# 복합재료 적층판의 고차이론의 검토

조 맹 효

# Review on Higher Order Laminated Composite Plate Modelings

Maenghyo Cho

● 조맹효(인하대 항공우주공학과)
● 1962년생
● 판과 셸이론, 구조역학, 복합재료 등을 전공하였으며, 동분야에 관심을 가지고 있다.

## 1. 머리말

복합재료가 점차 최근에 항공기에서 이차적인 구조요소에서 일차적으로 힘을 받는 구조물에 사용됨으로써 두꺼운 복합재료 구조판과 셸의 정확한 동적, 정적거동을 예측하는 것이 중요한 문제가 되었다. 특히 전산구조역학의 한 분야로서 복합재료 적층판의 문제는 inhomogeneity와 anisotropy 문제를 가지고 있어서 복잡하며 일차구조(primary structrue)에서는 100장~200장의 적층도 드물지 않게 볼 수 있어서 정확한 계산을 위해서는 방대한 기억용량과 빠른 계산속도를 요구한다. 그러므로 복합재료 적층판의 거동을 정확하고 값싸고 빠르게 계산할 수 있는 이론과 수치방법의 개발이 중요한 문제이다.

이 문제는 E. Reissner,[1] R. K. Kapania & S. Raciti,[2,3] A. K. Noor & W. S. Burton,[4] L. Librescu & J. N. Reddy,[5] J. N. Reddy[6] 등에 의해서 review가 행하여졌고 이 분야의 모든 paper들의 비교적 현재까지 연구동향을 잘 묘사하고 있다. 여러 review paper들이 시간흐름상으로 여러 연구들을 잘 정리하고 있으므로 이 글에서는 논문들을 다시 review하는 것이 아니라 지난 20여 년간 이 분야에서 계속되어 온 연구중 주요한 것을 고찰하고 소개하는 것을 그 목적으로 한다.

## 2. 복합 적층판 이론들의 분류

복합재료 적층판의 이론들을 모두 도식적으로 분류할 수는 없다. 그러나 대체로 다음 두 갈래로 분류할 수 있다.

- 판이론 접근방식의 고차이론
- 유한요소 개발을 염두에 둔 삼차원 탄성론에서부터의 접근방법

어떤 적층판 이론들은 처음부터 유한요소의 개발을 염두에 두고 만들어졌기 때문에 이런 이론은 이론자체는 크게 의미가 없고, 수치적인 적용자체가 중요하다. 주로 3차원 이론과 층마다 다른 종속변수를 가정한 판이론이 이 범주에 속한다.

### 2.1 2차원 판이론 접근 방식의 고차 이론

판이론 접근방법의 고차이론은 표 1에서 보듯이 세 가지 이론으로 다시 소분리할 수 있다.

#### 2.1.1 다항식에 기초한 고차이론

Polynomial-Based-Theory는 원래 두꺼운 등방성 판에서 출발한 개념을 여과없이 그대로 복합재료판에 적용한 이론들이다. 이 이론들은 고차이론이라 해를 구하는데 계산량이 많기는 하나 해를 구하는 과정자체는 단순하다. 이 이론들은 두께에 대한 다항식의 차수를 높힘으로써 쉽게 정확도를 높힐 수 있으나 일반적으로 3차까지만 쓰이고 있다. 4차 이상의 전개는 불필요할 정도로 많은 계산량을 포함하고 있고 노력에 비해 얻어지는 것은 매우 미미한 정도이기 때문이다. 이 이론은 잘 알려진 바와 같이 1차전단변형이론(Mindlin과 Reissner에 의해 처음 적용되었던)에서부터 출발하고 그 발달과정은 표 2에 나타나 있다. 표에서 보듯이 면의 수직변위의 고차항은 판의 휨문제의 해의 정확도를 향상시키는데 수치적으로 기여하는 정도가 적다. 점근해법(asymptotic analysis method)을 통해서 본다면 정성적으로는 중요하나 수치해에서는 중요한 성분으로 나타나지 않는다.

이 고차이론은 연속적으로 변화하는 면내변위를 가지므로 기하학적인 연속조건은 잘 만족하나 횡전단변형률(transverse shear strain)이 연속으로 변화하기 때문에 층마다 서로 다른 전단변형률을 가지는 복합적층판

표 1 고차이론 분류

| | |
|---|---|
| 다항식 전개 고차이론<br>(Polynomial-Based-Theory) | 두꺼운 등방성 판에 대한 고차 이론의 직접적인 확장 |
| 층으로 세분화된 고차이론<br>(Discretized Layer Theory) | 각 층마다 종속 변수를 가정.<br>정확하나 계산이 많음. |
| 단순화된 고차이론<br>(Simplified Higher Order Layer Theory) | 변형장과 응력장의 연속 조건을 층간에서 적절히 가정.<br>종속 변수의 수가 작고 결과가 정확함. |

표 2 다항식에 기초한 고차이론

| | | |
|---|---|---|
| Reissner[7] | $u_\alpha = u_\alpha^0 + z\psi_\alpha$<br>$w = w^0$ | 전단수정계수 필요<br>횡전단 변형 효과 |
| Naghdi,[8] Essenburg[9]<br>Whitney & Sun[10] | $u_\alpha = u_\alpha^0 + z\psi_\alpha$<br>$w = w^0 + z\psi_z + z^2\xi_z$ | 전단수정계수 필요<br>횡방향 변형률 효과 |
| Nelson and Lorch[11] | $u_\alpha = u_\alpha^0 + z\psi_\alpha + z^2\xi_\alpha$<br>$w = w^0 + z\psi_z + z^2\xi_z$ | 보다 낮은 차수의 이론에 비해 큰 이점은 없다 |
| Reissner[12] | $u_\alpha = z\psi_\alpha^0 + z^3\phi_\alpha$<br>$w = w^0 + z^2\psi_z$ | 탄성해와 비교시 매우 정확<br>면내 변형의 영향을 무시 |
| K. H. Lo<br>R. M. Christensen<br>E. M. Wu[13] | $u_\alpha = u_\alpha^0 + z\psi_\alpha + z^2\xi_\alpha$<br>$+ z^3\phi_\alpha$<br>$w = w^0 + z\psi_z + z^2\xi_z$ | 면내 변형과 처짐의 영향<br>모두 고려<br>매우 정확하지만 보다 복잡함 |

의 경우 전단응력의 연속조건은 만족하지 못한다. 그러므로 전단응력을 계산하면 정확도가 많이 떨어진다. 이는 등방성 판에 적용되었던 고차이론을 아무런 여과없이 그냥 복합재료 적층판으로 확장시켰기 때문에 발생한 문제이다. 복합재료 적층판의 효율적인 해석을 위해서는 등방성 판이론의 직접적인 확장 대신 새롭고 좋은 발상이 필요하다고 하겠다.

### 2.1.2 층으로 세분화된 고차이론

Seide[14]와 Srinivas[15] 등은 복합재료 적층판의 거동이 등방성 판의 거동과는 다르다는 점을 인식하고 층마다 서로 다른 독립적인 자유도를 갖는 이론이 필요하다고 보고 이론을 전개했다. 처음 이론이 나왔을 때는 디지털 컴퓨터의 계산속도 및 용량이 대단하지 않아 크게 주목받지는 못했다. 그러나 요즘은 컴퓨터의 능력이 급격히 커짐에 따라 그 힘을 최대한으로 이용하는 것이 가능하게 되어 Reddy[16]가 변위에 기초한 layerwise 이론을 개발했고 Toledano와 Murakami[17]는 Reissner가 제안한 대로 변위와 전단응력을 독립적으로 각 층마다 종속변수로 사용하고 Reissner[18]의 혼합변분원리(mixed variational principle) 하에서 이론을 전개했다. 정확도는 Toledano[17]의 방법이 Reddy[16]보다 좋으나 혼합변분법을 사용하는 계산상의 번거로움 때문에 정식화가 간단한 Reddy의 방법이 더 선호되고 있다.

### 2.1.3 단순화된 고차이론

단순화된 고차이론의 효시로 여러 사람이 주목될 수 있으나 가장 두드러진 사람은 Levinson[19]이다. 그는 3차로 변하는 면내변위장을 가정하고 판의 위·아래면에서 무전단응력 상태를 가정함으로써 처짐과 중앙면의 회전각으로만 표시되는 단순화된 면내변위를 얻었다. 그러나 그의 평형방정식은 변분법과 불일치하는 1차전단변형의 판이론과 일치함으로 Reddy[20]로부터 논쟁을 불러일으켰다. 비록 Richter[21]의 hypercicle정리로부터 유도된 오차분석에 의해 Levinson[19]의 이론이 타당한 것으로 입증되었지만 이 면내변위에 입각한 유한요소의 개발의 견지에서 변분법으로 일치하는 Reddy[20]의 이론이 주목을 받게 되었다. 이런 매끈하게 변하는 면내변위로부터 출발하는 이론과는 별도로 DiSciuva[22~24]는 지그재그로 변하는 면내변위로부터 전단응력이 층의 경계면에서 연속적으로 변한다는 가정을 도입하여 단순화된 지그재그 1차변형이론을 개발했다. 그의 결과는 대칭적층배열의 판에 대해서는 상당히 정확한 결과를 보여주었다. 이런 두 가지 단순화된 이론을 합성하는 작업은 Cho와 Parmerter[25,26]에 의해 행해졌다. 이 지그재그로 3차로 변하는 면내변위는 기하학적인 연속조건뿐 아니라 판의 두께를 통해 전단응력의 모든 연속조건을 만족하며 단지 종속변수는 처짐과 중앙면의 회전각으로만 표시되어 현재까지 같은 수의 종속변수를 갖는 이론중 가장 정확한 것으로 보여진다. 이 단순화된 고차이론과 층으로 세분된 고차이론의 장단점은 다음절에서 다룬다.

### 2.1.4 예측-보정방법과 후처리기 방법

이상에서 보여진 여러 가지 고차이론이 계산상의 복잡함으로 인해 보다 효율적인 다른 방법이 추구되었다. 이 절에서 기술되는 방법들은 이론이라고 하기보다는 효율적인 판의 응력해석기법들이다.

먼저 Noor와 Burton[27]에 의해 제시된 예측-보정법(predictor-corrector)방법이 있다. 1차 전단변형이론을 시발점으로 미지수들(처짐과 회전각)을 구한 후 전단변형에너지를 보정함으로써 그리고 전단응력을 평형 방정식의 면내응력을 적분함으로써 얻어 정확한 응력상태를 예측하는 방법이다. 이 방법은 해석적으로 상당히 성공을 거두고 있으나 FEM으로 적용했을 때는 각 격자마다 전단수정계수를 반복적으로 계산해야 하는 번거

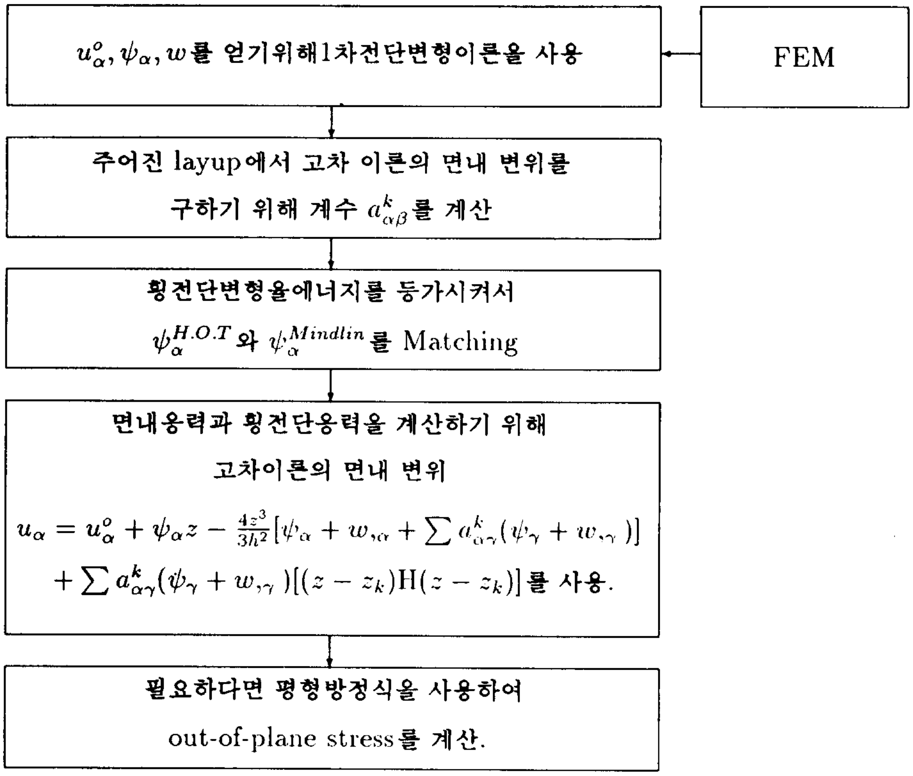


그림 1 후처리기 방법의 계산 흐름도

로움이 있고 실제로 경계근처에서 좋은 수렴해를 보여주지 못하는 단점이 있다. 그러나 이런 단점들이 극복되면 상당히 효율적인 기법으로 자리잡으리라 생각된다.

둘째 Cho와 Kim[28]에 의해 제시된 후처리기 방법이 있다. 이는 1차 전단변형이론으로부터 구해진 회전각을 전단변형에너지 등가식으로부터 Cho[25]의 이론의 회전각과 관계를 구하고 고차이론의 면내변위로부터 수정된 응력들을 계산하는 방법이다. 계산의 흐름도는 그림 1에 주어졌다.

대칭 cross-ply의 경우에 정확한 해를 구할 수 있었고 단지 1차 전단변형이론의 해만 필요하므로 $C_o$ isoparametric 유한 요소 개발도 용이하다. 일반적인 적층배열로 확장만 될 수 있다면 간편하고 정확한 기법으로 쓰일 수 있으리라 판단된다.

## 2.2 3차원 탄성론에서부터의 접근방법

3차원 탄성론에 기초한 이론들은 대부분 유한요소 개발을 염두에 둔 것들이다. 변위에 기초한 유한요소는 응력을 정확하게 예측하는데 어려움이 있으므로 hybrid 요소가 주로 개발 연구대상이었다. 이 요소들은 3차원 탄성론에 기초하므로 mesh를 세분함으로써 형식상 정확한 3차원 해에 수렴할 것이다. 너무나 많은 미지수를 가지므로 계산량과 기억용량이 너무 많이 필요하다. 이 3차원 해석은 Liou와 Sun,[29] 그리고 Rao[30] 등에 의해 행해졌다.

## 2.3 고차이론에 기초한 유한요소 개발 상황

고차 이론에 기초한 유한요소의 분류는 표 3에 간단히 주어졌다.

표 3 판이론에 기초한 유한요소의 분류

| | |
|---|---|
| $C_0$ 요소 | ●매끈하게 변하는 면내 변위를 가지는 이론에 기초한 변위에 토대를 둔 유한요소.<br>●층간 세부 고차이론에 토대를 둔 변위에 기초한 유한요소.<br>●단순화된 고차이론에 토대를 두었으나 $C_1$ 요소 대신 고차 합 모멘트를 주 종속변수로 도입한 혼합 유한 요소. |
| $C_1$ 요소 | ●단순화된 고차이론에 기초한 직사각형 요소.<br>●단순화된 지그재그 1차 이론에 기초한 직사각형 요소.<br>●단순화된 3차 지그재그 이론에 기초한 일반적인 삼각형 요소.<br>●$C_1$ 요소중 판이 얇아짐에 따라 생기는 전단 locking현상을 막기 위해 수정된 유한요소에 대한 삼각형, 사각형 요소. |

### 2.3.1 고차이론의 변위에 기초한 유한 요소법

1차 전단변형이론에 기초한 Mindlin판의 유한요소는 isoparametric이므로 성질이 잘 알려져 있다. 물론 shear locking현상과 다른 여러가지 문제들이 오랜 동안 연구대상이었지만 대체로 널리 쓰이고 있는 범용요소이다. 면내변위를 2차 혹은 3차까지 전개한 이론들[8~13]은 종속변수의 1차 미분값만이 에너지 범함수에 나타나므로 $C_o$ isoparametric 유한요소를 개발할 수 있고 쉽게 유한요소 코드에 형상함수 루틴으로 모듈화될 수 있다. 그 반면 단순화된 고차이론(simplified higher order theory)에 토대를 둔 유한 요소들[22,31~34]은 층간 전단응력의 연속조건을 사용하는 경우, 또 판의 윗면과 아랫면에서의 무전단응력 상태를 만족시키는 경우에 처짐의 2차 미분값이 변형에너지 범함수에 나타나므로 형상함수는 $C_1$ 연속조건을 만족해야만 한다. 일반적인 모양의 삼각형이나 사각형에서 이 조건을 만족시키기는 어렵다. 그러므로 여러가지 불일치 요소들이 개발되고 있고 그 중 Cho[34]의 삼각형 요소는 일반적인 형태를 가진 모양의 판 구조물에 대해서도 적용될 수 있는 요소이며 패치시험(patch test)도 통과하는 요소이므로 단순화된 고차이론에서 이와 같은 형태의 요소 개발 연구가 수행되어야 하고 여러 경우에 대해서 좋은 효율을 가지며 mesh변화에 대해서도 민감하지 않는 $C_1$ 형상함수의 개발이 필요하다고 사료된다.

이에 반해서, $C_o$ isoparametric 형상함수로서 layerwise 이론에 적용할 수 있는 유한요소가 Reddy와 Barbero,[35] Robbins와 Reddy[36]에 의해 개발되었다. 층의 갯수가 많아지면 종속변수가 엄청나게 증가한다는 계산상의 단점에도 불구하고 $C_o$ 유한요소라는 매력에 의해 유한요소로서 정확한 계산이 요구될 때 드물지 않게 쓰이고 있다. 이 요소의 장점은 적층수에 비례하는 종속 변수를 가지므로 자유단의 층간응력(free edge interlaminar stress)도 평형방정식을 적분함으로써 상당히 정확히 얻을 수 있다. 반면, 단순화된 고차이론[24,25]은 자유단에서의 층간 응력이 고전적인 판이론에서 얻어지는 값과 같은 정도의 정확도 밖에 갖지 못한다. 이는 적은 수의 종속변수로 근사한 이론이므로 판의 경계에서 발생하는 경계층에서의 해는 정확하게 예측하지 못하기 때문이다. 그러므로 전반적으로 전체적인 판의 거동이나 응력 해석에서는 단순화된 고차이론이 장점이 있으나 실제 3차원 현상인 층간 전단응력등의 예측에서는 단순화된 고차이론보다 계산량이 많아 비경제적이기는 하나 3차원 탄성이론에 기초한 유한요소보다는 효율적인 layewise 이론이 적합하다고 할 수 있다.

그러나 이 이론을 무작정 많은 수의 층을 갖는 문제에 적용하는 것은 비효율적이다. 그러므로 국지적으로 정확한 응력분포가 요구되는 지역에만 이 요소를 사용하고 다른 곳은 1차 전단변형 요소 또는, 단순화된 고차이론에 기초한 요소를 사용하는 전체-국소 방법(global-local approach)이 효과적이다. 최근에는, 특히 관심이 있는 지역에서 이미 형성된 격자와 무관하게 세밀한 격자를 이중적으로 배치하는 방법이 Fish[37,38]에 의해 개발되었다. 특히 좁은 영역에서 응력이 급격히 변하는 문제에 적용하기 좋은 이 방법은 S-Refinement라고 불려진다. 전체 강성행렬의 대각밴드가 커져서 해를 구하는데 시간과 기억용량이 많이 들긴 하지만 전체행렬을 쪼개서 푸는 partition방법을 도입하면 대각밴드가 작은 두 개의 선형방정식을 풀게 되므로 효율적이다. 여러가지 복잡한 외력과 경계조건, 기하학적인 조건하에서 복합재료 적층평판의 보다 정확한 해석을 위해 이 S-Refinement는 보다 많이 개발되고 적용 사용되야 할 것으로 기대된다.

### 2.3.2 고차이론에 기초한 혼합/하이브리드(Mixed/Hybrid) 유한요소법

고차이론이 개발된 원래 목적이 보다 정확히 응력과 변위를 예측하기 위한 것이라면 유한요소도 이와 같은 흐름속에서 개발되어야 할 것이다. 일반적으로 같은 mesh 하에서 mixed/hybrid method가 변위에 기초한 유한요소법보다 응력이 보다 정확하게 구해진다고 알려져 있다. 그러므로 유한요소법중에서 mixed/hybrid 방법은 자연스러운 선택 중 하나라고 보여진다. 특히 복합적층판의 경우 파괴현상이 층간분리에 의해 지배되는 경우가 많으므로 층간 전단응력의 정확한 예측은 무척 중요하다. 그러므로 층간 전단응력을 독립적인 종속변수로 취급하는 것도 당연한 고려라 하겠다. Rao[39] 등은 Toledano와 Murakami[40]에 의해 제시되었던 이론의 혼합 유한요소를 개발하였다. 기대했던 대로 상당히 정확한 응력을 제공하고 있다. Jing[41] 등은 hybrid 요소를 고차이론에 토대를 두고 개발했다. 단순화된 고차이론중 하나인 Cho의 유한요소[34]나 세분화된 고차 이론 Reddy[35]와 비슷한 정도의 정확도를 갖는 응력상태를 보여준다. 앞서 언급한 생각의 흐름으로서는 복잡한 mixed/hybrid 요소 개발이 정당화될 수 있으나 요소개발의 복잡성과 얻어진 결과를 고찰하면 변위에 토대를 둔 상용의 유한요소법이 더 간편하고 비슷한 정밀도를 갖고 있음을 알 수 있다. 그러므로 이런 특유한 유한요소들은 더 연구발전되어야 하겠지만 최근 연구방향에서 조금 떨어져 있는 것같이 생각된다. 그러므로 이 절에서 기술되었던 mixed/hybrid 요소가 실제로 적층판을 해석하는데 어떤 점에서 변위요소법보다 우월한지에 대한 연구가 선행되어야 할 것으로 믿는다.

### 2.4 경계조건에 관한 고찰

지금까지 소개한 여러가지 고차이론과 유한 요소법은 면내변위의 고차항을 적절히 고려함으로써 얻어졌다. 이 이론들은 3차원 탄성론의 해에 얼마나 접근하느냐에 따라 정확도를 평가받았다. 그러나 3차원 탄성론 또는 2차원 탄성론의 일반 해석해를 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. Pagano는 원통형 휨문제(cylindrical bending problem)의 정확한 탄성해와 3차원 단순지지 평판의 휨문제에 대한 해를 제공함으로써 여러 판이론의 검증 문제를 제시했다. 그래서 수많은 고차이론들의 해가 Pagano[42,43]의 탄성해와 비교되어 왔다. 그러나 Pagano의 탄성해는 단지 단순지지 경계문제로 국한된다. 그런데 이 단순지지 경계는 경계층문제를 야기하지 않는다. 그러므로 점근적 해석의 견지에서 보면 단지 내부해(interior solution)만으로 이 단순 지지 경계문제는 해결된다. 경계해(layer solution)는 이 문제에 아무 영향이 없는 것이

다. 결국 Pagano[42,43]의 탄성문제는 고차 판 이론의 변분법적으로 얻어지는 경계조건에 대해서는 아무런 판단도 내릴 수 없게 하는 문제인 것이다.

최근 Duva & Simmonds[44]는 외팔보의 진동문제로 내부해의 고차항보다 경계조건의 정확성이 더 해에 영향을 미침을 점근해석을 통해서 보여주었다. 따라서 복합적층판의 경계문제는 보다 심각하게 취급되어야 할 문제이다. 우리는 변분법에서 얻어지는 경계 조건이 점근적으로 올바른 경계조건이라는 아무런 보장도 가지고 있지 못하다. Gregory와 Wan[45,46]에 의해 처음으로 제안되었던 감쇠상태 해법이 적층판에 대해 Cho[47]에 의해 적용되었다. 점근해법과 감쇠상태 해법과 2차원, 3차원 유한요소 해법으로 점근적으로 정확한 경계조건을 각 고차이론에 대해서 구해나는 작업이 앞으로 흥미있는 기초연구가 될 것으로 기대된다.

## 3. 맺음말

지금까지 복합적층평판에 대한 여러가지 고차이론들과 유한요소법들을 살펴보았다. 단순화된 고차이론이 많은 수의 적층에 대해 비교적 쉽고 경제적으로 응력과 변형 등을 예측할 수 있는 반면 실제경계에서의 3차원적인 응력상태를 예측하기가 어려운 것으로 평가되었다. 한편, 층간 세부 고차이론은 많은 수의 종속변수를 가지고 있기 때문에 많은 수의 적층문제에 직접적으로 적용하기에는 매우 비효율적이나 경계에서의 3차원 응력상태는 상당히 정확히 예측할 수 있는 것으로 평가된다. 그러므로 전체-국지(global-local)해석방법을 사용하여 층간 세부이론을 적용하는 것이 실제 복잡한 3차원 응력상태를 해석하는 효율적인 방법으로 생각된다. 특히 복합재료 적층판의 경우 S-방법 세분화가 매우 효과적인 세분법으로 판단되었다. 예측-보정법(predictor-corrector method)이나 후처리기법(post-processor method) 등과 같은 새로운 방법도 계속 시도·발전되어 나아가야 할 방향으로 생각된다.

끝으로 경계조건의 연구가 복합재료적층판 구조에서 심도있게 진행돼 나아가야 할, 간과되어서는 안 될 중요하고도 어려운 부분이라는 점을 지적하고 싶다.

## 참고문헌


(1) Reissner, E., 1985, "Reflection on the Theory of Elastic Plates," *App Mech Rev,* Vol. 38, No. 11, pp. 1453~1464.

(2) Kapania, R. K. and Raciti, S., 1989, "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part I : Shear Effects and Buckling," *AIAA J,* Vol. 27, No. 7, pp. 923~934.

(3) Kapania, R. K. and Raciti, S. 1989, "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part II : Vibration and Wave Propagation," *AIAA J*, Vol. 27, No. 7, pp. 935~946.

(4) Noor, A. K. and Burton, W. S., 1989, "Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates," Vol. 42, No. 1, pp. 1~12.

(5) Librescu, L. and Reddy, J. N., 1989, "A Few Remarks Concerning Several Refined Theories of Anisotropic Composite Laminated Plates," *Int. J. Engng Sci*, Vol, 27, No. 5, pp. 515~527.

(6) Reddy, J. N., 1993, "An Evaluation of Equavalent-Single-Layer and Layerwise Theories of Composite Laminates," *Composite Structures,* Vol. 25, pp. 21~35.

(7) Reissner, E., 1945, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 12, pp. A69~A77.

(8) *Naghdi, P. M., 1957, "On the Theory of Thin Elastic Shells," Quarterly of Appl. Math.*, Vol. 14, pp. 369~380.

(9) Essenburg, F., 1975, "On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams with Surface Constrains," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 42, No. 1, pp. 127~132.

(10) Whitney, J. M. and Sun, C. T., 1974, "A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 41, No. 2, pp. 471~476.

(11) Nelson, R. B. and Lorch, D. R., 1974, "A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 41, No. 1, pp. 177~183.

(12) Reissner, E., 1975, "On Transverse Bending of Plate, Including the Effect of Transverse Shear Deformation," *Int J. of Solid Struct.*, Vol. 11, pp. 569~573.

(13) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M., 1977, "A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part I : Homogeneous Plates, Part II : Laminated Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 663~676.

(14) Seide, P., 1980, "An Improved Approximate Theory for the Bending of Laminated Plates," *Mechanics Today*, Vol. 5, pp. 451~465.

(15) Srinivas, S., 1973, "A Refined Analysis of Composite Laminates," *J. Sound Vib.*, Vol. 30, No. 4, pp. 495~507.

(16) Reddy, J. N., 1987, "A Generalization of Two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates," *Comm. Appl. Numerical Method*, Vol. 3, pp. 173~180.

(17) Toledano, A. and Murakami, H., 1987, "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 181~189.

(18) Reissner, E., 1984, "On a Certain Mixed Variational Principle and a Proposed Application," *Int. J. for Nume. Meth. in Eng.*, Vol 20, pp. 1366~1368.

(19) Levinson, M., 1980, "An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates," *Mech, Res. Comm.*, Vol. 7, pp. 343~350.

(20) Reddy, J. N., 1984 "A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745~752.

(21) Richter, Z., 1987, "A Sixth-order Plate Theory-derivation and Error Estimates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 275~279.

(22) Diuciuva, M., 1986, "Evaluation of Some Mltilayerd, Shear-deformable Plate Element," *Computer & Struc.*, Vol. 24, No. 6, pp. 845~854.

(23) DiSciuva, M., 1987, "An Improved Shear-deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells & Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 589~596.

(24) DiSciuva, M., 1986, "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluation of a New Displacement Model, *J. Sound Vib.*, Vol. 105, pp. 425~442.

(25) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos Struc.*, Vol. 20, pp. 113~123.

(26) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1993, "Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations," *AIAA J.*, Vol. 31, No. 7, pp. 1299~1306.

(27) Noor, A. K. amd Burton, W. S., 1990, "Stress & Free Vibration Analysis of Multilayered Composite Plates," *Compos Struc.*, Vol. 14, pp. 233~265.

(28) Cho, M. and Kim, J., 1994 "고차이론 변위장을 이용한 복합재료 적층판의 응력 계산법," 항공경영관리 연구소 연구지, 11 집.

(29) Liou, W. J. and Sun, C. T., 1987, "A Three-dimensional Hybrid Stress Isoparametric Element for the Analysis of Laminated Composite Plates," *Computer & Structures*, Vol. 25, pp. 241~249.

(30) Rao, K. M. and Meyer-Piening, H. R., 1991, "Analysis of Sandwich Plates Using a Hybrid-stress Finite Element," *AIAA J.*, Vol. 29, pp. 1498~1506.

(31) Putcha, N. S. and Reddy, J. N., 1986, "A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for the Nonlinear Analysis of Laminated Plates," *Computer & Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 529~538.

(32) Phan, N. D. and Reddy, J. N., 1985, "Analysis of Laminated Composites Using a Higher-order Shear Deformation Theory," *Int. J. of Nume. Meth. in Eng.*, Vol. 21, pp. 2201~2219.

(33) Reddy, J. N. and Khdeir, A. A., 1989, "Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories," *AIAA J.*, Vol. 27, No. 12, pp. 1808~1817.

(34) Cho, M. and Parmeter, R. R., 1992, "A Displacement-approached Composite Plate Bending Finite Element Based on Efficient Higher Order Theory," *33rd SDM Conference, AIAA Paper 92~2355*, Appear at *AIAA J.*

(35) Reddy, J. N. and Barbero, E. J., 1989, "A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminate Plate Theory," *Int. J. Nume. Meth, in Eng.*, Vol. 28, pp. 2275 ~2292.

(36) Robbins, D. H. and Reddy, J. N., 1993, "Modeling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory," *Int. J. Nume. Meth. in Eng.*, Vol. 36, pp. 655 ~677.

(37) Fish, J., 1992, "The S-Version of the Finite Element Method," *Computer & Structures*, Vol. 43, No. 3, 539~547.

(38) Fish, J., S-Markolefas, 1992, "The S-Version of the Finite Element Method for Multilayered Laminates," *Int. J. Nume. Meth. in Eng.*, Vol. 33, pp. 1081~1105.

(39) Rao, K. M. and Meyer-Piening, H. R., 1990, "Analysis of Thick Laminated Anisotropic Composite Plates by the Finite Element Method," *Compos Struct.*, Vol. 15, pp. 185~213.

(40) Toledano, A. and Murakami, H., 1987, "A High-order Laminated Plate Theory with Improved In-plane Response," *Int. J. Solids & Struc.*, Vol. 23, pp. 111~131.

(41) Jing, H. S., Liao, M. L. and Hwang, M., 1990, "Partial Hybrid-higher Order Plate Element for Thick Composite Laminates," *31st SDM Conference AIAA Paper 90-1106-CP.*, pp. 603~608.

(42) Pagano, N. J., 1969, "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending," *J. Comp. Mater.*, Vol. 3, pp. 398 ~411.

(43) Pagano, N. J., 1970, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates," *J. Comp. Mater.*, Vol. 4, pp. 20~34.

(44) Duva, J. M. and Simmonds, J. G., "The Usefulness of Elementary Theory for the Linear Vibrations of Layered, Orthotropic

Elastic Beams and Correction Due to Two-dimensional End Effects," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 58, pp. 175~180.

(45) Gregory, R. D. and Wan, F. Y. M., 1984, "Decaying States of Plain Strain in a Semi-infinite Strip and Boundary Conditions for Plate Theory," *J. Elasticity*, Vol. 14, pp. 27~64.

(46) Gregory, R. D. and Wan, F. Y. M., 1988, "The Interior Solution for Linear Problems of Elastic Plates," *J. of Appl.Mech.*, Vol. 55, pp. 551~559.

(47) Cho, M. and Parmeter, R. R., 1994, "Decaying States of Layered Plates and the Asymptotically Correct Boundary Conditions," *35th AIAA SDM Conference Paper No. 94~1488.*