*, Vol. 3, pp. 143~166.
- (6) Shinozuka, M., 1987, "Structural Response Variability," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 6, pp. 825~840.
- (7) Cruse, T. A., Wu, Y. T., Dias, B. and Rajagopal, K. R., 1988, "Probabilistic Structural Analysis Methods and Applications," *Computers and Structures*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 163~170.
- (8) Engelstad, S. P. and Reddy, J. N., 1993, "Probabilistic Nonlinear Finite Element Analysis of Composite Structures," *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 2, pp. 362~369.
- (9) Rao, S. S., 1980, "Structural Optimization by Chance Constrained Programming Techniques," *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 777~781.
- (10) Siddall, J. N., 1984, "A New Approach to Probability in Engineering Design and Optimization," *Journal of Mech., Trans., and Auto. in Design*, Vol. 106, pp. 5~10.
- (11) Belegundu, A. D., 1988, "Probabilistic Optimal Design Using Second Moment Criteria," *Transactions of the ASME*, Vol. 110, pp. 324~329.
- (12) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974, "Exact and Invariant Second-Moment Code Format," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 100, No. EM1, pp. 111~121.
- (13) Haug, E. J., Choi, K. K., Komkov, V., 1984, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press.
- (14) Lim, O. K. and Arora, J. S., 1986, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization," *Computer Methods in Appl., Mech., and Engineering*, Vol. 57, pp. 51~65.
- (15) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw Hill.