

〈論 文〉

상대이음좌표방법을 이용한 다물체 시스템의 동역학적 해석에 관한 연구

이동찬* · 배대성** · 한창수** · 서문석*** · 김재용***

(1994년 1월 27일 접수)

A Study on the Dynamic Analysis of Multibody System by the Relative Joint Coordinate Method

Dong-Chan Lee, Dae-Sung Bae, Chang-Su Han, Mun-Suk Seo and Jae-Yong Kim

Key Word: Open Loop(개방회로), Closed Loop(폐쇄회로), Spanning Tree(신장트리)

Abstract

This paper presents a relative coordinate formulation for constrained mechanical systems. Relative coordinates are defined along degrees of freedom of a joint. Graph theoretic analyses are performed to identify topological paths in mechanical systems. Cut constraints are generated to handle closed loop systems. Equations of motion are derived in the Cartesian space and transformed to the joint space. Relative generalized coordinates are corrected to satisfy the cut constraints by a parametrization method.

1. 서 론

기구학적 조인트로 연결된 다물체 시스템을 해석하기 위해서는 시스템의 미분방정식과 비선형 대수 구속방정식을 필요로 한다. 운동방정식을 유도할 때 두 가지 일반 좌표가 사용될 수 있는데, 그것은 강체들 사이의 조인트에서 정의되는 상대이음좌표(relative joint coordinate)와 직교절대좌표(cartesian absolute coordinate)이다. 직교절대좌표방법은 시스템의 위상기하학이나 조인트 유형에 관계없이 일반적이며, 개방 또는 폐쇄의 위상 기하학이나 조인트유형에 관계없이 일반적이며, 개방 또는 폐쇄회로시스템(open or closed loop system)에 대하여 쉽게 사용될 수 있으나 시스템의 거동을 표현

하는데 많은 일반 좌표가 사용됨으로 많은 미분방정식과 기구학적 구속방정식을 필요로 한다.

이에 비해 상대이음좌표방법은 개방 또는 폐쇄회로시스템에 대하여, 직교좌표방법에 비하여 적은 일반 좌표를 사용하여 운동방정식을 구성하고 절단이음에 대해서만 구속방정식을 고려하기 때문에, 시스템 해석에 있어서 직교 절대좌표 방법보다는 효율적이다.

Stepanenko, Vukobratovic, Wittenburg, Haug 등 많은 사람에 의해 실시간시뮬레이션을 위한 recursive Newton-Euler method, cut-joint method, cut-body method 등 효율적인 운동방정식 공식화에 대해 연구가 수행되어 왔다.⁽⁵⁾

본 연구의 목적은 실시간시뮬레이션을 위하여 위에서 언급한 직교좌표방법의 단점을 극복하기 위한 방법으로 상대좌표를 이용하여 다물체 시스템의 동적거동해석을 하는 것이다. 폐회로 내의 상대좌표 사이의 관계식은 절단이음을 통하여 정의하였다.

*고등기술연구원

**정회원, 한양대학교 정밀기계공학과

***정회원, 국방과학연구소

그리고 절단이음에서 생성된 구속 대수방정식은 parameterization DAE 해법⁽⁶⁾에 의하여 해결하였다.

2. 운동방정식 자동생성을 위한 시스템 그래프

다물체 시스템을 표현할 때 그래피론^(3~7)을 사용하면 강체를 절점(node)으로 표현하고 기구학적 조인트를 변(edge)으로 표현할 수 있다. 시스템의 그래프에는 개방회로(open loop)와 폐쇄회로(closed loop)가 있으며 개방회로를 가진 시스템의 그래프를 트리구조(tree structure)라 한다. 폐쇄회로는 루프 또는 사이클을 포함하고 있는 시스템의 그래프이다. 시스템의 그래프가 트리구조로 이루어져 있지 않으면 신장트리(spanning tree)라 불리는 트리구조를 형성하기 위하여 독립된 루프 또는 사이클 상의 한 변을 절단시켜야 한다. 신장트리구조는 시스템을 이루는 임의의 두 절점이 어떠한 기구학적 조인트로 연결되어 있는지를 그 조인트에 대한 가중치를 이용하여 나타낸 시스템의 거리행렬(distance matrix)로부터 형성될 수 있다. 기계시스템 거리행렬 D 의 요소 D_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{ij} = \begin{cases} 0; \text{ 만약 강체 } i \text{와 } j \text{가 기구학적 이음으로 연결되어 있지 않는 경우} \\ d; \text{ 만약 강체 } i \text{와 } j \text{가 기구학적 이음으로 연결되어 있는 경우} \end{cases}$$

여기서, d 는 강체 i 와 j 사이의 두 강체사이의 기구학적 조인트에 대한 가중치(weighting factor)이며, Table 1에 나타나 있다.

또한 시스템의 거리행렬로부터 dijkstra알고리즘⁽¹¹⁾을 이용하여 해석을 효율적으로 하기 위하여 기저 강체로부터 시스템을 이루는 각 강체에 연결된 해석경로를 구성한다. 경로행렬(path matrix) π_{ij} 는

다음과 같이 정의한다.

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1; j\text{번째 강체가 기저강체와 } i\text{번째 강체사이} \\ \text{에 있을 경우} \\ 0; \text{ 나머지 경우} \end{cases}$$

3. 상대이음좌표에 의한 강체의 운동학^(3~8)

3.1 위치해석과 속도해석

Fig. 1에서와 같이 세개의 강체가 연결되어 있을 경우 강체 i 와 j 사이의 관계를 정의하기 위하여 강체 고정조인트 기준좌표계를 강체 i 와 j 에 대하여 O_i'' 과 O_j'' 점에서 정의하며, 강체 i 와 j 의 고정조인트 기준좌표계 사이의 상대병진 그리고 회전 일반 좌표를 a_{ij} 그리고 θ_{ij} 라 하고 병진 단위벡터를 b_{ij} 라 한다. 이 일반 좌표를 이용하여 관성 기준좌표계에 대한 강체 j 의 위치벡터를 표현하면 다음과 같다.

$$r_j = r_i + s_{ij} + a_{ij} b_{ij} - s_{ij} \quad (1)$$

식(1)은 강체 i 와 j 사이의 병진과 회전조인트를 고려한 것이다.

그리고 관성 기준좌표계에 대한 강체 j 의 각속도 ω_j 는 강체 i 의 각속도 ω_i 와 강체 i 와 j 사이의 상대 회전좌표의 속도 $\dot{\theta}_{ij}$ 그리고 조인트 축벡터인 H_{ji} 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\omega_j = \omega_i + H_{ji} \dot{\theta}_{ij} \quad (2)$$

식(2)를 각 강체의 강체 고정좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$\omega_j = A_j^T A_i \omega_i + H_{ji}' \dot{\theta}_{ij} \quad (3)$$

강체 j 의 병진속도는 식(1)을 시간에 대하여 한 번 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{r}_j = \dot{r}_i - \dot{r}_{ij} A_i \omega_i + \dot{s}_{ij} A_j H_{ji}' \dot{\theta}_{ij} + A_j b_{ij}' \dot{a}_{ij} \quad (4)$$

여기서, \dot{r} 은 r 에 대한 skew-symmetric matrix

Table 1 Data of joint

Joint type	Revolute joint	Translation joint	Universal joint	Cylindrical joint	Spherical joint
Relative coord.	1	1	2	2	3
Cut joint constraint	5	5	4	4	3
Weighting factor	1.5	1.0	2.1	2.0	3

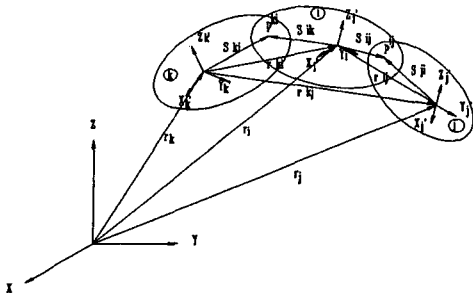


Fig. 1 Three adjacent rigid body system

dlau, \tilde{s}_{ij} 는 s_{ij} 에 대한 skew-symmetric matrix이다.

그리고 식(4)을 사용하여 강체 i 의 병진속도와 국부 각속도를 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{r}_i = \dot{r}_k - \tilde{r}_{ki} A_k \omega_k' + \tilde{s}_{ik} A_i' \dot{\theta}_{ik} + A_i b_{ik}' \dot{\alpha}_{ik} \quad (5)$$

$$\omega_i' = A_i^T A_k \omega_k' + H_{ik}' \dot{\theta}_{ik} \quad (6)$$

식(5)와 식(6)를 사용하여 식(4)를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{r}_j = \dot{r}_k A_k \omega_k' + [-d_{ij} A_i H_{ik}' \dot{\theta}_{ik} + A_i b_{ik}' \dot{\alpha}_{ik}] + [\tilde{s}_{ji} A_j H_{ji}' \dot{\theta}_{ij} + A_j b_{ji}' \dot{\alpha}_{ij}] \quad (7)$$

여기서, $s_{ji} = -d_{ji}$ 로 표현한다면 식(7)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{r}_j = \dot{r}_k - \tilde{r}_{kj} A_k \omega_k' + [-\tilde{d}_{ij} A_i H_{ik}' \dot{\theta}_{ik} + A_i b_{ik}' \dot{\alpha}_{ik}] + [\tilde{d}_{ij} A_j H_{ji}' \dot{\theta}_{ij} + A_j b_{ji}' \dot{\alpha}_{ij}] \quad (8)$$

식(8)을 임의의 강체 고정좌표계의 원점의 속도 V_i 를 일반적인 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$V_i = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^{nb} \pi_{ij} (-d_{ji} A_j \Omega_j' + A_j v_j') \quad (9)$$

여기서, d_{ji} 는 i 번째 강체와 j 번째 강체의 강체 고정좌표계의 원점 사이의 거리벡터이다.

강체의 국부가속도의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\omega_i' = \sum_{j=1}^{nb} \pi_{ij} A_i^T A_j \Omega_j' \quad (10)$$

여기서, π_{ij} 는 시스템의 경로행렬의 강체 i 와 강체 j 의 연결성(connectivity) 여부를 나타내는 0 아니면 1의 값을 갖는다. Ω_j' 와 v_j' 는 다음과 같다.

$$\Omega_j' = \begin{cases} 0 : \text{강체 } j \text{가 지면 기저강체인 경우} \\ \omega_j' : \text{강체 } j \text{가 이동 기저강체인 경우} \\ \sum_k (1 - \epsilon_k^j) h_k^j \dot{q}_k : \text{강체 } j \text{조인트로 연결되어 있는 경우} \end{cases}$$

$$v_j' = \begin{cases} 0 : \text{강체 } j \text{가 지면 기저강체인 경우} \\ A_j^T V_j : \text{강체 } j \text{가 이동 기저강체인 경우} \\ \sum_k \epsilon_k^j h_k^j \dot{q}_k : \text{강체 } j \text{조인트로 연결되어 있는 경우} \end{cases}$$

A_j 는 j 번째 강체의 회전변환행렬로서 이동 기저강체인 경우 이에 대한 오일러파라미터 $p = [e_0, e^T]^T$ 라 할 때 $A = EG^T$ 로 나타낼 수 있으며, 나머지

Table 2 Block of B matrix

Joint type of j th body	B_{ij}	Matrix size
Free base body	$\begin{bmatrix} I_3 & -\tilde{d}_{ij} A_j \\ 0 & A_j^T A_j \end{bmatrix}$	6×6
Revolute joint	$\begin{bmatrix} -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j1}' \\ A_j^T A_j u_{j1}' \end{bmatrix}$	6×1
Translational joint	$\begin{bmatrix} A_j u_{j1}' \\ 0 \end{bmatrix}$	6×1
Cylindrical joint	$\begin{bmatrix} -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j1}' & A_j u_{j2}' \\ A_j^T A_j u_{j1}' & 0 \end{bmatrix}$	6×2
Universal joint	$\begin{bmatrix} -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j1}' & -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j2}' \\ A_j^T A_j u_{j1}' & A_j^T A_j u_{j2}' \end{bmatrix}$	6×2
Spherical joint	$\begin{bmatrix} -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j1}' & -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j2}' & -\tilde{d}_{ij} A_j u_{j3}' \\ A_j^T A_j u_{j1}' & A_j^T A_j u_{j2}' & A_j^T A_j u_{j3}' \end{bmatrix}$	6×3

Table 3 Block of B matrix

Joint type of j th body	B_{ij}	Matrix size
Free base body	$\begin{bmatrix} 0 & -\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j \\ 0 & A_j^T A_j + A_j^T A_j \end{bmatrix}$	6×6
Revolute joint	$\begin{bmatrix} (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j1}' \\ (A_j^T + A_j^T A_j) \underline{u}_{j1}' \end{bmatrix}$	6×1
Translational joint	$\begin{bmatrix} A_j \underline{u}_{j1}' \\ 0 \end{bmatrix}$	6×1
Cylindrical joint	$\begin{bmatrix} (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j1}' & A_j \underline{u}_{j2}' \\ (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j1}' & 0 \end{bmatrix}$	6×2
Universal joint	$\begin{bmatrix} (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j1}' & (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j2}' \\ (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j1}' & (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j2}' \end{bmatrix}$	6×2
Spherical joint	$\begin{bmatrix} (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j1}' & (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j2}' & (-\underline{d}_{ij}A_j - \underline{d}_{ij}A_j) \underline{u}_{j3}' \\ (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j1}' & (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j2}' & (A_j^T A_j + A_j^T A_j) \underline{u}_{j3}' \end{bmatrix}$	6×3

강체에 대해서는 조인트에서 정의되는 상대좌표에 대한 상대 회전변환행렬 A'' 에 의하여 각 강체에 대한 회전변환행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_j = A_i C_{ij} A_{ij}'' C_{ji}^T$$

여기서, $E = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}$

$G = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix}$

A_i 는 기준 강체에 대한 회전변환행렬이고, C_{ij} , C_{ji} 는 임의의 i 와 j 의 국부좌표계와 조인트좌표계 사이의 회전변환행렬이다.

직교좌표계 성분의 속도 Y 와 상대속도 성분 \dot{q} 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y = B\dot{q} \tag{11}$$

B 는 식(9)와 식(10)을 이용하여 유도할 수 있으며, B 의 요소인 B_{ij} 는 Table 2에 나타나 있다.

3.2 가속도해석

식(11)을 시간에 대하여 미분하면 시스템의 직교좌표의 가속도 \dot{Y} 는 다음과 같다.

$$\dot{Y} = B\ddot{q} + \dot{B}\dot{q} \tag{12}$$

여기서, B 의 요소인 B_{ij} 는 강체 i 와 j 사이의 기구학적 조인트에 따라 Table 3에 나타나 있다.

4. 절단이음에 대한 구속조건

폐쇄회로를 포함하고 있는 기계시스템을 상대이음좌표를 사용하여 해석할 경우 절단이음에 의하여 트리구조를 형성할 수 있다. 이 신장트리 구조를 구성할 경우 절단이음에 의해 연결된 두 강체에 대한 기구학적인 구속을 고려하여야 한다.

그래프이론을 사용하여 강체를 i 와 j 사이에서 절단이음이 될 때, 기구학적 구속방정식은 다음과 같다.

$$\Phi^{(ij)}(r_i, A_i, r_j, A_j) = 0 \tag{13}$$

두 강체의 직교위치좌표를 Z 라 할 때 식(13)에 변분을 취하면

$$\Phi_z \delta Z = 0 \tag{14}$$

이 되며, 여기서, 직교가상변위 $\delta Z = \delta[Z_i, Z_j]^T$ 이다.

직교가상변위 δZ 와 상대 가상좌표 δq 사이의 관계를 이용하여 상대 이음좌표상에서의 구속 자코비언은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi_z B \delta q = \Phi_q \delta q = 0 \tag{15}$$

식(14)를 이용하여 직교좌표상에서의 속도 구속 조건식은 다음과 같다.

$$\Phi_z Y = 0 \quad (16)$$

여기서, z 는 직교위치좌표 성분이며, Y 는 직교 속도 성분이다.

식(16)의 상대이음좌표상에서의 속도 구속방정식은 다음과 같다.

$$\Phi_z B \dot{q} = \Phi_q \dot{q} = 0 \quad (17)$$

식(17)를 시간에 대하여 미분하여 절단이음에 대한 가속도 구속방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\Phi_z B \ddot{q} = \Phi_q \ddot{q} = \gamma - \Phi_z \dot{B} \dot{q} = \gamma^* \quad (18)$$

여기서, γ 는 직교좌표상에서의 가속도방정식의 오른쪽 항이며, γ^* 는 상대좌표상에서의 가속도 방정식의 오른쪽 항이다.

5. 다물체 시스템에 대한 운동방정식

강체 시스템에 대한 Newton-Euler 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta Z^T (M \dot{Y} - Q + \Phi_z^T \lambda) = 0 \quad (19)$$

여기서, δZ 는 기구학적으로 모든 직교좌표에 대한 구속조건식을 만족하여야 하며, M 은 질량행렬, Φ 는 기구학적 조인트에서 나타나는 구속조건, 그리고 λ 는 Lagrange 미정계수를 나타낸다. Q 는 직교좌표상에서의 외력항으로 중력, 스프링-댐퍼-작용기의 내력을 포함한다.

식(19)을 이용하여 절단이음이 있을 경우, 상대좌표상에서의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\delta q^T (B^T M B \ddot{q} + B^T M \dot{B} \dot{q} - B^T Q + \Phi_q^T \lambda) = 0 \quad (20)$$

여기서, δq 는 상대이음좌표에 대한 가상변위이며, 모든 조인트에 대한 구속조건이 만족됨으로 임의의 수가 된다. 따라서 δq 의 계수는 0이 되어야 하기 때문에

$$B^T M B \ddot{q} + B^T M \dot{B} \dot{q} - B^T Q + \Phi_q^T \lambda = 0 \quad (21)$$

이 되어야 한다. 그리고 식(20)에서 표현된 Φ 는 절단이음에 대하여 나타나는 구속조건이며, Φ_q 는 상대좌표상에서의 자코비언이다.

식(21)에는 가속도와 Lagrange multiplier가 있다. 그러나 식(21)의 식수는 미지수보다 적으므로

절단이음에 대한 구속방정식은 두번 미분되어 다음과 같은 구속방정식이 접합된 운동방정식을 형성한다.

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \Phi^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}^A \\ \gamma^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서, \hat{M} 은 상대좌표상에서의 질량행렬로 $\hat{M} = B^T M B$ 이고, \hat{Q}^A 은 상대좌표상에서의 외력항으로 $\hat{Q}^A = B^T Q - B^T M \dot{B} \dot{q}$ 이다.

식(22)로부터 상대 가속도 \ddot{q} 와 절단조인트에 대한 Lagrange 미정계수 λ 를 얻을 수 있다.

6. 미분-대수방정식의 해

식(22)의 운동방정식을 적분하면 해는 구속조건식을 일반적으로 만족하지 않으므로 구속 조건을 만족시키는 위치와 속도로써 구속조건에 일치하는 위치와 속도로 해를 수정해야 한다. 그 다음엔 가속도를 구하면 다음 시간단계에서 속도와 가속도를 위치와 속도로 다시 적분을 한다. 따라서 원하는 최종 시간까지 위치와 속도 그리고 가속도 해석을 반복한다. 다음에서 각 해석모듈에 대해 논하려 한다.

6.1 위치해석

일반적으로 그 time step에서 초기에 속도로부터 적분된 일반 좌표 q^* 는 절단이음에 대한 구속 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 이완된 구속조건(위반된 위치 구속조건)을 만족시키기 위하여 q^* 를 constraint manifold 상으로 투영함으로써 얻어진다. 그것은 다음과 같이 구속을 갖는 최적화 문제로 공식화될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & 1/2 (q - q^*)^T \hat{M} (q - q^*) \\ \text{s.t. } & \Phi^*(q) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

식(23)을 구속을 받는 최적문제로서 Lagrange multiplier τ_1 을 도입하여 Lagrangian을 만들면 다음과 같다.

$$L_{pos} = 1/2 (q - q^*)^T \hat{M} (q - q^*) + \Phi^T \tau_1 = 0 \quad (24)$$

Lagrangian에 대해서 Kuhn-Tucker 필요조건은 다음과 같다.

$$\psi_{pos} = \begin{bmatrix} \psi_{p1} \\ \psi_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial L / \partial \beta \\ \partial L / \partial \tau_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{M}(q - q^*) + \Phi_q^T \tau_1 \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (25)$$

위 식은 비선형 연립방정식이므로 Newton-Raphson 방법으로 공식화하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \tau_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi_{p1} \\ \psi_{p2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

식(26)로부터 상대좌표는 다음과 같이 구한다.

$$q^{i+1} = q^i + \Delta q \\ \tau_1^{i+1} = \tau_1^i + \Delta \tau_1$$

6.2 속도해석

속도해석에서도 위치해석의 경우와 마찬가지로 가속도로부터 적분된 \dot{q}^* 이 주어졌을 경우 시스템에서 요구하는 속도 구속방정식을 만족하는 수정된 일반 속도 좌표 \dot{q} 를 다음과 같은 최적화 문제로 공식화하여 계산한다.

$$\text{Min. } 1/2(\dot{q} - \dot{q}^*)^T \hat{M}(q - q^*) \quad (27) \\ \text{s.t. } \dot{\Phi}(q, \dot{q}) = 0$$

식(27)의 Lagrangian을 구성하여 Kuhn-Tucker 필요조건을 사용하여 비선형 연립방정식을 만들면 다음과 같다.

$$\text{Lvel} = 1/2(\dot{q} - \dot{q}^*)^T \hat{M}(\dot{q} - \dot{q}^*) + \dot{\Phi}^T \tau_2 = 0 \\ \psi_{vel} = \begin{bmatrix} \psi_{v1} \\ \psi_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial L / \partial \dot{q} \\ \partial l / \partial \tau_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \hat{M}(\dot{q} - \dot{q}^*) + \Phi_q^T \tau_2 \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

식(28)은 \dot{q} 와 τ_2 에 대한 선형 대수방정식이다.

그러나 위치 해석에 있어서 LU분리했던 계수행렬을 계속 사용하기 위하여 Newton-Raphson방법을 적용하면 다음과 같은 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q} \\ \Delta \tau_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi_{v1} \\ \psi_{v2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

식(29)로부터 상대속도는 다음과 같이 구한다.

$$\dot{q}^{i+1} = \dot{q}^i + \Delta \dot{q} \\ \tau_2^{i+1} = \tau_2^i + \Delta \tau_2$$

6.3 가속도해석

가속도 식(22)의 선형 대수방정식을 풀면 얻어질 수 있으나, 위치와 속도해석에서 사용하였던 계수

행렬을 사용하기 위하여 Newton-Raphson방법으로 식을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{q} \\ \Delta \tau_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{a2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

식(30)로부터 상대가속도는 다음과 같이 구한다.

$$\ddot{q}^{i+1} = \ddot{q}^i + \Delta \ddot{q} \\ \tau_3^{i+1} = \tau_3^i + \Delta \tau_3$$

여기서, ψ_{a1} , ψ_{a2} 는 다음과 같다.

$$\psi_{a1} = \hat{M}\ddot{q} + \Phi_q^T \tau_3 - \ddot{Q}^A = 0 \\ \psi_{a2} = \ddot{\Phi} = \Phi_q \ddot{q} - \gamma^* = 0$$

적분 알고리즘을 이용하여 가속도와 속도를 적분하여 위치와 속도를 얻은 후 위치 해석으로부터 반복한다. 본 연구에서는 적분 알고리즘으로 Adams-Bashforth predictor Adams-Moulton corrector를 사용하고 있다.

6.4 수치 알고리즘

앞의 절에서 설명한 위치, 속도 그리고 가속도 해석을 computer program을 위한 알고리즘을 flow chart형태로 설명하면 다음과 같다.

6.4.1 위치 알고리즘

Step 1. 운동방정식에서 적분된 일반 좌표, q^* 와 계수행렬을 정의한다. ($i=0$)

Step 2. $A(p)$ 을 계산하고 이동 기저장체에 대하여 $G(p)$ 와 다음의 식으로 오일러 매개변수(p)를 normalize한다.

$$p^{i+1} = \frac{p}{\sqrt{p^T p}}$$

Step 3. 만약, $i \geq 1$ 면 p^{i+1} , A , G 를 계산한다. $i=0$ 이면 step 4로 간다.

Step 4. Φ_q 를 계산한다.

Step 5. 식(25)에서 정의한 비선형 연립방정식의 오른쪽 항, ψ_{p1} 와 ψ_{p2} 을 계산한다.

Step 6. 수렴여부를 조사한다. 즉, 만약 $|\psi_{p1}| + |\psi_{p2}| < \varepsilon$ 을 만족하면 return, 아니면 step 7로 간다. 여기서, ε 은 사용자가 정의하는 구속조건 위반 tolerance이다.

Step 7. 식(26)로부터 Δq , $\Delta \tau_1$ 을 계산하여 q , τ_1 를 update한다. 그리고 step 8로 간다.

Step 8. q^{i+1} , τ_1^{i+1} 을 가지고 step 3으로 간다. (i

=i+1)

6.4.2 속도 알고리즘

Step 1. 운동방정식에서 적분된 일반 속도좌표 \dot{q}^* 을 정의한다. 그리고 계수행렬은 위치해석으로 주어진다.

Step 2. 식 (29)에서 정의한 비선형 연립방정식의 오른쪽 항 ψ_{v1}, ψ_{v2} 을 계산한다.

Step 3. 수렴여부를 조사한다. 즉, 만약 $|\psi_{v1}| + |\psi_{v2}| < \epsilon$ 을 만족하면 return하고, 아니면 step 5으로 간다.

Step 4. 식 (29)로부터 $\Delta \dot{q}, \Delta t_2$ 를 계산하여 \dot{q}^{i+1}, t_2^{i+1} 를 계산한다. 그리고 step 5로 간다.

Step 5. \dot{q}^{i+1}, t_2^{i+1} 을 가지고 step 2으로 간다. (i = i+1)

6.4.3 가속도 알고리즘

Step 1. 일반 가속도 \ddot{q} 와 t_3 을 정의한다. 계수행렬은 속도해석과 같이 입력으로 주어진다.

Step 2. 식 (30)에서 정의한 비선형 연립방정식의 오른쪽 항 ψ_{p1}, ψ_{p2} 을 계산한다.

Step 3. 수렴여부를 조사한다. 즉, 만약 $|\psi_{a1}| + |\psi_{a2}| < \epsilon$ 을 만족하면 return, 아니면 step 5로 간다.

Step 4. $\ddot{q}^{i+1}, t_3^{i+1}$ 을 계산한다. 그리고 step 5로 간다.

Step 5. $\ddot{q}^{i+1}, t_3^{i+1}$ 을 가지고 step 2으로 간다. (i = i+1)

7. 시뮬레이션 예제

앞서 고찰한 상대이음좌표방법을 이용한 프로그램을 동적 시스템에 적용하여 검증하였으며 직교좌표 방법에 의한 해석과도 비교해 보았다. (예제 7.1, 7.2) 또한 참고문헌 (9)에서 해석적으로 유도된 운동방정식을 이용한 해석과도 비교하였다. (예제 7.3) 사용한 컴퓨터기종은 IBM RISC SYSTEM/6000이다.

7.1 궤도차량의 해석

개방회로시스템의 예제로써 Fig. 2와 같이 강제 13개, 회전조인트(revolute joint) 12개, 그리고 외력으로 torsion bar 6개, 유압장치(HSU) 6개, 그리고 지반으로부터 각 road arm assembly에 외력

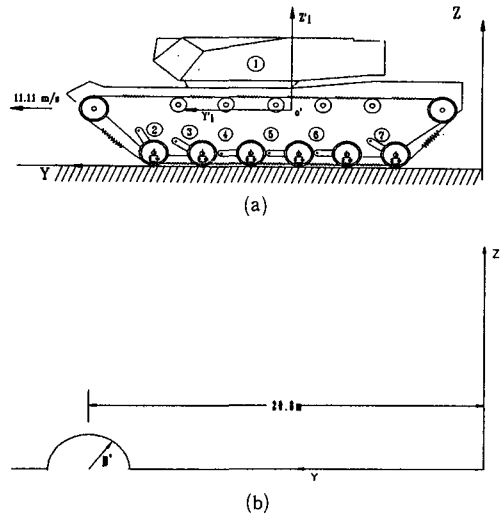
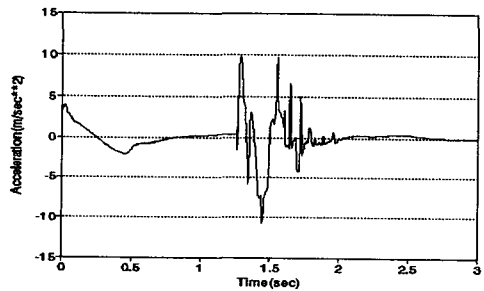
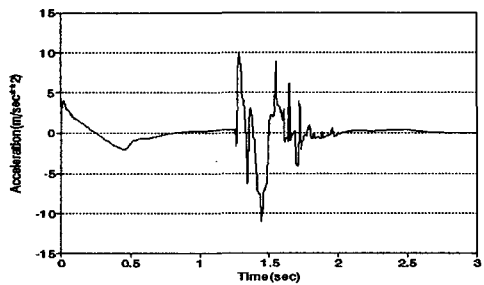


Fig. 2 (a) Track Vehicle model (b) Road surface profile



(a) Relative



(b) DADS

Fig. 3 Vertical acceleration of driver's seat

을 전달하는 궤도(track)로 이루어진 3차원 모델링하여 본 프로그램을 적용하여 보았다. 동적거동 환경은 초기속도 11 m/s로 진행시키고 진행방향에 대하여 20.8 m 지점에 반경 10" 범프를 통과할 때 운전석(강체 1의 국부좌표계 $x_1'-y_1'-z_1'$ 에 대하여 -0.2, 1.3, 0.1의 위치)에서의 수직 가속도를 상

Table 4 Comparison with DADS of example 1

	Relative joint coordinate method	DADS
Number of generalized coordinates	19	91
Number of constraints	0	60
CPU time(sec)	86.35	533.99

Table 5 Comparison with DADS of example 2

	Relative joint coordinate method	DADS
Number of generalized coordinates	5	28
Number of constraints	1	16
CPU time(sec)	0.86	4.76

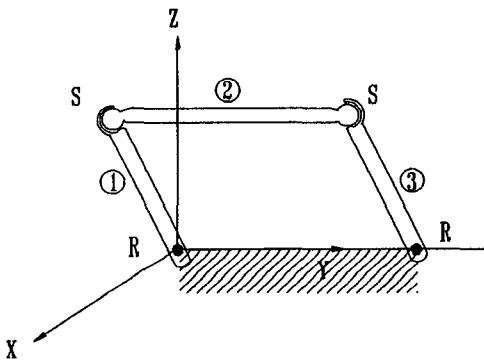


Fig. 4 RSSR mechanism model

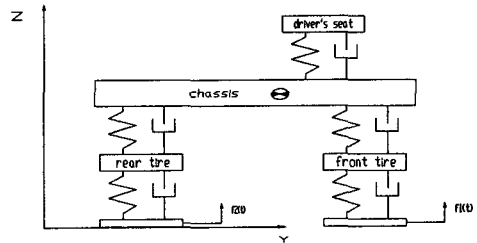


Fig. 6 Five degree of freedom vehicle model

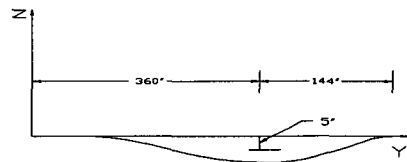
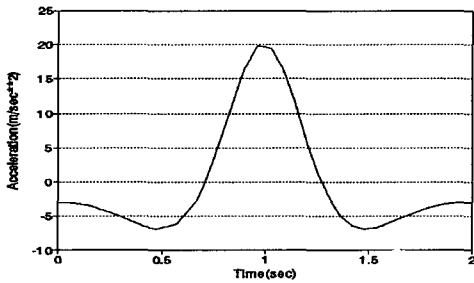
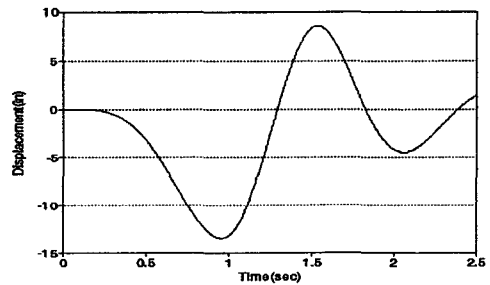


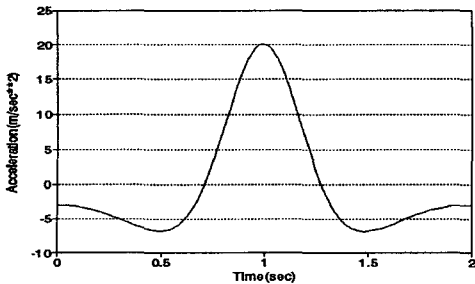
Fig. 7 Road surface profile



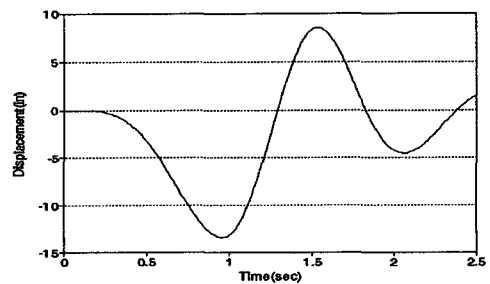
(a) Relative



(a) Analytic



(b) DADS



(b) Relative

Fig. 5 Vertical acceleration(zdd) of body 1

Fig. 8 Vertical displacement of driver's seat

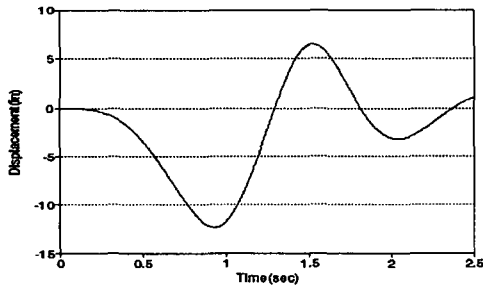
용 해석패키지인 DADS와 비교, 검증하였다. Fig. 3에 나타난 것과 같이 동적거동해석 경향이 잘 일치함을 알 수 있었으며, DADS와 본 프로그램 사이의 구속조건식 수, 일반좌표 수, 그리고 CPU time 등에 대한 비교가 Table 4에 나타나있다.

7.2 RSSR mechanism

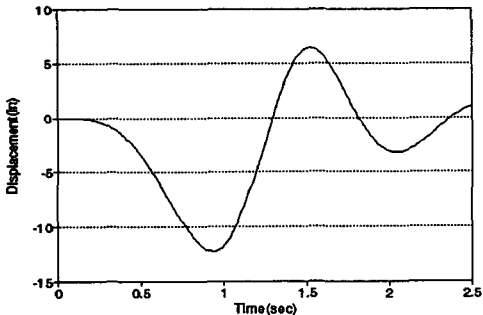
폐쇄회로시스템에 대한 예제로써 Fig. 4와 같이 강체 4개, 회전조인트(revolute joint) 2개, 그리고 구면조인트(spherical joint) 2개로 이루어졌으며 모든 강체의 질량은 1kg으로 하고, 강체 1과 3의 링크길이는 0.5m로 임의로 정하여 본 프로그램을 적용하여 보았다. 이 시스템의 경우 강체 2의 y'축 방향에 대한 회전은 수동 자유도로서 이 시스템의 운동에는 무관하다. 2초 까지 강체 1의 z방향에 대한 가속도를 DADS와 비교하였으며 Fig. 5에 나타난 것과 같이 동적 거동 해석 경향이 잘 일치함을 알 수 있었다. 그리고 DADS와 본 프로그램 사이의 구속조건식 수, 일반좌표 수, 그리고 CPU time 등에 비교가 Table 5에 나타나 있다.

7.3 Five degree of freedom vehicle model

Fig. 6과 같이 차체와 운전석, 전륜 그리고 후륜



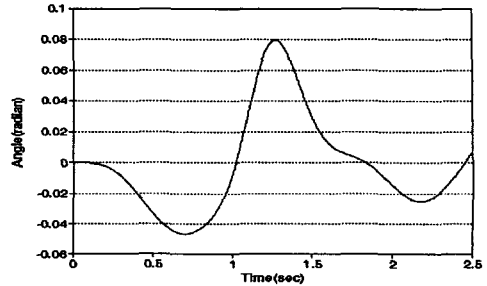
(a) Analytic



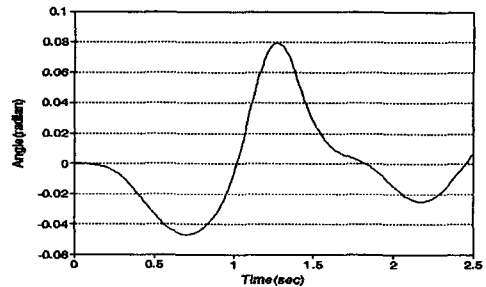
(b) Relative

Fig. 9 Vertical displacement of chassis

부분을 병진조인트로 연결시키고 스프링-댐퍼-작용기를 부가한 차량 모델이 Fig. 7과 같은 road profile을 450 in/sec로 통과할 때 차체와 운전석,

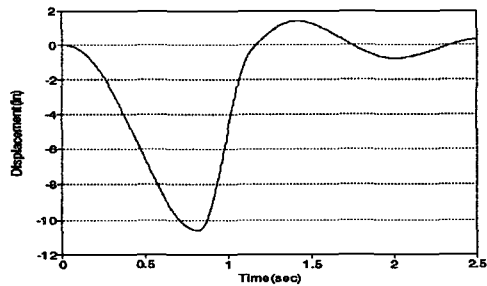


(a) Analytic

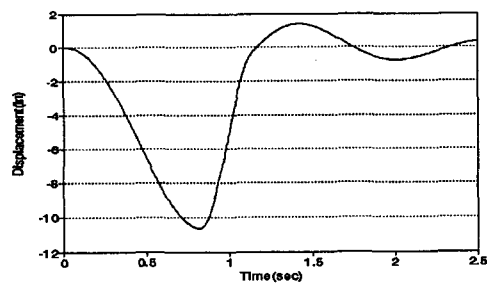


(b) Relative

Fig. 10 Pitching angle of chassis



(a) Analytic



(b) Relative

Fig. 11 Vertical displacement of front wheel

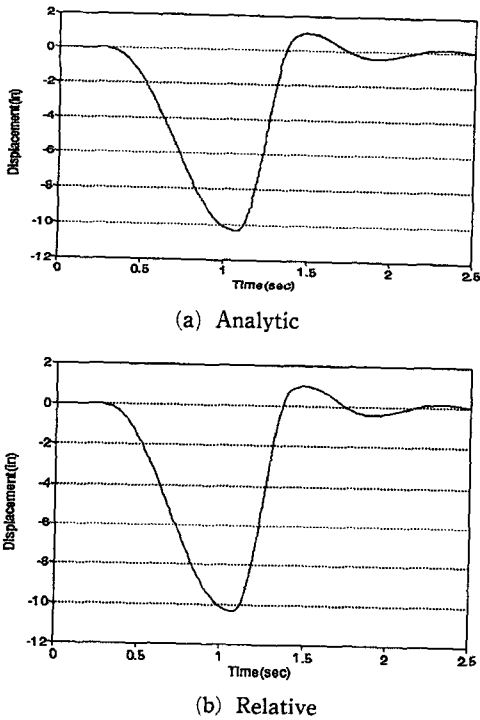


Fig. 12 Vertical displacement of rear wheel

전륜 및 후륜의 상대변위를 해석적으로 지배방정식을 유도하여 두 해석결과를 비교하여 보았으며, 본 프로그램을 이용하여 차체와 운전석, 전륜 및 후륜의 상대변위를 2.5초까지 Fig. 8, 9, 10, 11, 12에 나타내었다. 이 때의 CPU time은 5.18초이다.

8. 고찰 및 결론

첫째, 상대이음좌표방법을 사용하여 일반적인 특성 해석용 computer program을 코딩하였으며, 이를 동적 시스템에 적용하여 시스템의 동적거동해석을 수행하고 상업용 해석패키지(DADS) 또는 참고문헌을 이용하여 본 프로그램의 비교, 검증하였다. 그리고 CPU시간에 있어서도 5~6 배 정도가 적교좌표방법(DADS)에 비하여 효율적임을 알 수 있었다. 본 프로그램이 CPU시간이 빠른 이유는 위치, 속도 그리고 가속도해석에서 동일한 계수행렬로써 유도였고 Newton-Raphson iteration대신 quasi-Newtoniteration을 사용하여 가능한 반복회수를 줄였기 때문이라고 생각할 수 이삼.

둘째, 각 예제에 대한 해석결과의 경향은 잘 일치하지만 Fig. 5에서와 같이 가속도 곡선이 smooth

하지 않는 것은 시뮬레이션에서 규정된 time step이 본 프로그램과 DADS와 정확하게 일치하지 않고 시스템이 stiff한 요소에 의해 영향을 받지 않기 때문에 해의 수렴이 DADS보다 빠르기 때문으로 본다. 만약 해석 stepsize을 더 작게하여 시뮬레이션을 하게 되면 정확한 곡선을 얻을 수 있다.

셋째, DAES(algebraic-differential equations)해법으로써 미분방정식을 적분할 때 이완된 구속 조건식을 직접 constraint manifold로 투영하는 최적 문제로 공식화하였다.

넷째, 앞으로의 연구방향은 프로그램의 일반성을 위하여 해석모듈의 완전한 구성(cut constraint, force element의 확장 등)과 좀더 나아가 병행처리 기법을 이용하여 simulation시간을 단축시키는 연구가 수행되어야 한다.

후 기

본 연구는 국방과학 연구소의 기초 연구비 지원(과제번호 ADD-90-5-009)에 의해 수행중인 연구의 일부이며 이에 감사의 뜻을 포함합니다.

참고문헌

- (1) Strang, G., 1980. *Linear Algebraic and Its Application*, 2nd Edition, Academic Press, New York.
- (2) Haug, E. J., 1989, *Computer Aided Kinematics and Dynamics*, Vol 1: Basic Methods, Allyn and Bacon, Boston.
- (3) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I, Open Loop Systems," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, No. 3, pp. 359~382
- (4) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, 88, "A recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II, Closed Loop Systems," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, No. 4, pp. 481~506
- (5) Tsai, F. F. and Haug, E. J., 1989, "Automated Methods For High Speed Simulation of Multibody Dynamic Systems," *Technical Report R-47*, The University of Iowa.

- (6) Potra, F. A., 1991, "Multistep Method for solving Constrained Equations of Motion," *Ctr. for Simulation and Design Optim. of Mech. System, Technical Report R-104*. Univ. of Iowa.
- (7) Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., 1985, *Graph Theory with Applications*, Americal Elsevier Publishing Co., Inc.
- (8) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1985, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations," *Transanction of the ASME*, Vol. 108, pp. 176~182
- (9) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, Inc.
- (10) Atkinson, K. E., 1988, *An Intraduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- (11) Dijkstra, E. W., 1959, "A Note on Two Problems in Connection with Graphs," *Numerishe Mathematik*, Vol 1, pp. 273~274