Comm. Korean Math. Soc. 9 (1994), No. 3, pp. 671–686

번들의 위상적 구조

정영선, 조용승

I. 서 론

다양체 M 은 매끈하고(smooth) 콤팩트(compact) n 차원 리만다양체이고, 실가함수 f 는 M 상에서 미분가능 함수임을 가정한다. Morse 함수는 임계점(critical point)들이 모두 비퇴화(non-degenerate)인 실가함수이다.

만약 함수 f 가 Morse 함수이고, 임의의 점 $x \in M$ 에서 γ_x 는 x 를 통과하는 흐름(flow)이면

$$(*) \qquad \frac{d\gamma_x(t)}{dt} + \nabla_{\gamma_x(t)}(f) = 0$$

이다. 여기서 $\nabla(f)$ 는 함수 f에 의해서 정의되는 기울기 벡터장이고 초기조건 $\gamma_x(0) = x$ 이다. $t \to \pm\infty$ 로 갈 때 $\gamma_x(t)$ 는 함수 f의 임계점들에 가까이 간다. 함수 f 의 임계점이 z 라면 안정한(stable) 다양체 $W^s(z)$, 불안정한 다양체 $W^u(z)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$W^s(z) = \{x \in M | \lim_{t \to \infty} \gamma_x(t) = z\}$$

$$W^u(z) = \{x \in M | \lim_{t \to -\infty} \gamma_x(t) = z\}$$

$\phi^t : M \to M$ 은 콤팩트 M 에서 (*)에 의해 정의된 흐름이라면, 임의의 $t, s \in R$에서 $\phi^{t+s} = \phi^t \cdot \phi^s$, $\phi^0 = id$ 가 된다. 집합 $S \subset M$ 가 불변집

Received December 17, 1993 . Revised December 30, 1993.
이 논문은 1993년도 교육부 학술연구조성비 대학부설연구소 지원과 GARC-KOSEF 지원에 의하여 연구되었음.

합(invariant set)이라는 의미는 모든 $t \in R$ 에서 $\phi^t(S) = S$ 라는 뜻이다. S 가 고립집합 (isolated set) 이라는 것은 $S = \cap_{t\in R}\phi^t(N)$ 을 만족하는 S 의 근방 N 이 존재함을 의미한다.

이 고립불변집합(isolated invariant set) S 에 대한 지표짝(index pair)이란 콤팩트집합 짝 $L \subset N$ 으로서 다음의 조건을 만족한다.

$$S = \cap_{t\in R}\phi^t(cl(N \setminus L)) \subset int(N \setminus L), \tag{1}$$

$$x \in L, \phi^{[0,t]}(x) \subset N \Rightarrow \phi^t(x) \in L, \tag{2}$$

$$x \in N \setminus L \Rightarrow \exists t > 0 \quad \text{with} \quad \phi^{[0,t]}(x) \subset N \tag{3}$$

Conley[C1]와 Robbin 과 Salamon[R.S]은 모든 고립불변집합 S 는 상위상 N/L 이 유한다양체의 호모토피형을 만족하는 지표짝을 갖고, N/L 의 호모토피형은 지표짝의 선택과는 무관하다는 것을 보였다.

고립불변집합 S 의 Conley 지표의 의미는 점공간(pointed space) N/L 과 호모토피가 같다는 것이다.

만약 L 이 N 에서 근방변위견축(neighborhood deformation retract)이라면 지표짝 N/L 의 호몰로지가 짝(N, L) 의 호몰로지와 일치하면서, 지표다항식(index polynomial)

$$P_S(t) = \sum_k rank H_k(N, L; R)t^k = \sum_{x\in S} t^{ind(x)}$$

로 나타낼 수 있다.

유한다양체 상에서 Morse-Smale 함수는 쇄복체(chain complex) 위의 경계사상으로서 임계점들과 연결궤도 사이의 Morse-Smale 경사흐름들을 유도한다. 그 복체는 일반 특이 코호몰로지(singular cohomology) 및 호몰로지를 만든다.

본 논문에서는 기준 다양체 상의 Morse 함수와 파이버(fiber)의 함수에 의해 접번들(tangent bundle)에 위의 여러가지 성질들을 적용하여 접번들 상에서 Morse 함수를 구하고, Thom 동형을 유도한다.

나아가 구번들(sphere bundle)에서 위상학적 구조를 밝히고자 한다. 먼저 구번들에 대한 Gysin의 긴 완전열(long exact sequence)을 소개하고, 번들의 Euler 류와 기준 다양체 상의 위상에 의해 쇄복체를 구성한다. 이 쇄복체의 코호몰로지는 구번들의 전공간이 갖고 있는 코호몰로지와 동형이다.

기준 다양체 위의 Morse-Smale 함수와 벡터번들 위의 생성 단면 (generic section)을 이용하여 구번들의 전공간에서 Morse-Smale 함수를 정의할 수 있다. 번들의 Euler 류와 전공간 상에서 복체를 밝힌다.

II 기본정리

본 장에서는 $f : M \to R$ 은 Morse 함수이며 상수 c 는 함수 f 의 임계값(critical value)이고 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 는 임계점들의 집합이며 이때, $f(x_i) = c, \quad i = 1, 2, \cdots, k$ 이다. 그리고, 상수 c 는 임의의 주어진 $\epsilon > 0$ 에서 $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ 안에 있는 유일한 임계값이다.

불안정한 다양체 $W^u(x_i)$ 는 원판 D^n 과 미분동상이며, 부분공간의 포함

$$M^{c-\epsilon} \cup W^u(x_1) \cup \cdots \cup W^u(x_k) \to M^{c+\epsilon}$$

은 강변위 견축(strong deformation retract)이다.

정 의 2.1. Morse 함수 $f : M \to R$ 가 Morse-Smale 조건을 만족한다는 것은 임의의 주어진 두 임계점 x 와 y 에 대해 $W^s(x)$ 와 $W^u(y)$ 가 횡단적으로 교차하는 것이다.

한편 Smale[S2]은 Morse-Smale 함수의 집합은 Morse 함수의 집합 안에서 개조밀 집합임을 보였다.

만약 $f : M \to R$ 이 Morse-Smale 함수이면, CW-복체인 $C(f)$ 가 존재하고 이 포복체(cell complex)들은 임계점을 갖고 있는 불안정한 다양체에 대응하고, 이 경우 $C(f)$ 는 다양체 M 과 호모토피 동치를 만족한다.

Thom-Pontryagin 를 부분다양체는 다음과 같이 CW-복체 $C(f)$ 를 구성한다:

$f : M \to R$ 이 Morse-Smale 함수이고 함수 f 의 임계점인 x 와 y 에서 $M(x,y) = W^u(x) \cap W^s(y)$ 라고 가정하면, 또 만약 $ind(x) = p$, $ind(y) = q$ 이면, $M(x,y)$ 는 차원이 $(p-q)$ 인 M 의 부분다양체이다. 이 경우 갯수$(p-q)$ 을 x 와 y 의 상대지표(relative index) 라고 부르고, 사실상 $M(x,y)$ 는 x 를 시점으로 하여 y 에서 끝나는 흐름 상에 놓여 있는 모든 점들을 구성하는 공간이다.

$\nabla(f)$ 의 흐름에 의해 주어지는 공간 $M(x,y)$ 에 실선 R 의 자연스런 자유작용이 있다.

즉, $M(x,y) \times R \to M(x,y)$ 는 $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ 에 의해 주어지고, γ_s 는 s 를 통과하는 유일한 흐름이며 $\gamma_s(0) = 0$ 와 $\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\nabla_{\gamma(t)}(f)$ 를 만족한다. 만약 $f(x)$ 와 $f(y)$ 사이에 어떤 점 c 를 선택하여

$$M(x,y)^c = M(x,y) \cap f^{-1}(c)$$

로 놓는다면 이 작용은 미분동형사상

$$M(x,y)^c \times R \to M(x,y)$$

로 제한한다. 그러므로 상공간

$$\mathcal{M}(x,y) = M(x,y)/R$$

를 가지게 되며 이 상공간을 x 와 y 의 흐름을 갖고 있는 모듈라이(moduli) 공간이라 부른다.

$f(x)$ 와 $f(y)$ 사이에 있는 어떤 값 c 에 대해서 합성사상

$$M(x,y)^c \to M(x,y) \to M(x,y)/R \equiv \mathcal{M}(x,y)$$

는 미분동형사상이다. $\mathcal{M}(x,y)$ 는 $(p-q-1)$ 차원의 다양체이다.

정 리 2.2 [C2]. $ind(x) = p, ind(y) = q$ 를 갖고 있는 Morse-Smale 함수 $f : M \rightarrow R$ 의 임계점들이 x 와 y (단 $x > y$) 라 하면 상대접착사상(relative attaching map)

$$\Phi_{x,y} \in \Pi_{p-1}(S^q)$$

인 CW-복체 $C(f)$ 는 Thom-Pontryagin 구조를 거쳐 흐름$(\mathcal{M}(x,y),\gamma)$ 를 갖고 있는 차원 $(p-q-1)$ 인 틀 모듈공간에 의해 나타내진다.

$n(x,y) \in \mathbf{Z}$ 는 경사흐름들의 부호가 붙은 수라고 하며 접흐름(tangent flow)은 $E^u_\gamma(y)$ 로부터 $E^u(x) = T_x W^u(x)$ 위로의 동형사상을 유도하고 이 사상이 방향을 유지하는 사상(orientation preserving map) 혹은 방향을 변경하는 (orientation reversing) 사상에 따라 $n_\gamma = \pm 1$ 로 정의하고, 여기서 $n(x,y) = \sum_\gamma n_\gamma$ 로 정의한다.

따름정리 2.3. 경계 $\partial_k(y)$ 에 대한 $[x] \in C_{k-1}$ 의 계수는 식

$$< \partial_k(y), x >= n(x,y) \in \mathbf{Z}$$

와

$$\partial_k(y) = \sum_x n(y,x)x$$

로 주어진다. 여기서 합은 지표 $k-1$ 을 갖고 있는 모든 임계점들을 생성한다.

Morse-Smale 쇄복체는

$C_k(G) = C_k \otimes_{\mathbf{Z}} (G)$ 와 $\partial^c_k(G) = \partial^c_k \otimes I_G : C_k(G) \rightarrow C_{k-1}(G)$ 로 정의하는 임의의 가환군 G 안에 있는 계수가 된다. 따라서 다음과 같은 중요한 결과를 얻는다.

정 리 2.4 (Thom, Smale, Milnor, Conley, Witten).

(1)

$$\partial_{k-1}^c(G) \cdot \partial_k^c(G) = 0$$

(2)

$$H_k(M; G) = ker\partial_{k-1}^c(G)/im\partial_k^c(G)$$

주 의

1. 쇄복체에 대한 위와 같은 공식들은 Witten[W]에 기인한다. 그는 실제로 쌍대 경계연산자 δ 를 생각하여 M 의 de rham 의 코호몰로지를 구체적으로 구성하였다.

2. Milnor[M2]는 경계를 갖고 있는 다양체 위에서 포앙카레 상대정리(Poincaré duality Theorem)를 확립하기 위해 위의 정리 2.4를 증명하였고, 경계 연산자 ∂^c 는 교점수(intersection number)임을 밝혔다.

3. Smale[S2, S3]과 Thom 은 파수체(handle body)를 Morse 이론에 접근시켜 간접적으로 위의 정리 2.4를 증명하였다.

4. 최근 Floer[F]는 임의의 계수 환을 갖고 있는 Alexander 코호몰로지로 위의 정리를 증명하였다.

5. 위의 경계 연산자가 Conley의 접속행렬의 특별한 경우를 의미하고 정리 2.4는 Franzosa[F1, F2]가 증명하였다.

본 논문에서는 Morse-Smale 경사흐름의 특별한 경우인 Conley의 접속행렬을 구체적으로 구성하였다.

함수 f 의 모든 임계점 x 에서 (N_x, L_x) 를 지표짝으로 표시하고 $E^u(x) = T_xW^u(x)$ 의 방향이 $H_k(N_x, L_x; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ 의 생성자를 결정할 때 여기서 $k = ind(x)$ 이다. 이것은 군 C_k 가 $C_k = \oplus_x H_k(N_x, L_x; \mathbf{Z})$ 와 일치하여 이 합은 지표 k 를 갖고 있는 모든 임계점들을 생성한다. 그러므로

$$G \otimes C_k = \oplus_x H_k(N_x, L_x; G) = C_k(G)$$

만약 $M(x,y) = W^u(x) \cap W^s(y)$ 가 공집합이 아니면 상대지표 $ind(x) - ind(y)$ 는 선형 1계 편미분 연산자인 Fredholm 지표로 나타낼 수 있고, 이 연산자는 경사흐름을 갖고 있는 선형 방정식에 의한 흐름 $\alpha(s)$ 를 따라가는 벡터장 $\zeta(s)$ 위에서 정의된다. 즉, 벡터장 $\zeta \in T_{\alpha(s)}M$ 이 주어지고

$$F_\alpha \zeta = \nabla_{\dot\alpha}\zeta + \nabla_\zeta \nabla f(\alpha)$$

가 정의된다. 여기서 ∇ 는 공변미분이다. Hilbert 공간

$$L^2(\alpha) = \{\zeta \in \Omega^0(T_\alpha(M)) | \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(s)|^2 ds < \infty\}$$

이면

$$F_\alpha : L_1^2(\alpha) = \{\zeta \in L^2(\alpha) | \nabla_{\dot\alpha}\zeta \in L^2(\alpha)\} \to L^2(\alpha)$$

는 선형 연산자이다.

정 리 2.5. 임계점 $a, b \in M$ 을 가지고 있는 $f : M \to R$ 은 Morse-Smale 함수일 때, a 와 b 를 연결하는 $\alpha : R \to M$ 을 흐름이라 하면, F_α 는 Fredholm 연산자이고 $indF_\alpha = ind(a) - ind(b)$ 이다.

실제로 F_α 는 전사이고 F_α 의 핵은 $M(a,b) = W^u(a) \cap W^s(b)$ 에 접하는 벡터장을 구성한다.

III 결 과

보조정리 3.1. $RP^n = S^n/\{\pm 1\}$ 은 n 차원인 실사형 공간이고, $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ 은 서로 다른 실상수일 때 함수 $f : RP^n \to R$ 은 $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x_i^2$ 으로 정의된다고 하면, 함수 f 는 RP^n 상에서 Morse 함수이다.

예 제 3.2. RP^3 에서 쇄복체와 흐름들을 구성해 보자.

RP^3 은 방향을 잡을 수 있는 다양체이므로 각 점 $x \in RP^3$ 에서 $e_1, e_2, e_3 \in T_x RP^3$ 인 유향의 기저가 있다. $U_j(\subset M)$ 상에서 $\dot{x} = -\nabla f(x)$ 의 흐름을 구성하고자 한다. U_j 좌표근방에서 함수는

$$f = c_j + \sum_{i \neq j} (c_i - c_j) y_i^2$$

이다. 그 미분방정식계의 해는

$$\phi^t = (e^{-2(c_1 - c_0)t}, \cdots, e^{-2(c_{j-1} - c_j)t}, e^{-2(c_{j+1} - c_j)t}, \cdots, e^{-2(c_n - c_j)t}),$$

$t \in R$ 이다. 여기서 U_0 위에서 함수 f 의 임계점 p_0 는 $ind(p_0) = 0, W^s(p_0) = \{U_0\}$ 그리고 $W^u(p_0) = \{p_0\}$ 임을 알 수 있다.

그러므로 4 개의 임계점들을 갖는 RP^3 의 흐름들을 구체적으로 구성할 수 있다.

$$\begin{cases} C_3 = \mathbf{Z} < p_3 >= H_3(N_3, L_3; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \\ C_2 = \mathbf{Z} < p_2 >= H_2(N_2, L_2; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \\ C_1 = \mathbf{Z} < p_1 >= H_1(N_1, L_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \\ C_0 = \mathbf{Z} < p_0 >= H_0(N_0, L_0; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \end{cases}$$

이다. 이때 (N_j, L_j) 는 p_j 의 지표짝이며, $N_j/L_j \simeq S^j$ 이다.

경계사상 $\partial_k^c : C_{k+1} \to C_k$ 을 정의하면

$$0 \to C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{2} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \to 0$$

가 된다. 따라서

$$H_*(RP^3; \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad 0, \quad \mathbf{Z})$$

이다.

정 리 3.3. $f : RP^3 \to R$ 이 Morse 함수이며 파이버 상에서 함수 $g : R^3 \to R$ 은 $g(v) = -|v|^2$ 에 의해 정의되며 함수 $H : RP^3 \times R^3 \to R$ 은 $H(x,v) = f(x) + g(v)$ 로 정의된다면 이 함수 H 는 Morse 함수이다.

증 명: $\chi(RP^3) = 0$ 이므로 비소멸 벡터장이고 RP^3 의 접번들 $T(RP^3)$ 은 $RP^3 \times R^3$ 이 된다. R^3 에서 z_1, z_2, z_3 이 좌표계임을 가정하면, $U_j \times R^3$ 에서

$$H(x,v) = c_j + \sum_{i \neq j} (c_i - c_j) y_i^2 - |v|^2$$

$$dH = \sum_{i \neq j} 2(c_i - c_j) y_i dy_i + \sum_{i=1}^{3} (-2) z_i dz_i$$

그러므로 H 의 유일한 임계점들은 $(p_j, 0)$ 이다. $(p_j, 0) \in U_j \times R^3$ 에서 Hessian (H) 는 비특이(non singular) 이다. 따라서 함수 H 는 Morse 함수이다.

예제 3.4. $T(RP^3)$ 에서 미분방정식 $(\dot{x}, v) = -\nabla H(x,v)$ 을 고찰하면 $U_0 \times R^3$ 에서

$$\phi^t = (e^{-2(c_1 - c_0)t}, \quad e^{-2(c_2 - c_0)t}, \quad e^{-2(c_3 - c_0)t}. \quad e^{2t}, \quad e^{2t}, \quad e^{2t}),$$

$t \in R$ 이다.

그러므로 $(p_0, 0) \in U_0 \times R^3$ 은 $ind(p_0, 0) = 3 (= dim W^u(p_0, 0))$ 이다. 이와 유사하게 $(p_j, 0) \in U_j \times R^3$ 은 $ind(p_j, 0) = j + 3 \quad j = 1, 2, 3$. 따라서 $(p_j, 0)$ 의 Conley 지표짝은 $(N_(p_j, 0), L_(p_j, 0))$ 과 호모토피형이 된다.

예제 3.5. $RP^3 \times R^3$ 에서 $z_1, z_2, \cdots, z_6$ 는 좌표계라고 하자.

그리고 $H^*_{cv}(E)$ 는 수직방향으로 콤팩트 지지대(support)를 갖고 있는 E 의 코호몰로지라고 하면 $H^*_{cv}(RP^3 \times R^3)$ 는

$$\sum \alpha(z_1, z_2, \cdots, z_6) dz_{i1} dz_{i2} dz_{i3}$$

의 형태를 갖는다. 여기서 α 는 각각 고정된 $x \in RP^3$ 에 대한 콤팩트지지대를 갖는다.

$$\Im : H^0(RP^3) \to H^3_{cv}(RP^3 \times R^3)$$

는 Thom 동형사상을 만족하며 $1 \in H^0(RP^3)$ 의 상은 $H^3_{cv}(RP^3 \times R^3)$ 에 있는 $\Phi = \Im(1) = \alpha dz_4 dz_5 dz_6$ 인 코호몰로지류를 결정하고, $\int \alpha dz_4 dz_5 dz_6 = 1$ 이다.

$s : RP^3 \to RP^3 \times R^3$ 는 영단면(zero section)일 때 $RP^3 \times R^3$ 은 오일러 류가 0 이기 때문에, $s^*\Phi = 0$ 이다.

따라서 Φ 의 지지대를 R^3 에 있는 0 의 ϵ-근방으로 잡을 수 있다. *i.e.*, $(N(0 : \epsilon) \simeq D^3)$.

고정된 $x \in RP^3$ 에서 Φ 는

$$\begin{aligned} &H^3(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x)\backslash\{0\}) \\ \simeq &H^3(R^3, R^3\backslash\{0\}) \simeq H^3(D^3, S^2) \simeq H^3(N_3, L_3) \end{aligned}$$

의 생성자이다.

여기서 (N_3, L_3) 는 $RP^3 \times R^3$ 에 있는 $(p_0, 0)$ 의 지표짝이다.

E 는 사영사상 $\pi : E \to M$ 을 갖고서 계수가 n 인 벡터번들이며, E 는 유향적이고 리만 구조를 갖는다고 하자. 여기서 $(n-1)$-구번들 $\pi : S(E) \to M$ 으로 제한하면, 긴 완전열이 존재하게 된다. 이것이 구번들 상의 Thom-Gysin 열이며 다음과 같다.

정리 3.6 (THOM-GYSIN). $\pi : S(E) \to M$ 은 유향 구번들로서 계수 n 을 갖고 있는 벡터번들 E 를 수반할 때

$$\cdots \to H^p(M) \xrightarrow{\pi^*} H^p(S(E)) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-n+1}(M) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(M) \to \cdots$$

인 긴 완전열이 존재한다. π_*, $\wedge e$, π^* 는 각각 파이버를 따라 적분, 오일러 류의 승법, 그리고 자연스런 끌어 되돌아오기(pull back)이다.

정 리3.7 [G.P]. 사상 $f : X \to Y$ 는 Y 의 부분다양체 Z 와 횡단하고, $W = f^{-1}(Z)$ 라 하면 선형사상 $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}Z$ 에서 $T_x(W)$ 는 $T_{f(x)}Z$ 의 전상이다.

T_xX 에서 $N_x(W;X)$ 를 T_xW 에 대한 직교보공간이라 하자. 각각의 $f(x) = z \in Z$ 에 대해

$$df_x(T_xX) + T_zZ = T_zY = df_x(N_x(W;X)) + T_zZ$$

때문에 Z 와 Y 의 방향이 $df_x(T(W;X))$ 의 방향을 유도한다. 동형사상 df_x 에 의해, $df_x(N_x(W;X))$ 위의 방향은 $N_x(W;X)$ 위의 방향을 정의할 수 있다. 결국 $N_x(W;X)$ 와 T_xX 위의 방향은 각각의 접공간 $T_x(W)$ 위의 방향들을 정의한다.

특히 X 의 두 부분공간 X_1 와 X_2 가 횡단하고, 보차원을 가질 때 $X_1 \cap X_2$ 의 각 점은 ± 1- 방향을 가지며 이것은 포함사상 $i : X_1 \to X_2$ 에 의해 정의된다.

함수 $f : M \to R$ 는 Morse-Smale 조건을 만족하는 Morse 함수일 때 f 의 두 개의 임계점 x 와 y 에서 차원 $ind(x) - ind(y)$ 을 가지고 있는 $M(x,y) = W^u(x) \cap W^s(y)$ 는 다양체 M 의 매끈한 부분다양체이다.

$s : M \to E$ 은 생성단면(generic section)일 때 영단면의 전상
$W = s^{-1}(0)$ 는 여차원(codimension) n 을 갖는다.
일반적으로, $ind(x) - ind(y) < n$ 이면 $W \cap M(x,y) = \emptyset$ 이고, $ind(x) - ind(y) = n$ 이면 $W \cap M(x,y)$ 는 유한개의 점들로 이루어진 집합이 된다.

$$C^i = \oplus_{deg\rho^i = i} \mathbf{Z}\rho^i$$

라 정의하고 외미분 $d : C^i \to C^{i+1}$ 는
연결 준 동형사상에 의해 정의하고 쇄사상 $c : C^i \to C^{i+n}$ 을

$$c(\rho^i) = \sum \sharp(W \cap M(\rho^i, \rho^{i+n}))\rho^{i+n}$$

에 의해 정의한다. 여기서 $\sharp$는 부호의 갯수이다.

정 리3.8. 선형사상 $c : C^i \to C^{i+n}$ 은 C^* 로 부터 그 자신으로 가는 쇄 사상이다.

증 명:
다음과 같은 도표를 생각해 보면

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C^i & \xrightarrow{d} & C^{i+1} & \xrightarrow{d} & C^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & C^{i+n} & \xrightarrow{d} & C^{i+n+1} & \xrightarrow{d} & C^{i+n+2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

C^i 에서 각 생성자 ρ^i 에 대해,

$$c(\rho^i) = \sum_{\rho^{i+n} \in C^{i+n}} \sharp(W \cap M(\rho^i, \rho^{i+n}))\rho^{i+n}$$

이므로

$$\begin{aligned} & d(c(\rho^i)) \\ = & \sum_{\rho^{i+n+1} \in C^{i+n+1}} \Big(\sum_{\rho^{i+n} \in C^{i+n}} \sharp(W \cap M(\rho^i, \rho^{i+n}))n(\rho^{i+n}, \rho^{i+n+1})\Big)\rho^{i+n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c(d(\rho^i)) \\ = & \sum_{\rho^{i+n+1} \in C^{i+n+1}} \Big(\sum_{\rho^{i+1} \in C^{i+1}} n(\rho^i, \rho^{i+1})\sharp(W \cap M(\rho^{i+1}, \rho^{i+n+1}))\Big)\rho^{i+n+1} \end{aligned}$$

가 된다.
경사흐름과 Euler 류는 다음과 같은 도표 가환도표를 결정한다.

$$\begin{array}{ccc}
\rho^i & \xrightarrow{d} & \rho^{i+1} \\
{\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\
\rho^{i+n} & \xrightarrow{d} & \rho^{i+n+1}
\end{array}$$

그러므로

$$\sum_{\rho^{i+n}\in C^{i+n}} \sharp(W\cap M(\rho^i,\rho^{i+n}))n(\rho^{i+n},\rho^{i+n+1})$$
$$= \sum_{\rho^{i+1}\in C^{i+1}} n(\rho^i,\rho^{i+1})\sharp(W\cap M(\rho^{i+1},\rho^{i+n+1}))$$

이 된다. 따라서 $c(d(\rho^i)) = d(c(\rho^i))$.

새로운 쌍대경계사상(coboundary map)

$$\bar{d} : C^* \oplus C^* \to C^* \oplus C^*$$

를

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : C^i \oplus C^{i-n+1} \to C^{i+1} \oplus C^{i-n+2}$$

로 정의한다.

정 리 3.9 [C2].

(1) $\bar{d}^2 = 0$ 의 필요충분조건은 c가 쇄사상이다.

(2) $H^p(C^* \oplus C^*, \bar{d}) \simeq H^p(S(E))$

정 리 3.10. $f : M \to R$ 이 Morse-Smale 조건을 만족하는 Morse 함수라 하고 $s : M \to E$는 생성단면(generic section)이고 함수 $g : S(E) \to R$ 이 각 $v_x \in S(E)$ 에서 $g(v_x) =< v_x, s\pi(v_x) >$ 에 의해 정의되고 이 내적 $<,>$ 은 E 위에서 정의된다고 하자. 그리고 함수 f 와 g 에 의해 이루어지는 함수 $F : S(E) \to R$ 가 $F(v_x) = (\pi^* f)(v_x) + g(v_x)$ 로 정의된다면, 이 함수 F 는 매끈한 Morse-Smale 함수이다.

증 명: 좌표 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 로 이루어진 U 가 M 에서의 좌표근방이고, $\pi : S(E) \to M$ 가 파이버 S^k 를 갖고 있는 유향 구번들 이라고 하

자. 함수 F 의 임계점들을 결정하기 위해 다음과 같은 국소좌표계를 생각해 보자.

만약

$$S(E)|_{U_j} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, v) | x_j \neq 0, v \in S^k\}$$

라면

$$(x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_n, v) \equiv (y_i, v) : S(E)|_{U_j} \to R \quad (i \neq j)$$

은 요구되는 좌표함수이다.

$S(E)|_{U_j}$ 상에서,

$$F(v_{y_i}) = (\pi^* f)(v_{y_i}) + g(v_{y_i})$$

이다.

만일 $\zeta \in T_{v_{y_i}} S(E)$ 이면,

$$\begin{aligned} dF_{v_{y_i}}(\zeta) &= d(f\pi)_{v_{y_i}}(\zeta) + dg_{v_{y_i}}(\zeta) \\ &= df_{\pi(v_{y_i})} d\pi_{v_{y_i}}(\zeta) + dg\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_{v_{y_i}} t\zeta\right) \\ &= df_{y_i} d\pi_{v_{y_i}}(\zeta) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g \cdot \exp_{v_{y_i}} t\zeta) \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g \cdot \exp_{v_{y_i}} t\zeta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} &< \exp_{v_{y_i}} t\zeta \quad , \quad s\pi(\exp_{v_{y_i}} t\zeta) > \\ &=< \zeta, s\pi(v_{y_i}) > + < v_{y_i}, \quad ds_{\pi(v_{y_i})} d\pi_{v_{y_i}}(\zeta) > \\ &=< \zeta, s(y_i) > \end{aligned}$$

함수 f 의 두 개의 임계점 p_j 와 p_{j-1} 에 대해 $M(p_j, p_{j-1}) = W^u(p_j) \cap W^s(p_{j-1})$ 는 매끈한 부분다양체이고,

$dimM(p_j, p_{j-1}) = ind(p_j) - ind(p_{j-1})$ 이며 $s^{-1}(0)$ 는 여차원 k 를 갖는다.

$dimM(p_j, p_{j-1}) = k$ 이면, $M(p_j, p_{j-1}) \cap s^{-1}(0)$ 는 유한개의 점들로 이루어진 집합이 된다.

따라서 만약 U_j 상에서 p_j 가 f 의 임계점이고, (함수 f 의 임계점의 집합)$\cap s^{-1} = \emptyset$ 이면 $\|s\pi(v_{p_j})\| = \|s(p_j)\| \neq 0$ 이고 $s(p_j)$ 가 ζ 에 수직이므로 $S(E)|_{U_j}$ 상에서 F 는 오직 두 개의 임계점

$v_{p_j} = \pm(\frac{s(p_j)}{\|s(p_j)\|})$ 를 갖는다. $v_{p_j} \in S(E)|_{U_j}$ 에서 Hessian $H_{v_{p_j}}(F)$ 는 비특이이므로 임계점 $v_{p_j} \in S(E)$ 는 비퇴화이다.

주 의

1. 위의 정리에서 임계점 v_{p_j} 는 $ind(v_{p_j}) = n + k$ 이고,
$S(E)$ 안에서 v_{p_j} 의 Conley 지표는 S^{n+k} 와 호모토피 형이다.

2. 만일 $s(p_j) = 0$ 이면 $S(E)|_{\pi^{-1}(p_j)}$ 상에서
$g(v_{p_j}) = < v_{p_j}, s\pi(v_{p_j}) > = 0$.

그러므로 Morse 함수 $F = f \cdot \pi$ 이다.

따름정리 3.11. $f : CP^n \to R$ 이 Morse 함수이고 $g : S^{2n+1} \to R$ 은 $g(v_p) = < v_p, s\pi(v_p) >$ 에 의해 정의되는 함수이면 $F : S^{2n+1} \to R$ 는 f 와 g 에 의해 정의되는 Morse-Smale 함수이다.

References

[B. T] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[C1] C. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, AMS, Providence, R.I., 1978.

[C2] Y. S. Cho, *Morse theory on sphere bundle*, Preprint.

[F] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 207-221.

[F1] R. D. Franzosa, *Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions*, Trans. AMS. **298** (1986), 193-213.

[F2] R. D. Franzosa, Trans. AMS. **311** (1989), 561-592.

[G.P] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology, Prentice-Hall*, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974.

[M1] J. W. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton University Press 1963.

[M2] J. W. Milnor, *Lecture on the h-cobordism theorem*, Math. Notes 1, Princeton University Press, 1965.

[R.S] J. W. Robbin and D. Salamon, *Dynamical systems, shape theory and theConley index*, Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1988), 375-393..

[S] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index for isolated invariant sets*, Trans. AMS. **291** (1985), 1-41.

[S1] S. Smale, *Morse inequalities for a dynamical system*, Bull. AMS. **66** (1960), 43-49.

[S2] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. of Math. **74** (1961), 199-206.

[S3] S. Smale, *Differential dynamical systems*, Bull. AMS. **73** (1967).

[W] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 661-692.

이화여자대학교 자연과학대학 수학과, 서울120-750