保險附 포트폴리오 技法의 妥當性조사

崔 元 根*

I. 緖論

經濟·金融市場의 불확실성의 증대로 80년대에 본격적으로 도입되어 급속히 인기를 끌어냈던 保險附포트폴리오技法(portfolio insurance)은 지난 1987년 시장대폭락시 그 理論的 效果를 만족스러울 정도로 발휘하지 못하게 되면서 많은 논란의 대상이 되었다. 그 결과 이 技法의 妥當性 자체에 대한 근본적 疑問까지 제기되었다. 물론 실행상에 있어서 本 技法이 지나치게 비현실적인 이론적 조건들을 갖추고 있는 것은 사실이나 그 근본적 存在理由에까지 의문을 제기하기에는 論據가 부족한 것 같다. 이를 위해 여러 방면으로 이론적 접근이 가능하겠는데, 그 중에서 본고는 本 技法의 기본적 妥當性 評價를 지향한 연구의 첫 단계로 相對的으로 광범위한 집단의 個人들(危險혐오의 特性을 공유)의 입장에서 保險附포트폴리오 전략의 가치를 다른 전통적 投資戰略과 비교하여 評價하려 하는데, 여기서는 간명한 분석 및 결과를 위해 비교대상으로서 두가지 기본적 戰略인 危險포트폴리오 投資戰略과 無危險 投資戰略을 채택하겠다. 분석도구로서는 stochastic dominance 개념을 사용하여 評價基準으로 삼을 것이다.

* 金融先物協會

II. 基礎 模型

유휴자금을 보유하고 유망한 投資를 찾는 한 개인을 상정하자. 분석의 명료성을 위해 위 개인이 참여할 수 있는 金融市場은 다음의 3가지 投資 方案만을 제공한다고 가정하자.

- 危險 投資로서 指數刑 投資
- 無危險 投資
- 保險附 포트폴리오로서 위의 指數刑 포트폴리오와 그에 기초한 賣出옵션의 매입으로 구성

덧붙여, 投資期間은 單期로 하여 2개의 時點, 즉 期初와 期末이 주요한 인식시점이 된다. 끝으로 모형의 핵심변수는 연속적 변수를 채택한다. 그럼,이제 위의 3가지 投資類型을 模型으로 구현해 보자.

먼저, 危險을 내포한 指數刑 포트폴리오에의 投資戰略을 고려하자. 이 전략의 기대결과는 투자자에게 이미 예상되거나 알려져 있다고 가정하자. 本 포트폴리오투자의 期初가격을 S라 하고 投資期末에 측정될 그 價格變動分을 연속성 확률변수 x로 나타내자. 이때 x는 최소값이 -S라는 것은 논리적으로 알 수 있다. 그리고 期末의 결과전망치는 연속확률분포로 표시하며 여기에는 확률밀도함수를 f(x)라 하자.

$$\int_{-S}^{\infty} f(t)dt = 1$$

그러면 포트폴리오의 期末價格은 :

$$S+x$$

이것의 확률은 다음 두가지 경우로 나눠볼 수 있다.

-약세시장시 : $\int_{-S}^{0} f(t)dt$, 여기서 $x \in [-S, 0)$

-강세시장시 : $\int_{-S}^{\infty} f(t)dt$, 여기서 $x \in (0, \infty)$

本 個人이 보유자본 전체 W를 危險포트폴리오에 投資한다고 하면 이 포트폴리오의 購買量 Q는 W/S가 될 것이다. 그러므로 本 投資의 期初상태는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$W=QS$, 여기서 $Q=W/S$

그러면 本 投資의 期末結果 W_T는 다음과 같이 된다.

$W_T=Q(S+x)$

無危險投資의 경우, 무위험 年利子率을 r이라 하면 期初投資額 W에 대해 기말결과는 다음이 된다.

$W_T=We^r$: 連續複利계산의 경우

$W_T=W(1+r)$: 單利계산의 경우

保險附포트폴리오에 대한 投資를 고려해 보자. 이 포트폴리오의 구성형태는 여러가지기 있을 수 있는데, 여기서는 위의 危險포트폴리오에 同量의 賣出옵션을 겸하여 구입하는 형태를 취하기로 하자. 이때 옵션에 대한 프리미엄의 지급시기에 따라 두가지 전략을 생각할 수 있다. 즉 期初지급전략과 期末지급전략. 그래서 우리는 保險附포트폴리오투자의 期初상태를 다음과 같이 두가지로 나타낼 수 있다.

- 프리미엄 期初지급전략의 경우 : W=n(S+P)
- 프리미엄 期末지급전략의 경우 : W=Q(S+P)-D

여기서 n은 해당 戰略에서의 구매수량이 되어 구체적으로는 n=W/(S+P)가 된다. D는 옵션의 구매를 위한 借入金額이 되어 구체적으로는 D=QP가 된다.

덧붙여 분석의 단순화를 위해 賣出옵션은 유럽형이고 無配當이라고 가정하여 블랙 숄즈의 기본모형을 사용하자. 이 경우 期末에 본 옵션의 가치는 기존 포트폴리오의 가격이 옵션행사가격 K 이하가 되면 K-S가 되고 그렇지 않은 경우는 0이 된다.

그러면 本 保險附포트폴리오투자의 결과 Y를 보자. 이때도 두가지 전략의 구별을 위해 Y_a 와 Y_b라 하자.

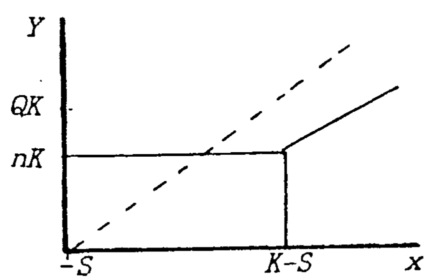
- 프리미엄 期初지급전략의 경우

Y_a
Y_1=nK, 여기서 $x \in [-S, K-S)$
Y_2=n(S+x), 여기서 $x \in [K-S, \infty)$

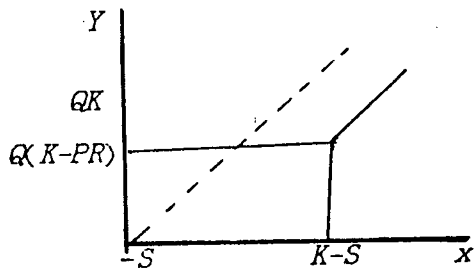
- 프리미엄 期末지급전략의 경우

Y_b
$Y_3=Q(K-Pe^r)$, 여기서 $x \in [-S, K-S)$
$Y_4=Q(S+x-Pe^r)$, 여기서 $x \in [K-S, \infty)$

이 두 類型의 결과를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



Y_a의 경우



Y_b의 경우

—— : 危險投資
- - - : 保險附投資

III. 妥當性 評價 (stochastic dominance 기준)

Stochastic dominance(SD) 기준이 원칙적으로 목적하는 것은 한 確率分布가 한 주어진 特性集團의 個人들에게 대하여 效率的인 集合(efficient set)에 소속되어 있는 지 여부를 판단하는 것이며, 이 때 그 확률분포가 最適인지 여부까지는 분석되지 않는다. 우리는 이 기준을 새로운 형태의 投資類型인 保險附포트폴리오 投資가 다른 基本的 投資類型들에 비해 독자적 존립의 正當性을 갖는다는 점을 확인하는 데 사용하겠다. 여기서는 비교할 基本投資類型으로 크게 두 가지, 즉 危險포트폴리오 投資와 無危險 投資를 택하겠다.

理論的으로 保險附포트폴리오는 危險포트폴리오에 비해 期待收益率이 낮으며 무위험투자에 비해서는 기대수익률이 높다. 그런데 기대수익률이 낮지 않아야 한다는 점이 SD가 존재하기 위한 必要條件이라는 것을 이미 보았기 때문에 여기서 제기해야 할 물음은, 한편으로는 保險附投資가 危險投資에 비해 非效率的이지 않고 같은 效率的 集合에 속해있는가와, 다른 한편으로는 無危險投資에 비해 더 效率的이지 않고 같은 效率的 集合에 속해있는가이다.

本 分析은 均衡市場과 狀況選好理論(state-preference theory)의 적용상황을 가정함으로 差益去來(arbitrage)機會의 不在를 함축하며, 다시 이는 다양한 投資類型間 SD의 제1차조건의 不在로 나타난다. 다른 한편, 일반성을 위해 確率密度函數를 特定化시키지 않을 것이므로 본 분석은 제2차조건에 의한 SD관계에 촛점을 맞출 것이다. 끝으로 본 분석은 Doherty(1977)의 방법으로부터 결정적인 도움을 받았음을 밝혀둔다.

(1) 模型

촛점은 관련된 여러 投資戰略의 기대 결과에 상응하는 確率分布들을 비교하는 것이다. 분석의 틀은 앞에서의 기준 모형, 즉 連續變數 및 單期간에 설정되며 期初투자와 그 期末결과 간의 차이를 분석한 것이다. 이를 위해 새로운 確率變數로서 투자액의 변동액을 나타낼 변수 Z을 도입하자.

危險포트폴리오 戰略의 경우 變數 Z(다른 전략의 경우와 구별하기 위하여 Z_r이라 고 하자)은 다음과 같이 나타낼 수 있다 :

$$Z_r = Q(S+x) - W = Qx \text{ , 여기서 } x \geq -S$$

無危險投資戰略을 택한다면 變數 Z(여기서는 Z_s라 하자)의 표현은 다음과 같다 :

$$Z_s = WR - W \text{ , 여기서 } R = e^r \text{ 또는 } 1 + r$$

保險附포트폴리오전략(여기서는 프리미엄 事前控除의 경우를 다루자)의 경우, 변수 Z(여기서는 Za라 하자)은 다음과 같이 나타낼 수 있다 :

$$Z_a \begin{cases} Z_1 = nK - W \text{ , 여기서 } -S \leq x < K-S \\ Z_2 = n(S+x) - W \text{ , 여기서 } x \geq K-S \end{cases}$$

이상과 같이 확률변수들이 주어졌을 때 각각에 해당하는 期待收益率 E(Z)들은 다음과 같다.

- 危險投資戰略의 경우 : $E(Zr) = Q\int_{-S}^{\infty} tf(t)dt$

- 無危險投資戰略의 경우 : $E(Z_S) = Z_S$

- 保險附投資戰略의 경우 :

$$E(Za) = (nK-W)\int_{-S}^{K-S} f(t)dt + \int_{K-S}^{\infty}[n(S+t)-W]f(t)dt$$

$$= nK\int_{-S}^{K-S} f(t)dt + \int_{K-S}^{\infty} n(S+t)f(t)dt - W\int_{-S}^{\infty} f(t)dt$$

이들 期待收益率간에는 이미 差益去來기회 不在의 가정에 의해 다음의 대소관계가

성립한다 :

$$E(Z_r) > E(Z_a) > E(Z_s)$$

다음 단계는 **累積確率函數** F(Z)을 각 전략에 대해 정의하는 것이다.

- 危險투자전략의 경우 :

$$F(Z_r) \begin{cases} = 0 & \text{여기서 } Z_r \le -QS = -W,\ x \le -S \\ = \int_{-S}^{x} f(t)dt & \text{여기서 } Z_r = Qx,\ x > -S \end{cases}$$

- 無危險투자전략의 경우 :

$$F(Z_S) \begin{cases} = 0 & \text{여기서 } Z_S < WR-W,\ x \le -S \\ = 1 & \text{여기서 } Z_S = WR-W \end{cases}$$

- 保險附투자전략의 경우 :

$$F(Z_a) \begin{cases} = 0 & \text{여기서 } Z_a < nK-W,\ x < -S \\ = \int_{-S}^{K-S} f(t)dt & \text{여기서 } Z_r = nK-W,\ -S \le x < K-S \\ = \int_{-S}^{x} f(t)dt & \text{여기서 } Z_a = n(S+x)-W,\ x \ge K-S \end{cases}$$

(2) **分析**

1. 危險投資戰略과의 비교

保險附포트폴리오전략을 위험포트폴리오투자전략에 비교하는 것을 각각의 누적확률함

수($F(Z_r)$와 $F(Z_a)$)를 토대로 진행하여 보자.

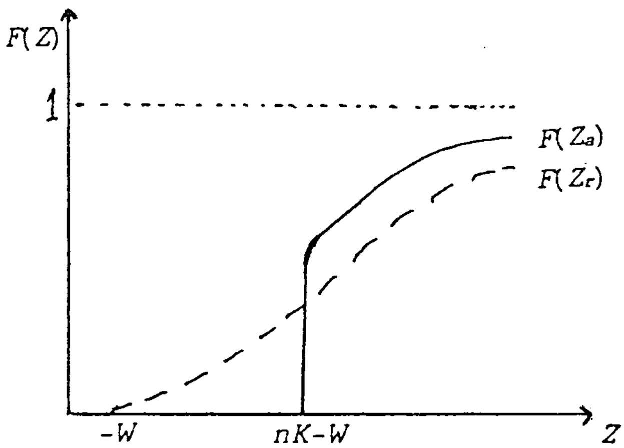
먼저 $Z=nK-W$ 수준부터 시작하자. 해당하는 $F(Z_a)$값은 앞에서 알려진데 비하여 $F(Z_r)$값은 그렇지 못하다. $Z_r=Qx$ 를 $Z=nK-W$ 와 대응시켜서 해당값 $x = S(K-S-P)/(S+P)$을 얻는다. 이 값은 $K-S$값 보다 작다. 이 결과 $F(Z_a)$값이 $F(Z_r)$값보다 큰데, 왜냐하면 :

$$\int_{-S}^{K-S} f(t)dt > \int_{-S}^{x} f(t)dt$$

다음, $Z\in(-W, nK-W)$ 수준을 보자. 여기서 $F(Z_a)=0$ 이다. $F(Z_r)$의 경우 Z_r은 $x\in(-S, S(K-S-P)/(S+P))$ 구역값들 위에서 정의되며, 이로서 $F(Z_r)$은 양수값을 갖는다. 따라서 $F(Z_r)$값이 상대적으로 크다.

끝으로, $Z \geq nK-W$ 수준을 다루자. 이는 $x > K-S$ 인 조건으로 $Z=n(S+x)-W$로 달리 나타낼 수 있다. 여기서 Z_a와 Z_r에 해당하는 x를 구별하기 위해 각각 x_r와 x_a로 표시하자. Z_r와 Z_a의 비교를 위해 x_r을 x_a로 표시하면 $x_r=S(x_a-P)/(S+P)$가 되는데, 이 값은 x_a보다 작다. 따라서 $F(Z_a)$가 더 크다.

이상의 결과로부터 다음 그림을 그릴 수 있다.



그러면 SD 평가 기준을 적용하여 보자. 이미 보험부전략은 위험투자전략에 비해 SD를 갖비 못한다는 점에서, 여기서 알아 볼 것은 그 반대로의 SD관계가 있는지 여부이다.

그림에서 두 누적확률함수는 Z=nK-W수준에서 교차하고 있다. SD의 2차 기준을 wj 적용하는 데 있어서 두 함수의 교차가 단 한번 발생하는 점은 특별한 2차기준을 적용할 수 있게 해준다. 이에 따르면 $E(Z_a) < E(Z_r)$ 이므로 두 확률변수 간에는 2차의 SD 관계가 부재한다. 따라서 혹시 있을지도 모르는 3차의 SD 관계를 고려하지 않는 상태에서 **保險附**투자전략은 위험투자전략에 대해 SD를 받는 관계가 아니라는 점을 알 수 있다.

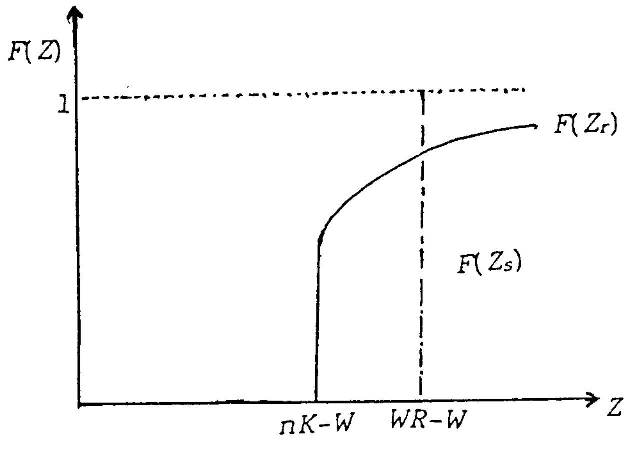
2. **無危險投資戰略**과의 비교

진행방법은 앞서와 마찬가지이다. 우선 Z=WR-W 수준에서 보면 Z_a와 Z_s를 비교하여 x_a를 x_s값으로 변환할 수 있다. 즉, $WR-W=W(S+x_a)/(S+P)-W$ 에서 $x_a=R(S+P)-S$. 이때 $F(Z_s)=1$ 이므로 본 수준에서는 $F(Z_a)$가 $F(Z_s)$보다 작다.

다음은 ZE[nK-W, WR-W] 수준을 보자. $F(Z_s)=0$ 인데 비하여 $x_a>0$, 따라서

$$F(Z_a) = \int_{-S}^{X_a} f(t)dt > F(Z_s)=0$$

이상의 결과는 다음 그림을 보여준다.



SD 評價基準을 적용하여 보자. 이미 $E(Z_a) > E(Z_r)$ 가 전제되어 있는 상태에서 無危險戰略은 保險附戰略에 대하여 SD를 발휘하지 못하는 것을 알 수 있으므로 여기서 관심사는 그 반대로의 SD 關係의 可能여부이다.

앞서 危險戰略과의 관계에서처럼 SD의 특별한 2차 기준을 적용할 수 있다. 이에 의하면 $E(Z_a) > E(Z_s)$ 이므로 두 確率變數間에는 2차의 SD 關係가 없다. 그러므로 3차의 SD 관계 조사를 배제한 상태에서 保險附포트폴리오戰略은 無危險戰略에 대해 SD를 갖지 못한다는 것을 알 수 있다.

IV. 結論

本 分析에서 保險附포트폴리오전략은 다른 두 基本的 投資類型, 즉 危險전략과 無危險戰略에 대해 아무런 SD 관계(정확하게는 SD의 2차 기준상)를 보여주지 않았다. 이로부터 本 分析이 목표했던 질문은 다음과 같은 답을 얻는다 : 충분히 광범위한 類型의 投資者集團(정확하게는 危險혐오투자자집단)에 있어서 保險附포트폴리오戰略은 한편으로, 危險投資戰略에 대해 독립적으로 效用을 갖으며 다른 한편으로는, 無危險投資戰略을 대체할 代案이 되지는 못한다. 그러므로 本 戰略은 實行에 있어서의 여러 문제점에도 불구하고 다른 기본적 투자 전략에 대해서 동등한 正當性을 갖추고 있다고 할 수 있으며 그 문제점들을 줄일 수 있는 적절한 실무적 보완을 통한다면 本 技法은 독자적으로 또는 병행적으로 자산의 포트폴리오 관리에서 유용한 효과를 발휘할 수 있을 것이라 판단된다.

참 고 문 헌

N. Doherty, "Stochastic choice in insurance and risk sharing", *Journal of Finance* (1977).

G. Hanock & H. Levy, "The efficiency analysis of choices involving risk", *Review of Economic Studies* (July 1969).

H. Levy, "Stochastic dominance," *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance* (1992).

D. Luskin, *Portfolio insurance - a guide to dynamic hedging* (1988).

T. O'Brien, "The mechanics of portfolio insurance," *Journal of Portfolio Management* (Spring 1988).

M. Rubinstein, "Alternative paths to portfolio insurance," *Financial Analysts Journal* (Jul.-Aug. 1985).