

# CHAOS

李逸均\*

## I. 緒論

도너츠와 커피잔이 같은 것이고 정사각형과 원이 같은 것이며 라틴 글자중 E와 F가 같은 글자라고 주장하는 사람이 있다면 그 사람을 어떻게 보아야 할까? 특히 그런 주장을 하는 사람이 학식 많은 사람이라면 그를 어떻게 대접해야 할까? 그러나 이 허구 같은 이야기가 실은 학문적으로 심도 있게 탐구되고 있다. 위상수학이 위와 같은 도형들을 연구하는 분야이다.<sup>1)</sup>

位相數學(topology)은 도형의 연속적 변형을 다룬다. 위상수학이 추구하는 성질은 位相同形이다. 위상수학은 도형의 성질을 파악하는 수학의 분야로서 무한한 변형이 가능한 고무판이 존재하면 고무판을 자유자재로 변형시킬 수 있고 이 변형된 모형들을 모두 동형으로 본다. 고무판을 이용하여 위상수학을 연구할 수 있으므로 고무판기하학이라고도 한다. 위상수학은 기하학적 관점에 파악할 때 길이, 각도, 면적, 모양이 마음대로 변해도 정해진 성질을 잃지 않을 때 동형이라고 보는 기하학이다. 정사각형은 연속적인 변형을 통하여 원으로 변형시킬 수 있다. 원은 타원으로

\* 韓國財務管理學會 會長 · 明知大學校 副總長

1) 위상의 정의는 다음과 같다.

$x$ 를 임의의 공간이 아닌 집합이라 하자.  $x$ 의 부분집합들의 모임  $\tau$ 가 아래의 조건을 만족하면 이 集合族  $\tau$ 를  $x$ 상의 하나의 위상(topology)라 한다.

1.  $\tau$ 의 임의의 元의 합집합이  $\tau$ 에 속한다.
2.  $\tau$ 의 임의의 유한개의 元의 교집합이  $\tau$ 에 속한다.
3.  $x$ 와  $\emptyset$ 가  $\tau$ 에 속한다.

이때  $\tau$ 의 元을 開集合(open set)이라 한다.

변형시킬 수 있고 또 삼각형으로 변형시킬 수 있다. 삼각형은 평형사변형으로 변형시킬 수 있다. 위상수학에서 연속된 곳은 연속된 곳으로, 분리된 곳은 분리된 곳으로 남아 있으면 그 형태가 변형되어도 같은 도형으로 본다. 따라서 정사각형, 원, 타원, 삼각형, 평형사변형이 모두 같은 도형이다. 위상수학에서는 고등학교에서 배운 기하학적 모형들이 대부분 한가지 모양으로 보인다. 그래서 도너츠와 커피잔도 동형이므로 이 두개를 구별할 줄도 모른다고 핀잔을 받기도 한다. 위상수학은 연속적으로 가역적 변형을 가해도 변하지 않은 모형의 성질을 연구하는 학문이다.

위상수학에서는 연속사상(continuous mapping), compact 空間(콤팩트 공간), 연결성(connectedness), 被覆(cover), 다양체(manifold), metric 등 많은 성질을 연구한다. 그런데 위상 동형여부가 중요시되고 그 크기나 위치는 중요시되지 않는다. 위상 동형이  $t$ 期에는  $A$ 지점에서 시작하고  $t + n$ 기에는  $K$ 지점에서 시작될 수도 있다. 이 두 도형은 위상수학의 성질을 갖추고 있으면 위상동형이 된다. 시계열에서도 구간을 적절하게 나누면 위상동형의 도형들이 존재할 수 있다. Chaos는 위상수학의 성질을 내포하고 있다.

자연의 불균형이 혼돈인가 아니면 그 불균형내에 질서가 존재하는가? 그러면 chaos는 어떻게 정의가 되는가? Chaos는 일반적으로 결정론적 계(deterministic system)에서 일어나는 확률적(무작위적) 운동(stochastic motion)이라고 정의할 수 있다. 결정론적 운동은 정확하고 확고한 법칙을 따르며 확률적 운동은 어느 측면에서 보면 법칙이 없는 것으로 보이기도 한다. 말하자면 chaos는 전적으로 법칙을 따르는 법칙이 없는 운동이라고 할 수 있다. 불규칙한 현상의 기하학적 구조가 일종의 chaos라 할 수 있다. 구름은 둥그렇지 않고 산은 고깔모양이 아니며 해안선은 원이 아니고 뚝배는 매끈한 곡선이 아니고 번개는 직선으로 결코 나아가지 않는다. 자연계는 구조적 불균형을 갖고 있다.

유클리드 기하학이 대칭(symmetry)을 전제로 하고 있는 반면 프랙탈 기하학(fractal geometry; 쪽거리 기하학)은 비대칭을 기반으로 하고 있다. 유클리드 기하학에서는 따라서 직선이 norm으로 중요시되며 프랙탈 기하학에서는 쪽거리(fractal)가 기본이다. 자연현상은 무한히 복잡(infinately complex)하다. 유클리드 기하학에

서는 자연현상을 직선의 개념으로 보기때문에 유클리드 기하학적으로 어느 대상을 그리면 그 대상을 완벽하게 복제할 수 없으며 近似的으로만 복제된다. 그러나 쪽거리(fractal)로 그리면 완벽한 복제가 가능하다. 이것은 전체의 작은 부분들을 점차 확대해 나감으로써 자기닮은(self-similar)사물이나 과정의 극한적인 극미소 구조를 발견하는 방법이다. 자기닮은 사물들은 특징적인 길이규모를 갖지 않는다. 이것들은 서로 다른 여러 측정 규모상에서 같은 모습으로 보인다. 삼각형, 원, 구, 원통등과 같은 유클리드 기하학의 형태들이 확대되면 그 구조를 잃는다. 원이 확대되면 평범한 직선이 된다. 원에서 점점 더작은 원호(arc)를 원래의 길이가 되도록 확대해 나가면, 점점 곡률이 줄어들어 직선으로 수렴해 간다. 이러한 수렴과정을 통해 원이 내포하는 무한소의 편평성(infinitesimal flatness)의 파악이 가능하며 근사적 자기닮음이 정확한 자기 닮음으로 전환되어 간다. 非標準數學(nonstandard mathematics)에 사용되는 무한소가 중요시되어 이 무한소를 다루는 미분방정식이 chaos에서 많이 연구되고 있다. 원을 확대하면 평범한 직선이 되듯이 지구도 인간이 아주 작기 때문에 편평하게 보인다. 넓은 범위의 규모에 걸쳐 상세한 구조를 계속 나타내는 사물을 기술하기 위한 거리가 쪽거리(fractal)이다. 이상적인 수학적 쪽거리는 무한 범위의 규모에 걸쳐 구조를 갖는다. 예컨대 해안선이 쪽거리에 해당된다. 해안선에는 만과 굽이 있고 각 만은 자기자신의 작은 만과 굽들을 갖고 있고, 이 작은 만과 굽은 다시 더 작은 만과 굽들을 갖고 있다.

유클리드 기하학에서는 차원(dimension)이 정수(integer)이다. 그러나 fractal의 세계에서 차원은 반드시 정수일 필요가 없다. 해안선은 fractal차원이 1.15와 1.25사이이다. 비유클리드 기하학이 유클리드 기하학을 내포하므로 프랙탈 차원이 유클리드 차원을 포함하는 것은 자연스럽다.<sup>2)</sup> 우주의 구조는 물질이 고르게 분포되어 있다는 의미의 균일함이 아니고 fractal분포의 측면에서 균일하다. fractal은 사물자체의 복제들로 쪼개진다. 즉, 반복되는 기하학적 형태인 것이다. fractal에서는 recursion 과정이 영원히 계속된다. 말하자면 전체와 동일한 형태가 전체 속에서 계속 반복된

2) 위상공간이 유클리드空間을 내포하는 것은 자연스럽다. metric은 두 점간의 직선인데, taxi-cab metric은 개략적으로 말해 택시가 달려간 거리를 의미한다. 종로1가에서 종로2가까지의 車道는 양자에 다같이 해당된다. 그러나 종로1가-돈화문은 taxi-cab metric이지 Euclidean metric은 되지 못한다. 위상수학에서 Euclidean metric이 정의되므로, 비유클리드 기하학이 유클리드 기하학을 포함한다.

다. Julia set나 Mandelbrot set<sup>3)</sup>를 컴퓨터로 그려 보면 이 사실을 명확하게 인식할 수 있다. mandelbrot 집합은 그 그림을 확대해 나가도 고도의 복잡한 구조를 그대로 지니고 있다. 자기 자신과 똑같은 복제를 담고 있다. 이 자기닮음, 그것이 바로 이 집합의 중요한 성질중의 하나이다. Mandelbrot의 집합경계에 있는 점을 택하여 근방의 조각들을 큰 규모로 확대하면 그 값에 대응되는 Julia set를 얻는다. 그 내부에 각각 작은 규모를 서로 안정되게 모여들게 하여 각각 자기만의 일정한 C의 값을 갖는, 모든 가능한 Julia집합이 존재한다.

재무관리에 대한 연구는 결정론적 입장에서 진행되어 왔다. 이 결정론적 구조를 파악하여 모형을 정립하였다. 이 모형을 통계적 방법을 사용하여 검정하여 현실 적합성 여부를 검증하였다. 그러나 위에서 본 바와 같이 결정론적 계 자체내부에 확률적 운동이 존재한다는 것이 chaos이론의 요체이다. 실증분석은 현실과 모형의 괴리현상, 주가나 주식수익률의 增幅性(volatility) 등을 비롯한 여러가지의 무작위성의 존재를 제시해왔으며, 이와 같은 점들을 파악하기 위하여 단순한 검증기법으로부터 고도의 기법에 이르기까지 광범위하고 다양한 방법론을 사용해 왔으나 현실을 만족스럽게 기술하는데 미흡한 감이 있으며 설명력과 예측력의 측면에서도 일탈의 정도가 컸다. 객관적으로 존재하는 세상의 완전한 법칙과 질서를 찾기 위해서 인류의 학문이 시작할 이래 엄청난 노력을 경주해 왔는데, 아직도 이에 대한 탐구가 근원적인 면에서 요청되고 있는 실정이 아닌가 하는 감이 든다. 재무관리에 나타나는 현실과 이론의 괴리현상은 전통적으로 연구에 적용해오고 있는 결정론적 사고에서 발생하는 것이고, 결정론적 chaos가 재무관리에 관찰되는 무작위성(randomness)의 많은 부분의 원인이 되는 것은 아닌가? 특히 증폭성에 대한 연구에서 암시하는 바는 자본시장의 운동이 규칙적인 고전계에 대응되는 것이 아니라 불규칙적 성향과 경향을 보이며 chaos적 계에 대응된다는 것이다.

위에서 논의한 프랙탈에 의하면 자기닮음(self-similarity), 장기기억, 반복특성,

3) Mandelbrot(1966)는 Brownian motion process를 중심으로 주가분석에 심도있게 적용한 바 있다. Julia set는  $Z \rightarrow Z^2 + C$ 와 같은 복소사상이다. C의 값을 고정하고 어떤 초기값 Z를 고정시키고 이 식을 되풀이시키면 급속히 무한대가 되고 나머지는 그렇지 않다. 반복사상을 해서 무한대가 되는 점을 특정 색으로 칠하고 그렇지 않은 점을 다른 색으로 칠하면 무한대가 되는 점의 유인영역(basin of attraction)을 그리게 된다. 유리아 집합은 그 경계가 C가 복소 평면상에서 움직일 때 주어진 C에 대한 유리아 집합이 맨델브로트 집합이다.

주기적(cycle)이 chaos에서 중요시된다. 자본시장이 이와같은 성질을 갖는다면 효율적 시장가설(efficient market hypothesis)는 재검토가 불가피하다. 자본시장이 chaos적이면 이 시장에서 생성되는 시계열은 chaos적 시계열이 될 것이며 자본시장의 움직임을 예측할 수도 있다. 왜냐하면 chaos에서는 시계열자료가 어떤 특정한 형태를 갖게 되며 이 시계열 데이터를 생성시키는 함수는 chaos의 운동법칙에 따라 움직이기 때문이다. 결정론적 chaos는 겉보기에 무작위적인 계이지만 이 확률적 계(random or stochastic system)에 숨겨진 구조가 존재한다는 것이 chaos의 요체이다.

자본시장을 포함한 금융시장의 증폭성(volatility)은 예측이 가능하다. 투자자가 증폭성과 위험에 반응하면서 투자활동을 전개해 나가는 시장에서는 자본자산의 균형 가격은 투자자의 위험기피와 더불어 증폭성의 예측에 반응하여 형성되어야 한다. 증폭성의 예측은 분산의 예측에 해당된다. 증폭성의 뭉침이나 집중화 현상(volatility clustering)이 재무와 금융시계열의 중요한 특성 중의 하나이다. 금융자산이나 자본자산의 가격이 크게 움직이면 다음에는 보다 크게 움직이는 성향이 존재한다. 움직임의 방향은 같은 방향인 경우도 있고 逆의 方向인 경우도 있다. 이와 같은 상황에서는 증폭성의 예측이 가능하며 이 예측에는 현재 이용할 수 있는 정보가 중요시된다. 현재의 정보를 비롯한 근래의 정보가 먼 과거의 정보보다 중요한지, 중요하다면 과거의 정보는 어떤 속도로 소멸해 가는지, 또는 과거의 정보는 영원히 존재해 가는 것인지, 나아가서 증폭성은 상향의 운동과 하향의 운동에 다같이 민감한지, 이와 같은 질문은 자본자산의 가격형성을 천착하는데 관건이 되는 문제인 것이다.

증폭성은 분산에 해당하며 이 분산은 이용가능한 정보에 바탕을 두고 추정한다. 따라서 확률변수다. 증폭성은 시간에 따라 변할 수 있어 異分散(heteroscedasticity)이며, 위험은 시간의 흐름에 따라 변한다. 특히  $E(y_t) = \mu$ 라 할 때 위험이나 증폭성은 시간의 흐름에 따라 변할 수 있다. 증폭성의 폭이 시간의 흐름에 따라 심하면  $E(y_t) = \mu$ 라는 가설은 오류일 가능성이 있다. 재무시계열에서  $E(y_t) = \mu$ 라는 가설이 오류라면 하나는  $E(y_t) = \mu_t$ 일 가능성이 존재하고 다른 하나는  $E(y_t) = \mu$ 도 아니고 동시에  $E(y_t) = \mu_t$ 도 아닌 제3의 형태의 가능성을 상정할 수 있다. 이 제3의 형태를

chaos라 볼 수도 있을 것이다. 결정론적 계의 확률적 운동(random motion)을 결정론적 계로 파악하는데서 발생하는 오류가 증폭성일 가능성도 배제할 수가 없다.

自己回歸 條件附異分散(autoregressive conditional heteroscedasticity; ARCH) 계통의 모형에서는 현재 이용가능한 정보집합을 조건으로 하는 조건부 평균과 조건부 분산을 기본으로 하여 조건부 분산을 추정한다. 잔차를 중심으로 그밖의 변수들도 도입하여 이들 변수와 조건부 분산과의 관계를 정립하여 조건부 분산을 추정한다. 이 모형들은 분산과 증폭성을 파악하고 이해하는데 큰 공헌을 해오고 있다. 그러나 ARCH 계통의 모형의 process가 결정론 계에서 무작위적인 것으로 보이는 운동을 규정하는 process와 동일하다고 주장하기도 어려우며, 이 주장의 타당성 여부를 밝히기 위한 연구가 필요하다. ARCH 계통의 모형들이 조건부 평균과 분산은 시간의 흐름에 따라 변하며, 그러므로 위험도 시간의 흐름에 걸쳐 변하고 있다는 주장과 근거를 제시하고 있는데, 이것은 자본시장을 이해하는데 큰 공헌을 이룩한 것이다. 이와 같은 발견은 재무와 금융을 비롯한 경제시계열이 chaos processes를 따를 가능성이 존재한다는 점을 제시하고 있다고도 해서할 수 있다.

본 논문은 chaos이론을 우리나라의 증권시장에 적용하여 실증적으로 자기닮음, 장기기억, 반복형태와 기간주기를 파악하는데 그 목적이 있다. Chaos를 재무관리분야나 경제학분야에 적용한 경우가 희소하여 이에 대한 천착은 어려운 실정이다. 그러나 chaos의 방법론을 재무관리분야에 채택·적용하지 않고 전통적인 시계열 분석을 비롯한 전통적인 실증분석을 사용한 많은 연구에서 chaos적 요소가 발견된 경우가 많다. 다만 이 연구들에서 발견된 것들을 chaos적 관점에서 이해하거나 파악하지 않고 전통적인 틀 속에서 해석하고 설명하려고 시도하고, 나아가 그와 같은 현상이 발견되었으므로 전통적인 틀 속에서 새로운 방법을 개발하여 이 현상을 설명하거나 해소하려는 노력이 경주되어 왔으며 또한 계속되고 있다. 이 논문에서는 이러한 발견들을 chaos적 관점에서 해석해 보고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 기존연구에서 발견된 여러가지의 재무적 특성들을 chaos적 틀 속에서 해석해 본다. 말하자면 이 절은 chaos적 관점에 입각한 기존문헌에 대한 조사와 재해석이라고 볼 수도 있다. 제3절에서는 프랙털

(fractal)을 중심으로 하는 자본시장의 움직임과 운동을 설명한다. 재무관리의 근본을 형성하는 효율적 시장가설이 프랙탈 구조에서는 어떻게 변형되며, 自己 類似性(자기 닮음), 충격의 장기기억, 반복과 주기 등을 심도있게 다루며 프랙탈은 어떠한 재무현상과 경제주체의 행동에 의하여 기인되는 가도 분석한다. 제4절에서는 chaos에 의하여 움직이는 process를 정립하고 실증분석을 위한 이 프로세스의 검정방정식을 유도한다. 제5절에서는 시계열 데이터와 실증분석을 제시하고 해석한다. 이 해석을 통하여 우리나라의 자본시장의 성질이나 특성을 천착하고자 한다. 끝으로 제6절에서는 결론을 제시한다.

## II. 非Chaos的 接近法에 의한 研究와 Chaos的 現象

財務管理의 理論과 模型은 모형에 도입되는 변수들이 Gauss 分布族(family of Gaussian distributions: Gaussian statistics)을 따른 다고 상정하여 정립되어 오고 있다. 모형의 정립에 Gauss 분포를 전제로 하지 않는 경우도 포함하며 재무관리의 이론과 모형의 현실적합성 여부를 검정하기 위한 실증분석에서는 거의 예외없이 이 모형에 사용된 변수들이 Gauss분포족에 속하는 변수라고 상정하여 검증을 수행하고 있다. 특히 異時的 模型(intertemporal model)이나 연속시간모형에서는 Brownian motion process가 전가의 보도처럼 working hypothesis로 애지중지되고 있는 실정이다. 현실의 재무현상을 분석한 결과 예측이 어렵다고 보이면 이 가설을 진리로 수용한다. Brownian motion process는 여러가지의 바람직한 특성을 갖고 있다. 함수를 정확하게 측정할 수 있고 확률도 계산할 수 있다.

Bachelier(1990)가 처음으로 資本市場이 無作爲 行步(random walk)를 따른다고 주장한 이래 效率的 市場假說은 무작위 행보와 martingale에 의하여 자본시장의 움직임을 파악하려는 방법론을 제시하였다. 무작위 행보 모형에 의하면 미래가격의 변

화는 과거가격의 변화로부터 추론할 수 없다. 관찰치들은 독립적이며 기껏해야 단기 기억을 갖을 뿐이다. 재무관리이론, 특히 재무 경제학(financial economics)은 효율적 시장가설을 전제로 받아 들이고 재무현상을 기술하고 설명하고 예측할 수 있는 모형을 정립하고 있다. 이와 같은 작업을 통해서 화폐시장과 자본시장의 움직임, 성질 및 행동을 파악하는데 많은 공헌을 이룩해 왔다. 특히 option의 가격을 결정하는 모형들은 option거래에 참여하는 사람들이 성공적으로 이용하고 있다. 그러나 이 모형들이 완벽한 것은 아니다. 현실과의 괴리현상이 보고 되고 있으며 이 괴리를 극복하기 위한 연구가 활발히 진행중이다.

효율적 시장가설은 Fama(1970)가 명확하게 보여 주고 있는바와 같이 기술적 분석(technical analysis)을 공격하기 위한 주요 무기였다. Fama와 French(1987), Poterba와 Summers(1987)는 장기적으로 주가를 예측할 수 있는 가능성이 있으리라는 것을 조심스럽게 제시하고 있다. Lo와 Mckinlay(1988)는 株價가 무작위 행보를 따르지 않는다는 점을 실증분석을 통해서 밝히고 있다. 資本資產 價格決定 模型(Capital asset pricing model)이나 市場模型을 이용한 분석에서는 異常現狀(anomalies)이 발견되고 있음이 보고 된 실정이다.

Fama(1965)와 李逸均(1989)은 미국과 한국의 주가에 대한 실증분석을 통하여 주가가 정규분포를 완벽하게 따르는 것은 아니라고 주장하고 있다. Fama는 월별주가가 월별주보다 정규분포로부터의 이탈정도가 크지만 모두 working approximation으로 정규분포를 따르고 있다고 보아도 무방하다는 결론을 내리고 있다. 李逸均은 월별주가는 working approximation으로 월별주가의 정규분포성은 인정할 수 있으나 일별주가는 정규분포성의 인정이 곤란하다고 주장하고 있다. 그는 일별주가가 정규분포에서 이탈하고 있는 것은 주식거래의 비동시성(nonsynchronerty)에 의하여 발생하고 있다는 조심스러운 주장을 전개하고 있다. Fama(1965) 역시 주가의 정규분포성을 주장하고 있으면서도 꺼림직한 점이 있었던지 stable Paretian distribution에 대한 연구도 동시에 진행하고 있으며 주가가 Pareto-Levy 분포를 갖을 가능성을 배제하고 있지 않다. Fama와 Roll(1968,1971)은 stable Paretion distribution을 집중적으로 연구하고 누적분포를 계산하여 제시하고 있다. Akgiray와 Booth(1988)는 주가가



symmetric stable Paretion이 아니라 asymmetric 分布를 형성한다고 주장한다. 반면 Loretan과 Phillips(1994)는 stable Pareto-Levy 분포를 지지하고 있다. 그런데 이 분포들은 분산이 무한하다. 재무관리에서 위험은 분산이나 표준편차로 이해되고 있으며 위험에는 가격이 부여되며 자산의 가격이 위험의 함수로 표시되고 있다. 분산이 무한이므로 분산이나 표준편차를 가격결정의 변수로 도입된 모형은 Gaussian hypothesis 를 포기하고 Pareto-Levy hypothesis를 도입할 때 난관에 봉착하게 된다.

이와 같은 난관을 극복할 수 있는 분야가 chaos 이론이 아닌가 생각된다. 전통적 이론에서는 모형의 구성이 deterministic 부분과 stochastic 부분으로 구성되었으며 determinism 이 지배한다. 그러나 fractal time 에서는 randomness 와 determinism, chaos 와 order가 존재한다. 또한 local randomness와 global determinism이 존재한다.

재무관리 분야에서 chaos에 대한 연구는 미미한 실정이다. 그러나 chaos적 관점에서가 아니라 전통적인 연구방법을 사용한 분석에서 chaos적 성질이 발견되고 있음이 눈에 띄었다. 이점을 살펴 보도록 한다. 그런데 이와 같은 사항은 단위근 분석과 ARCH계열 분석에서 두드러지게 나타난다. 먼저 單位根 分析을 Diebold와 Nerlove(1990)를 중심으로 살펴보고 다음에는 ARCH계열의 모형을 Bollerslev 등 (1992)에 의하여 분석한다. 이 두 논문에 익숙한 분은 이절을 띄워 넘고 다음 절을 읽어도 무방할 것이다.

시계열 분석에서 이동평균과정(moving average process; MA)인  $Y_t = \varepsilon_t + \theta_{t-1}$  에서  $\theta$ 가 양이면 자기상관이 양이다. 이 경우  $Y_t$ 의 값이 보통보다 크면  $Y_{t+1}$ 의 값이 평균 보다 크며  $Y_t$ 의 값이 평균 보다 적으면  $Y_{t+1}$ 의 값이 평균보다 적다.  $\theta$ 의 값이 음이면 자기상관이 음이다. 이 경우  $Y_t$ 의 값이 크면  $Y_{t+1}$ 의 값은 적다. MA(1)의 기억은 단기적이다.  $\varepsilon_t$ 가 Gaussian process를 따를 때 MA(q) process는 모든 적률에 대하여 ergodicity를 유지한다. q가 상당히 길면 MA(q)는 장기기억 process이다. 가장 최근의 p개 기간으로 부터 발생된 정보만을 보유하고 있다.

시계열은 단기기억 시계열과 장기기억 시계열로 나눌 수 있다. 단기기억 시스템

에서는 시계열에 가한 옛 충격(old shocks)이 오래 전에 발생하였다면 그 시계열이 현재값에 사실상 영향을 미치지 않는다. 그러나 장기기억 시스템속에서는 옛 충격들이 시계열의 현재값에 영향을 미친다. innovation series를  $\varepsilon_t$ 라 할 때 다음의 관계가 성립할 수 있다.

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

위 식에서 단기기억 시계열은  $j \uparrow$ 함에 따라  $a_j \rightarrow 0$ 이고 장기기억 시계열은  $j$ 가 상당히 크게 되어도  $a_j$ 은 0에 접근하지 않는다. AR(1)에서  $-1 < a < 1$ 이고  $\varepsilon_t$ 가 白色雜音過程(white noise process)일 때,  $\varepsilon_t$ 는 평균이 0이고  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0$  ( $k \neq 0$ )이므로 시계열  $x_t$ 는

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}$$

위에서  $\varepsilon_{t-j}$ 의 계수는 지수율(exponential rate)로 감소하며 0이 된다. 그러나  $a = 1$ 이면  $x_t$ 는 無作為 行步(random walk)로 데이터 생성함수는 다음과 같다.

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}$$

현재값  $x_t$ 를 결정하는데 옛 충격은 새로운 충격에 동일한 가중치로 영향을 미친다. 따라서 무작위 행보 과정은 장기기억 체계이다. ARMA모형은 일종의 무한기억 체계라 할 수 있다. 무작위 행보 모형에서 차분화(differencing)를 고려해 보자. 즉,

$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$  이 때  $\Delta x_t \varepsilon_t$ 이므로 백색잡음 과정이다. 따라서 단기기억 과정이다.  $z_t$ 를 단기기억 과정이라 하자. 즉,  $x_t = x_t - x_{t-1}$ . 그러면  $x_t = \varepsilon_{j=0} z_{t-j}$ 이다. 따라서  $x_t$ 는 이전의  $z_j$ 들의 합이다. 이 통합 시계열(integrated series)을  $x_t \sim I(1)$ 이라 할 수 있으며,  $x_t$ 를 1회 차분하면 단기기억 시계열을 얻는다.  $I(d)$ 는  $d$ 번 차분화할 때 단기기억 체계를 얻게 된다.  $I(0)$ 는 평균이  $\mu$ 이고 분산이 일정하다. 이 시계열은 자주 평균에 회귀하거나 평균을 가로지르는 성향을 갖는다. 평균에서 멀리 떨어진 값은 그 다음 평균에 접근하려는 성향을 갖는다. 이 평균값  $\mu$ 를 attractor라고 생각할 수 있다.  $I(1)$ 은 attractor가 없다.  $x_t$ 가 무작위 행보이고  $t$ 이후에 충격들이 모두 0이면  $x_{t+h} = x_t$  ( $h=1, 2, \dots$ )이다. 따라서 이 시계열은 현재값에 동결되며 어느 방향으로든지 이탈하려는 성향이 존재하지 않는다.  $I(0)$ 의 시계열은  $I(1)$  시계열보다 변동이 크다.  $I(0)$ 은 평균에 회귀하나  $I(1)$ 은 특정한 값에 회귀하는 경우가 거의 없다.  $I(1)$  충격이 영원한 영향력을 미친다.

산출량이나 고용과 같이 모집단의 크기와 연관을 맺고 있는 경제변수는  $I(1)$ 이다. 예컨대, GNP 시계열은  $I(1)$ 이다.  $I(2)$ 는 체중올로 증가한다. 시계열  $x_t$ 와  $y_t$ 가 각각  $I(1)$ 이고 이 두 시계열의 1차 결합이  $I(0)$ 이고 평균이 0이면  $x_t, y_t$ 는 공적분 관계를 갖는다.  $x_t, y_t$ 가 각각  $I(1)$ 이면 점들  $(x_t, y_t)$ 는  $x - y$  평면에서 움직임이 넓다.  $Z_t = x_t - Ay_t$ 라 하고,  $\tilde{Z}_t = x_t - \cos\theta \cdot Z_t$ 로 점  $(x_t, y_t)$ 로 부터 직선  $x = Ay$ 까지 거리로서 직교(orthogonal)한다고 하자.  $Z \sim I(0)$ 로서 평균이 0이면  $\tilde{Z}_t$ 도 동일하다.  $\tilde{Z}_t \sim I(0)$ 이 평균이 0이므로 점들이 이 직선 주위에 모여려는 성향이 있고 이 직선이 attractor로 활동하려는 성향이 존재한다. 따라서 공적분이 attractor가 존재하기 위한 충분조건이다.

시계열이  $I(1)$ 이면 이 시계열에 가해진 충격들은 그 효과가 영원하다. Black Monday는 주가 시계열에 영원히 존재하고 있을 것이다.  $I(1)$  시계열은 1회 차분하면 定常性(stationarity)을 확보한다. 그러므로 이 시계열은 單位根(unit root)을 1개 갖어야 한다. 무작위 행보 시계열은 1차 차분화하면 정상적 시계열이 된다. 그러나

다음의 시계열을 보자.

$$y_t = \rho_t y_{t-1} + u_{1t}$$

위에서  $|\rho_t| > 1$ 이다. 그러면

$$y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = (\rho_1 - 1)y_{t-1} + u_{1t}$$

위에서  $\Delta y_t$ 는 정상성을 보유하고 있지 않다. 이 시계열은 정상과정(stationary process)  $u_{1t}$  뿐만 아니라 非定常過程  $y_{t-1}$ 에도 의존한다. AR(1)이 계수가 1이면 I(1)이다. 그러나 계수가 1.01이면 I(1)이 아니다. 왜냐하면 차분화해도 이 과정이 정상성을 확보하지 못하기 때문이다. 여기에서 단위근에 대한 검정이 요청된다.

비정상성 시계열은 차분화를 통하여 정상성을 획득한다. AR과 MA를 차분화를 통하여 결합시킨 것이 ARIMA이다. ARIMA 과정은 차분화를 통하여 정상성을 획득할 수 있는 同次非定常過程 이다. ARIMA(p, d, q)모형은 差分母數 d가 정수이다. ARIMA는 非正常的 時系列을 차분화를 통하여 정상 시계열로 변환시키며 AR과 MA를 결합시킨 중요한 모형이다.

그런데 fractal을 고려할 때 d가 반드시 정수일 필요가 없다. Hosking(1981)은 차분모수를 정수 대신 분수도 가능케 확대시킨 ARFIMA(autogressive fractionally integrated moving average)모형을 제시하였다. ARFIMA(p, d, q)에 d는 반드시 정수에 한정되는 것이 아니고 임의의 실수이다. ARFIMA 모형은 잡음을 분수로 파악하여 (fractional noise) 시계열의 persistent와 nonpersistent한 움직임과 행동을 일반화시킬 수 있다. ARFIMA(0, d, 0)는 fractional Brownian motion이다. ARFIMA는 단기의 AR이나 MA를 포함시킬 수 있다. ARFIMA(0, d, 0)의 특성을 살펴 보자. k를 時差,  $a_t$ 를 평균이 0, 분산이  $\sigma_a^2$ 인 백색잡음(white noise)다.  $d < 0.50$ 이면 시계열  $\{x_t\}$ 는 정상과정(stationary process)이고 有限 MA로 표현된다.<sup>4)</sup>

---

4)  $x_t = \psi(B)a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k}$

이 ARFIMA 모형은 chaos 분석과 시계열의 장기기억을 파악하는데 유용한 모형이다. ARFIMA(p, d, q)의 p와 q에 값에 따라서 AR과 MA의 단기기억과 장기기억의 혼합도 파악할 수 있는 성질을 갖고 있어 시계열의 persistency나 nonpersistency, 그리고 기간주기를 판별하고 재무 시계열의 성질을 파악하는데 효율적 분석의 틀을 제공한다. 특히 이자율에 이 모형을 이용하면 이자율의 기간구조와 위험구조를 결합시키는 성질을 파악할 수 있으리라고 생각되며, 이자율의 기간구조가 주기를 갖고 있는지의 여부도 분석이 가능하리라. 현재에서는 이자율의 기간구조에 대한 주기는 연구된 바가 전혀 없으므로 이 주기에 대한 연구도 절실히 요청되고 있는 실정이다. 뿐만 아니라 다른 재무 시계열에도 Fama와 French(1985)와 Poterba와 Summers(1987)도 주기의 가능성을 암시하고 있어 이 ARFIMA 모형을 사용하여 재무 시계열의 주기성을 파악하는 것은 중요하다고 할 수 있다.

ARFIMA는 시계열의 빈도수 낮은 빈도 행위를 설명하는데 타당한 모형이다. ARFIMA의 특수한 경우가 ARIMA이다. 경제시계열은 원점에서 무한 인 것처럼 보이는 分光(spectra)을 갖고 있어 차분화가 요구된다. 그러나 차분화된 시계열은 원점에서 power가 전무하다시피하여 과분한 차분화가 발생한다. 그와 같은 시계열의 움직임은  $0 < d < 1$ 의 fractionally integrated series의 특성을 갖는다. 순수 소수통합시계열의 T개 시계열 관찰의 부분합을  $S_T$ 라 하자. 그와 같은 부분합의 분산의 증가는 d에 의존하며 분산은  $\text{Var}(S_T) = O(T^{1+2d})$ 가 된다. 따라서 예컨대  $d = 0$ 로서  $S_T$ 가 무작위행보이면 분산은  $O(T)$ 로 증가한다. 시계열  $\{x_t\}$ 에서 K번째 차분화한 시계열의 분산이 K의 함수로서  $\sigma_{k^2} = f(K)$ 라 하자. 그러면  $f(K) = O(K^{2d-1})$ 이 된다. 따라서  $d < \frac{1}{2}$  이면 分散時間函數(variance time function)는 평평하고(flat),  $\frac{1}{2} < d < 1$  이

---

위에서

$$\psi_k = \frac{d(1+d)\cdots(k-1+d)}{k!}$$

위에서  $k \rightarrow \infty$  함에 따라

$$\psi_k \approx \frac{k^{d-1}}{(d-1)!}$$

거나  $1 < d < 3/2$ 이면 분산함수는 각각 감소효과증가율로 성장한다.  $\{x_t\}$ 가 순수한 소수통합과정이 ARFIMA(0, d, 0)이 아니고 ARFIMA(p, d, q)이면 분산시간함수의 움직임은 평균 K에 대하여 위와 같은 성질을 보유한다.<sup>5)</sup>

주식수익률이나 외환율과 같은 자산가격의 장기적 평균회귀, 총산출량에 대한 충격의 영원한 효과와 같이 재무금융 시계열에서 persistence가 존재한다. 예컨대 이와 같은 persistence 효과는 인간자본의 축적, 물리적 자본의 축적유형, 조정비용, 계약, 습관형성 등을 포함한다. persistence가 경제실체의 근본적 사실이다. 단위근 모형과 소수통합모형은 persistence의 성질을 파악하기 위한 모형이다. Granger(1980, 1988)에 의하면 ARFIMA는 총량화(aggregation)의 효과때문에 거시경제 시계열에서 발생한다. 이 모형은 다음 장에서 분석할 Hurst(1951)모형과 같은 맥락을 갖고 있다.

이 논문의 검정모형으로 제4절에서 분석의 대상이 되고 Hurst-Mandelbrot

5)  $d > -0.50$  이면  $\{x_t\}$ 는 可逆(invertible)하고 무한 AR의 표현을 갖는다.

$$\begin{aligned}\pi(B)x_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k x_{t-1} \\ \pi_k &= \frac{-d(1-d) \cdots (d-1-d)}{k!} \\ &= \frac{k-d-1}{k!(d-1)!}\end{aligned}$$

위에서  $k \rightarrow \infty$  함에 따라

$$\pi_k \approx \frac{k^{-d-1}}{(-d-1)!}$$

시계열  $\{x_t\}$ 의 分光密度(spectral density)는

$$s(w) = (2 \sin w/2)^{-2d}, \quad 0 < w < \pi$$

시계열  $\{x_t\}$ 의 공분산 함수는

$$\gamma_k = E(x_t x_{t-k}) = \frac{(-1)^k (-2d)!}{(k-d)!(-k-d)!}$$

그리고  $x_t$ 의 상관계수함수는  $k \rightarrow \infty$  함에 따라

$$\rho_k \approx \frac{(-d)!}{(d-1)!} k^{2d-1}$$

$\{x_t\}$ 의 逆相關은

$$\rho_{inv,k} \approx \frac{-d!}{-(d-1)} k^{-1-2d}$$

그리고  $\{x_t\}$ 의 편상관은

$$\phi_{kk} = \frac{d}{k-d}, \quad k = 1, 2, \dots$$

fractional Brownian motion은 다음과 같다.

$$X_t = \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(S)$$

위에서  $B(S)$ 는 Brownian motion이고  $H$ 는 Hurst 계수로서 開單位期間內에 존재한다.  $H$ 는 Mandelbrot(1972)의 尺度再定方法에 의하여 구할 수 있다. 母數가  $H$ 인 Fractional Brownian motion은 ARFIMA(0,  $H^{-1/2}$ , 0)과 같다.

Beveridge와 Nelson(1981)은 단위근을 갖는 시계열은 確率的 趨勢(stochastic trend)와 평균이 0인 定常 時系列로 분할하여 그 합으로 표시할 수 있음을 제시하였다. 일반적으로 추세(trend)는 非確率的(deterministic)인 것으로 간주되었다. 인구, 기술, 자본축적 등과 같은, 장기추세를 결정하는 요인들은 확률적이라고 할 수 있다. Nelson과 Plosser(1982)가 지적한 바와 같이, 총산출량에 대한 추세정상성(difference stationarity)은 경기변동의 존재여부와 성질, 이시적 대체의 가능성, 충격의 지속성(persistence) 등에 의미하는 바가 서로 다르다. 단위근의 존재는 경제에 가해진 충격(shocks)이 시간의 흐름속에 존재한다는 것을 의미한다. 單位根은 경제적 충격이 영원한 성질을 갖는가 일시적 성질을 갖는가를 판별하는데 유용하다. 충격의 지속성 여부를 판단하는데 중요한 역할을 담당한다.<sup>6)</sup> 충격의 지속성은 cumulative impulse response와 근본적으로 연결된다는 사실을 지속성의 파악의 전제조건으로 삼고 있다.

共積分(cointegration)과 오차수정(error correction) 모형은 단위근과 밀접하게 연관되어 있다.<sup>7)</sup>  $n$ 次元 벡터 시계열  $x$ 가  $x \sim CI(1, 1)$ 이면 error correction

6) 충격의 지속성 여부를 판별하는데 많이 사용되고 있는 기법은 Cochrane(1988)의 정규화 분산비율이다.

$$V_k = [1/(k+1)][\text{var}(x_{t+k+1} - x_t)/\text{var}(x_{t+1} - x_t)]$$

지속성은  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = V$ 로 측정하며  $V = 0$  이면 추세정상성이고  $V = 1$  이면 무작위행보이다.

7)  $n$ 차원 벡터 시계열  $\{x_t\}$ 는 다음의 형태를 갖을 때 error correction representation을 갖는다.

$$A(L)(1-L)x_t = \theta z_{t-1} + u_t$$

위에서  $u_t$ 는 정상적 多變量攪亂이다. 그리고  $A(0) = I$ ,  $A(1) < \infty$ ,  $\theta$ 는 非零,  $z_t = a'x_t$ 이다.  $X$ 의 모

representation이 존재한다. 공적분의 검정은 추정된 시계열의 단위근을 검정하는 문제로 축소된다. AR polynomial에 단위근이 존재한다는 사실에 입각하여 integration in variance를 통하여 IGARCH가 정립된다. 시계열의 분산의 지속성이 존재하고 있다는 점을 제시하고 있는데 이 모형의 특징이 있는 것이다.

Poterba와 Summers(1986)는 주식시장에 던져진 충격은 단기적이라고 주장한다. 그러나 Chou(1988)는 GARCH(1, 1)-M모형을 사용하여 증폭성(volatility)의 지속성을 검증해 본 결과 증폭성 충격의 平均特性이 약 1년이라는 점을 밝혔다. 이것은 변동 위험 프리미엄의 가설과 일치한다.

French, Schwert 와 Stambaugh(1987) 등을 비롯한 미국의 증권시장에 대한 실증 분석을 통하여 얻은 연구에는 分散에 1개의 單位根이 존재하고 있음을 발견되었다. 조건부 분산의 지속성이 강하고 outliers 나 지극히 큰 충격들은 통상적인 충격과는 다른 동태적 효과를 나타내고 있다. 분산의 지속성은 기업의 규모와 관계를 맺고 있으며 소규모기업이 대규모기업보다 지속성이 낮다.

재무·금융 시계열을 비롯한 경제시계열이 결정적 과정과 확률적 과정의 결합으로 파악되고, 확률적 과정은 평균이 0이고 유한의 분산을 갖는 정규분포를 따른다는 가정하에 시계열 모형을 정립하고 경제현실을 분석하여 미래를 예측할 수 있는 모형을 정립하는데 노력이 경주되었다. 그러나 단위근의 존재여부, 공적분과 error correction 등 많은 연구에서 결정적 과정 그 자체도 단순하게 파악할 수 있는 것이 아니라는 것이 입증되었다. 결정적 과정을 이룬다고 생각되던 시계열내의 부분도 확률적 과정을 따르거나 분산과 깊은 연관을 맺고 있다는 분석이 제시되었다. 따라서 경제시계열에서 確率的 非定常性的의 성질과 범위가 중요시 되었다.

과거 시계열 분석에 線型的의 趨勢가 가정되었으나 단위근을 가정하여 정상성을 확보하기 위하여 차분화를 시행하였다. 이 과정을 통하여 결정적 및 확률적 추세가 동시에 작용하며 확률적 추세가 존재하면 이 추세는 차분화를 통하여서도 제거할 필요가 없다는 것이 제시되었다. 공적분에 관한 연구에서 제시된 바와 같이 무비판적인

---

든 성분이 integrate 계수 d로 integrate 되고  $Z_t = \alpha'X_t$ 로써 Z가  $d - b(b > 0)$ 로 integrate되면, 즉  $x - I(d, b)$ 이면 이 시계열은 계수 d와 b로 공적분된다.



차분화는 단위근이 존재하는 시계열에서도 상당한 해독을 야기시킬 수 있음이 제시되었다. 확률적 추세는 현실을 파악하고 미래를 예측하는데 중요시 되므로 low-frequency dynamics에 대한 연구가 요청된다. 이런 점에서 ARFIMA가 앞으로 주목을 받게 될 것이다. 그리고 Diebold와 Nerlove(1990)가 주장한 바와 같이 확률적 추세에 대한 연구가 시계열 분석에 상당한 신뢰를 얻고 있는 실정이다. ARCH 계통의 모형은 자본자산 가격의 변동의 조건부 분산을 서술하고 시간의 흐름에 따라 변하는 위험에 대한 프리미엄을 모형화하는데 유용하다. 자본시장에서 조건부 분산함수에서 단위근들이 발견된다.

불확실성은 현대재무이론의 중심과제이다. 자본자산의 불확실성은 공분산으로 측정되며 위험에 대한 프리미엄은 자본자산의 미래수익과 benchmark 포트폴리오와의 공분산으로 표현된다. 위험에 대하여 프리미엄이 존재하므로 위험은 시장에서 그 가격이 형성된다. Mandelbrot(1963)와 Fama(1965)는 이미 오래전에 분산과 공분산으로 측정되는 자본자산 가격의 불확실성이 시간의 흐름에 따라 변하고 있다는 점을 지적한 바 있다. 시간의 흐름에 걸쳐 변하는 분산과 공분산 모형에 도입한 시계열 모형이 Engle(1982)의 자기회귀 조건부 이분산 모형(autoregressive conditional Heteroscedasticity model ; ARCH model)을 중심으로한 ARCH 계통의 모형들이다.

시계열의 분산이 시간의 변화에 따라 이분산을 이 시계열의 과거의 값의 제곱의 1차함수로 표현한 것이 ARCH 모형이다.<sup>8)</sup> 시계열이 재무·금융 시계열인 경우 增幅性(volatility)이 集中化(cluster)되는 현상, 즉 t期에 가격이 크게 변하면 t + 1期에도 가격이 크게 변하나 부호가 양인지 음인지는 예측할 수 없는 현상을 제시한다. Engle과 Mustafa(1992)를 비롯한 학자들의 연구에서 ARCH 모형을 주식시장에 성공적으로 적용할 수 있으며 증폭성의 집중화 현상이 발견되었음이 제시되고 있다. 나아가서 주말효과 역시 ARCH에 의하여 인식이 된다. 사건(events)은 주식의 변동성의 변화와 연결되므로 사건연구(event studies)에서도 ARCH가 사용된다. 요컨대 ARCH는

8) 시계열을  $\{\varepsilon_t\}$  할때 ARCH(q)모형은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_t^2 = w + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

위에서  $w > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ 이고 L은 時差因子(lag operator)이다.

시간에 따라 변동하는 위험에 대한 프리미엄(time-varying risk premium)을 발견하는데 중요한 역할을 담당하고 있다. 결정적 카오스(deterministic chaos)에서도 유사한 결과를 제시하고 있다. Brock, Dechert와 Scheinkman(1987)는 결정적 카오스를 주식수익률의 非線型性和 연결시키고 있는데 ARCH효과를 제거한 표준화된 잔차에 대하여 검정한 결과 비선형적 의존성의 증거가 별로 없음이 밝혀지고 있다. 여기에서 카오스와 ARCH와의 관계의 정립이 요청된다고 할 수 있으리라.

시계열의 분산이 시계열의 제곱 뿐 만 아니라 과거의 시계열의 분산에도 의존하는 형태가 Bollerslev(1986)의 GARCH(p, q)모형이다.<sup>9)</sup> 재무관리에서 이론적 모형은 연속시간의 틀 안에서 정립하고 이 모형에 사용할 데이터는 이산시간으로 수집된 것이다. Nelson(1990)에 의하면 표본주간(sampling interval)이 적으면 GARCH(1, 1)은 연속시간 diffusion 모형으로 수렴한다는 점을 보여주고 있다. GARCH 모형에서 분산은 시계열의 크기에만 의존하고 시계열의 부호에는 의존하지 않는다. Leverage effect가 존재하는 주식시장에서는 이 모형을 이용하기가 어렵다. Nelson(1990)은 이 점을 모형에 도입한 Exponential GARCH 모형을 제시하고 있다.<sup>10)</sup>

Fama(1965)와 이일균(1988)은 주가의 분포를 검토 분석한 바 skewness와 kurtosis가 존재하고 있음을 밝힌 바 있다. Engle와 Gonzales-Rivera(1991)는 규모가 적은 기업의 일별주가수익률을 분석하기 위한 모형정립에 GARCH(1, 1) 모형을 사용한 바, skewness와 kurtosis가 조건부 밀도함수의 특성을 구성하는데 중요시 된다는 점을 발견하였다. ARCH 효과는 시계열적으로 상관성이 있는 뉴스에 의하여 발생할 수도 있다. 전형적으로 GARCH(1, 1), GARCH(1, 2), GARCH(2, 1), ARCH(3) 등이

9) 이 모형은 다음의 형태를 갖는다.

$$\sigma_t^2 = w + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

위식을 변형시키면 AR모수를  $\alpha(L) + \beta(L)$ , MA모수를  $-\beta(L)$ , 그리고 시계열적으로 상관성을 갖지 않는 innovation수열  $\{\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2\}$ 을 갖는,  $\varepsilon_t$ 에 대한 ARMA로 GARCH모형을 설명할 수 있다.

10) EGARCH(p, q)은 다음과 같다.

$$\log \sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left( \phi z_{t-1} + \gamma [ |z_{t-1}| - E |z_{t-1}| ] \right) + \sum_{i=1}^q \beta_i \log \sigma_{t-i}^2$$

GARCH에서는  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 가 조건부 분산의 非陰이 되도록 제약조건이 부과되는데 여기에서는 그와 같은 제약조건이 부과하지 않는다.

실증분석에서 이용되는데 소수의 모수로서 장기표본기간의 分散의 增幅性을 모형화하고 있다.

시계열의 분산에 중점을 두는 ARCH, GARCH와 EGARCH와는 달리 條件附 平均이 시계열 과정의 條件附 分散의 명시적 함수로 표현한 모형이 Engle, Lilien과 Robins(1987)의 ARCH-M 모형이다.<sup>11)</sup> ARCH-M 모형은 자본자산의 가격을 결정하는 여러 모형들의 실증적 분석에 많이 이용되었다. Baillie와 DeGennaro(1990)는 일별 및 월별 포트폴리오 수익을 이용하고 조건부 분포를 정규분포에서 t-분포로 바꾸어 사용하였던 바, 평균방정식에 도입되는 조건부 분산의 값이 5% 수준에서 양수로 유의하던 것이 유의하지 않고 부호가 바뀌었음을 발견하였다. Glosten 등(1991)의 연구에 의하면 ARCH-M의 계수는 이 모형의 평균과 분산방정식에 추가되는 도구변수(instruments)에 민감하다는 것을 알게 되었다. Lamoureux와 Lustrapes(1990)는 ARCH 效果는 거래량의 clustering에 의하여 발생한다고 주장한다. Campbell(1987)은 명목 이자율이 증폭성의 중요한 부분을 결정한다고 주장한다. 주식수익률의 증폭성은 배당율, 화폐공급량(M1) 등에 의하여 발생한다는 연구가 있으며 Schwert(1989)는 경기변동과 financial crisis와 연관이 있다는 가설을 제시하고 있다.

Engle, Lilien과 Robins(1987)는 T-bill의 분기별 데이터에 ARCH-M을 이용하여 시간의 흐름에 따라 변동하는 위험에 대한 프리미엄을 조건부 분산의 로그(logarithm)에 의하여 대표값으로 정하게 되었다. 그런데 초과수익률을 예측하는 중요한 역할을 담당하는 것으로 인식되었던 변수들이 조건부 분산함수를 회귀방정식에 도입할 때 유의성이 없음을 발견하였다. Morgan과 Neave는 선물 수익은 그 자체의 조건부 표준편차에 의하여 선형적으로 결정된다는 모형을 정립한 후 실증분석을 수행한 바, 이 모형이 입증되었으나 요일효과와 단기이자율 수준 역시 선물의 수익을 결정하는데 중요한 요인임을 발견하였다.

단위근과 ARCH계열의 모형들을 살펴 보면서 얻을 수 있었던 것은 전통적 방법에

11) ARCH-in-Mean 모형은 다음의 형태를 취한다.

$$y_t = g(x_{t-1}, \sigma_t^2; b) + \varepsilon_t$$

이 모형에서 조건부 분산의 증가는  $\sigma_t^2$ 에 대한  $g$ 의 편도함수의 부호에 따라  $y_t$ 의 조건부 평균의 증가 또는 감소와 연관을 맺는다.

의하여 정립된 이 모형들이 chaos적 현상이 존재할 수도 있음을 제시한데 있다. 분산이 시간에 따라 변하고 위험이 시간에 따라 변한다. 평균도 시간에 따라 변한다. 그렇다면 결정론적 계의 무작위성 운동에 의하여 자본시장을 비롯한 경제현실을 기술하고 설명하고 예측할 수도 있다는 암시를 도출할 수가 있다.

### III. 프랙틀 市場假說

앞절에서 천착해 본 單位根과 ARCH 계통의 모형들을 설립하면서 건진 중요한 결론은 재무와 금융을 비롯한 경제시계열이 결정적 부분(deterministic component)와 확률적 부분(stochastic component)의 단순한 결합이 아니라는 사실이다. 확률적 부분에도 정교한 모형이 요구되고 있지만 결정적 부분에도 정교한 분석의 틀이 필요하다는 것을 인식하지 않을 수 없다. 결정적 부분이라고 인식되어온 부분도 결정적 추세와 확률적 추세라는 두 부분으로 분할이 가능할 수도 있고, 나아가 그 전체가 하나의 부분으로 확률적 추세를 형성하고 있다는 점도 밝혀졌다. 단위근에 대한 연구와 ARCH 계통의 연구는 소위 결정론적 부분이라고 인식된 항에 대하여는 차분과 같은 약간의 조정을 거친 후 고려 대상에서 제외하고 주로 소위 확률적 부분이라는 項에 집중적 공략을 수행하여 왔다. 이와 같은 분석을 통하여 얻은 결론은 장기 시계열내에 충격에 대한 장기기억이 존재하고 무조건부 분산이나 조건부 분산의 증폭성(volatility)이 존재한다는 점이다.

차분화(differencing)는 시계열의 움직임과 운동과 행동을 이해하는데 중요한 개념이다.  $t$ 기와  $t + 1$ 기의 시계열의 행동에 차이가 있다면 그 차이는 차분을 통하여 인식된다. 이 차분의 값이 원하는 성질을 갖지 않을 때 원하는 성질을 확보하기 위하여 그 성질을 발견할 때까지 계속해서 차분을 수행한다. 그러면 그 결과 이룩된 차분의 값은 일반적으로 인식된 확률적 부분의 성질을 구비하게 될 것이다. 그러나

만약 시계열이 chaos적 성질을 갖고 있으며, 이 시계열의 自體同形이나 自體類似性 (self-similarity)을 구비하고 있으며<sup>12)</sup>, 일정한 법칙에 의하여 진행되어 가면서 자체 유사성을 형성해 간다면 계속적인 차분화를 통하여 진행법칙이 형성해 낸 부분을 제거시킬 수도 있다. 그럴 경우 확률적 교란항은 통상적인 성질을 구비할 수 있을 것이다. 이 때에는 일반적인 계량 경제학적 분석으로 충분하다. 그러나 chaos의 진행법칙이 차분화의 과정에서 모두 흡수 제거되지 않으면 차분화의 결과로 얻은 시계열은 복잡한 형태의 변동성(variability)이나 증폭성(volatility)을 형성할 가능성이 높다. 이 증폭성이 단위근 분석과 공적분 분석에서 집중적으로 발견되고 있다고 볼 수도 있다.

조건부 이분산을 모형화한 ARCH 계통의 분석에서도 유사한 논의를 진행시킬 수 있다. 시계열이 定常性(stationarity)을 형성하고 있으면 일반 시계열 분석에 의하여 그 성질과 특성을 파악할 수 있다. 그러나 조건부 이분산은 현재 가용한 정보를 조건으로 하는 분산이 시간의 흐름에 따라 변하는 과정이 집약된 것이다.  $t$ 기의 시계열은  $t-1$ 기의 시계열과 함수관계를 맺는다. 물론 조건부 분산을 통하여 이 두 시계열이 상관성을 맺고 있다. 그런데 이 시계열이 chaos 과정을 따르게 되면 그 법칙에 의하여 시계열이 발전해 가며 일정한 시일이 흐른 뒤에는 처음 시작한 점과 동일한 점을 형성하게 될 것이다. 물론 이 두점의 위치는 상이할 수 있다. 그러나 위상수학(topology)의 이론을 빌리면 이 두점은 동일하다. 이 시계열은 이 점에서의 同形을 형성하기 위하여 chaos의 법칙에 따라 행동해 나갈 것이다. 이 chaos법칙을 조건부 이분산이 모두 흡수하거나 반복할 수 있으면 ARCH계통의 분석은 현실을 제대로 분석해 내리라. 그러나 이 양자의 법칙간에 차이가 발생하면 ARCH계통의 모형에서 제시하는 분산은 변동성과 증폭성을 강하게 포출할 가능성이 높다. 여기에서 증폭성의 지속성이 제시된다.

시계열의 條件附 異分散과 기대값을 결합시킨 GARCH-M 모형은 결정적 부분으로 인식되었던 곳이 확률적 부분이라는 점을 극명하게 제시한 모형이다. 말하자면 시계

12) 위상수학에서는 이어진 부분이 분리되지 않고 떨어진 부분이 이어지지 않으면 하나의 형태를 어느 형태로 변형시켜도 동상이라고 본다. 원을 늘려서 타원을 만들어도 위상동형이다.

열 그 자체가 현재 이용한 정보를 조건으로 하여 생성되는 분산에 의하여 결정되며 이 시계열 값은 분산의 함수이다. 이 모형의 장점은 시계열의 기대값이 확률적으로 결정된다는 점을 명확히 제시하고 있다는 것이다. 이 모형은 어느정도 chaos적 접근을 용인하고 있다. 그러나 chaos의 법칙과 이용 가능한 정보집합에 의존하여 구하는 조건부 이분산의 법칙이 동일한가의 여부는 아직 밝혀지고 있지 않은 형편이다. 더구나 이 모형에 의한 자본시장과 금융시장에 대한 분석은 현실과의 적합성을 제대로 제시하지 못하고 있는 증거도 제시되고 있는 실정이다. 따라서 chaos의 법칙과 조건부 이분산의 법칙이 일치하고 있다는 보장을 제시하기가 어렵다.

근래의 괄목할만한 시계열 분석방법의 성과인 단위근, 공적분과 ARCH 계통의 모형은 재무와 금융을 비롯한 시계열의 분석에 큰 공헌을 이룩하여 왔다. 특히 경제적 충격에 대한 장기기억과 지속성의 존재여부를 파악하고 증폭성의 지속성을 인지하고 설명하는데 큰 공헌을 담당해 왔다. 뿐만 아니라 자본자산의 가격을 결정하는 메카니즘(mechanism)을 보다 명확하게 인식할 수 있게 해줌으로써 자본자산의 가격결정을 모형화하는데 큰 도움을 줄 수 있다. 그러나 이 분석방법들은 자본시장을 움직이는 원동력을 완벽하게 제시하고 있지 못하다. 동일한 형태를 어느 모형에서는 파악해내고 다른 모형에서는 그와 같은 형태가 존재하지 않고 있다는 증거를 제시하기도 한다. 이 모형들에 다른 설명변수를 도입하면 그 설명변수들이 설명력을 획득하는 반면 원래의 변수들이 설명력을 잃는 경우도 많다.

이 모형들이 제시한 중요한 발견중의 하나는 전통적인 분석에서 중요시되는 확률적 과정을 이루는 확률교란항과 더불어 통계적 분석이 끝나면 결정적인 변수로서의 역할만 담당한다고 치부된 결정적 부분에도 상당한 중요성을 부여한 것이다. 여기에 결정적 부분의 중요성이 인식된 계기가 제공되었다. 특수연구(ad hoc studies)에서는 이 결정적 부분이 어떤 실물변수에 의하여 결정되는가에 초점이 주어 졌고, 자본자산의 가격을 결정하는 모형들에서는 위험이라는 변수가 결정적 부분을 형성한다고 인식되었다. 그런데 시계열에서는 이 결정적 부분이 현재 이용가능한 정보집합으로 파악되었다. 현재의 정보집합은 시계열의 현재값도 포함되므로 결정적 부분을 확률적 부분으로 인식하여 모형을 개발할 때 설명력과 예측력이 높으리라고 생각하는 것

은 자연스러운 발상이다. 이에 따라 결정적 부분에 대한 분석이 중요성을 갖게 된다. 소위 결정론적 부분을 결정적인 것으로 인식된 것은 잘못이며 확률적으로 인식되어야 할 것이다. 이와 같은 체제를 설정한 후 이 체제를 분석하는 것은 가능한 연구방법 중의 하나이며 활발한 논의와 연구가 요청된다. 그러나 이 부분이 확률적 과정을 따르지 않고 chaos적 과정을 따르고 있다는 가설도 성립될 수 있다. 증폭성을 분석한 여러방법들, 특히 단위근, 공적분과 ARCH형 분석을 통하여 얻은 결과들은 chaos적 과정에 의하여 결정적 부분이 형성된다는 가설을 뒷받침해 주고 있다. chaos적 접근법은 그 이외의 각종 모형에서는 발견하지 못하고 있는 주기(cycle)를 제시하고 있다. chaos는 위상수학적 의미의 자체동형 또는 자체유사성이 중요한 성질이므로 이 성질을 이용할 때 주기를 발견해 낼 수 있다.

효율적 시장가설은 정보가 발생하는 즉시 주가에 반영된다는 가설이다. 정보의 원천에 따라 弱型, 準強型, 強型으로 분류된다. 그런데 시장은 정보만으로 구성되는 것은 아니다. 재무관리 교과서나 경제학 교과서는 교환의 편의성 때문에 시장이 존재한다고 설명한다. 교환의 편의성을 획기적으로 증진시키기 위하여 numeraire를 탄생시켰으며, 교환의 편의성의 완벽성과 완비성(completeness)을 획득하기 위하여 numeraire를 화폐로 대체하였다. 여기에서 시장에는 유동성(liquidity)이 관건이 되고 있다. Peter(1994)는 자본시장의 chaos적 성질을 규명하기 위하여 효율적 시장가설 대신 프랙탈 시장가설(fractal market hypothesis)을 제시하고 있다. 그는 유동성과 leverage 등이 담당하는 역할을 중요시하면서 이 가설을 전개하고 있는데, 그의 소론을 따라 프랙탈 시장가설을 살펴 보도록 한다. 자본시장에 있어서 유동성은 자본시장의 원활한 가능성의 확보라는 측면에서 가장 중요한 요인중의 하나이다. 자본시장에 참여하는 투자자의 투자계획기간(investment horizon)은 참여자마다 다르다. 유동성은 투자계획기간이 서로 다른 사람들의 거래를 가능케하는 원동력이다. 골동품을 구매하고자 하는 투자자는 프리미엄을 지불해야 할 것이고 수요가 낮은 주식을 보유하고 있는 투자자는 자기가 바라는 가격보다 낮은 가격으로 매도해야 할 것이다. 따라서 시장은 본래의 제기능을 원활하게 수행하기 위하여는 유동성이 필요하다. 이 유동성에 의하여 투자자가 받고자 하는 가격이 시장에서 공평하다고 판단되

는 가격과 일치하거나 근접하게 될 것이며, 또한 투자계획기간이 서로 다른 투자자들의 효율적 거래가 비로서 가능해 진다. 그리고 수요와 공급이 불균형을 이룰 때 시장의 붕괴(panic or stampedes)가 아니다. 발생하는 것은 安定市場(stable market)의 유동성이 존재하는 시장(liquid market)이다. 시장에 유동성이 존재하면 가격은 공평한 가격에 근접한다. 그러나 유동성이 희박하면 할수록 가격이 공평하건 공평하지 않건간에 받을 수 있는 가격은 어느 가격이든 간에 그 가격에 주식을 매도하려고 할 것이다.

투자자가 모두 동질(homogeneous)이라면 모든 정보가 모든 투자자에게 동일한 영향을 준다면 유동성은 존재하지 않을 것이다. 정보를 갖게 되면 모두가 동일한 거래, 즉 모든 투자자가 동시매수를 하려할 것이다. 그러나 투자자가 모두 동질인 것은 아니다. 매일 매일 거래하는 一日去來者(day traders)가 시장에 존재하기도 하고, 2년후에 값아야할 부채를 청산하기 위하여 현재 투자를 하는 경우도 있다. 장기 투자자도 존재한다. 정보의 중요성은 투자계획기간에 따라 결정된다고 할 수 있을 것이다. 一日去來者에 있어서 0.1%는 중요한 정보이지만 투자기간이 5년인 사람에게 있어서 투자기간말의 수익률이 95%이나, 95.1%이나의 0.1% 차이는 별 중요성이 없을 것이다. 시장에서 모든 투자자들은 투자계획기간이 다르다. 각 계획기간에 따라 정보의 중요성은 차이가 있다. 유동성의 원천은 투자기간이 다르고 정보집합이 다르고 그래서 공평가격에 대한 인식이 다른 투자자들이라고 할 수 있다.

프랙탈 시장가설(fractal market hypothesis)은 유동성과 투자계획기간이 투자자의 행동에 미치는 영향을 중요시하는 가설이다. 이 가설은 확률과정에 대한 가정을 전제로 하지 않고 있다. 프랙탈 시장가설은 투자자의 행동과 시장가격의 행태를 관찰과 일치시키는 모형을 정립하는데 그 목적이 있다. 시장은 안정적이고 유동성이 있는 거래환경을 제공하기 위하여 존재한다. 투자자들은 좋은 가격을 원한다. 그런데, 이 좋은 가격은 반드시 공평한 가격(fair price)인 것만은 아니다. 많은 투자자가 시장에 참여하고 투자자들의 투자계획기간이 서로 다를 때 시장은 안정적(stable)이다. 단기 투자자 상호간에 그리고 장기 투자자간에 거래가 가능하지만 투자기간들이 서로 다른 투자자들간에 거래가 형성되기도 한다. 단기 투자자들에게는



특정이윤의 퍼센트가 중요하지만 장기 투자자들에게는 이와 같은 차이는 상례적인 경우가 흔하여 별로 중요성을 부과하지 않는 경우도 있다. 차이가 중요하게 느끼는 투자자보다 투자기간이 장기인 투자자가 존재하면 시장은 스스로 안정성을 확보하게 될 것이다. 따라서 투자자들은 동일한 위험수준을 공유해야 하고, 분담해서 공유한 위험(shared risk)으로 인하여 수익의 빈도분포가 투자기간이 상이해도 동일하게 보인다. 프랙틀은 자체 동형(self-similarity)이 중요한 성질중의 하나이므로 자체동형의 통계적 구조 때문에 위와 같은 통계적 성질로 인하여 프랙틀 市場假說이라 한다.

시장은 프랙틀 구조가 깨질 때 不安定的이다. 장기투자계획기간을 갖는 투자자들이 시장에 참여하지 않거나 또는 단기투자가 될 때 시장은 깨진다. 투자자들이 시장 평가의 기본으로 삼는 장기적 근본 정보(fundamental information)가 이제는 중요시 되지 않거나 신뢰도가 없다고 느낄 때 투자기간은 장기에서 단기로 전환된다. 장기적 전망이 극도로 불확실해지는 경제적 위기나 정치적 위기가 도래한 시기에는 장기 보다는 단기적으로 행동하는 것이 일반적 관례이다.<sup>13)</sup> 장기 투자자는 시장의 장기 전망에 초점을 둔다.

프랙틀 통계구조(fractal statistical structure)가 존재한다. 투자자들이 투자기간이 서로 다르므로 통계적 분포의 범위가 존재하게 된다. 투자기간이 서로 다른 투자자들이 시장에 참여하면 어느 투자기간의 투자자들에게 매도가 발생할 때 다른 투자기간을 갖는 투자자가 매수를 하게되어 발생하는 충격이 흡수되고 이로 인하여 통계적 구조는 안정성을 갖게된다. 그러나 시장 전체에 투자기간이 동일하면 시장은 불안정적이 되고 유동성이 결여되어 시장은 큰 충격속에 빠지게 된다. 투자기간이 일정하면(uniform) 시장은 自由墜落(free fall)에 빠지게 된다. 즉, 가격의 수열에 불연속성이 나타난다. Gauss 分布族에서 규모가 큰 변동은 규모가 작은 많은 변동들의 합으로 본다. 그러나 공황에 있어서나 충격파가 크게 작동하고 있는 기간에서 시

13) 불안정성(instability)은 bear market와는 동일한 개념이 아니다. Bear market는 근본 평가(fundamental valuation)의 하락에 기본을 두고 형성되는 시장형태인 반면 불안정성은 지극히 높은 수준의 단기 변동성(short-term volatility)이 그 특성이다. 따라서 상당한 정도의 하락이나 상승이 매우 짧은 시간에 발생한다.

장은 평소의 가격의 움직임의 폭을 슬쩍 뛰어 넘어 가격의 수열에서 불연속을 노정 시킨다. 불연속성으로 인하여 가격의 변동폭이 커지고 수익의 빈도분포에는 꼬리가 두꺼워(fat tail)진다. 시장 참여자의 투자기간이 일정하게 되어 유동성이 결여되므로 불연속성이 발생한다.

市場이 장기적으로 경제성장과 연관되어 있으면 위험은 economic cycle이 지배하기 때문에 시간의 흐름에 걸쳐 감소할 것이다. economic cycle은 거래행동보다 덜 변동(volatile)하므로 장기 주식수익률이 덜 변동적이다. 이와 같은 관계로 분산은 有界가 된다. 주식, 채권 등과 같은 자본자산은 단기의 프랙탈 통계적구조를 갖는다.

정보는 가격에 동일하게 영향을 미치는 것은 아니다. 단기에 있어서 정보를 소화할 시간적 여유가 많지 않기 때문에 주가의 변동은 장기보다 잡음(noise)이 크다. 그러나 장기에 있어서는 정보를 충분히 소화할 수 있으므로 가격에 대한 의견의 일치(consensus)을 투자자들 간에 이룰 수 있다. 투자기간이 길면 길수록 시계열은 고르게(smooth) 된다.

프랙탈 시장가설을 요약하면 다음과 같다. 즉, 투자계획기간이 서로 다른 투자자들이 시장이 많이 존재할 때 시장은 안정적이며 이로 인하여 거래자에게는 큰 유동성이 존재하게 된다. 정보집합은 장기보다는 단기에서 시장에 대한 느낌과 기술적 요인에 연관되어 있다. 투자기간이 증가함에 따라 장기의 근본정보(fundamental information)가 지배하게 되고, 따라서 가격변동이 그 투자기간에만 중요한 정보를 반영한다. 근본정보의 유효성에 의문이 제기되는 사건이 발생되면 장기투자자들은 거래를 시작한다. 시장의 전반적인 투자기간이 일정한 수준(uniform level)으로 귀착하게 되면 시장은 불안정적이 된다. 단기투자자들에게 유동성을 제공하여 시장을 안정화 시키는 장기투자자가 존재하지 않게 된다. 가격은 단기의 기술적 거래(technical trading)와 장기의 근본 평가(fundamental valuation)의 결합을 반영한다. 따라서 단기 가격 변동이 장기보다 잡음이 많고 증폭성(volatility)이 크다. 시장에서의 추세는 변화하는 경제환경에 입각하여 기대 이익(earnings)의 변화를 반영한다. 단기 추세는 집단행동의 결과가 큰 영향을 미친다. 단기 추세의 기간이 장기

경제추세와 연관된다고 믿을 수 있는 이유가 별로 없다. 증권이 economic cycle과 연관성이 없다면 장기 추세는 존재하지 않을 것이다. 거래, 유동성과 단기정보가 지배할 것이다. 요컨대, 효율적 시장가설과는 달리 프랙탈 시장가설은 투자자의 투자 기간에 따라 정보가 평가된다는 가설을 제시하고 있다. 투자기간이 다르면 정보를 다르게 평가하기 때문에 정보의 diffusion이 평등하게 이루어지지 않는다. 어느 때는 주가가 모든 가용정보를 반영하지 않고 그 특정 투자기간에 중요한 정보만을 반영한다.

#### IV. Hurst Process

資本市場을 분석할 때 일반적으로 독립적이고 동일한 분포를 갖는 확률변수를 상정하여 소기의 목적을 달성하고자 한다. 그러나 이와 같은 변수를 상정하기가 어려울 때에는 非母數方法을 사용한다. 이 비모수방법 가운데 Hurst(1951)는 나일강의 댐 프로젝트를 수행하던 중 Hurst process를 개발하였다. Brownian motion process는 무작위행보 과정을 정립하기 위한 기본 모형이 되고 있는데 Einstein은 확률 입자(random particle)가 가는 거리(covered distance)는 그것을 측정하기 위하여 사용하는 시간과 다음의 관계를 갖는다는 것을 발견한 바 있다.

$$R = \sqrt{T} \quad (1)$$

위에서 R은 간 거리이고 T는 시간이다. 式(1)은 재무관리에서 표준편차나 증폭성(volatility)을 연간으로 측정할때 이용되고 있다. 즉 월수익률의 표준편차에  $\sqrt{12}$ 를 곱하면 연간 표준편차를 얻는다.

시계열 데이터  $x = x_1, \dots, x_n$ 이라 하자. 이 시계열  $x$ 의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

$$x_m = (x_1 + \dots + x_n)/n; \quad (2)$$

$$s_n = \sqrt{n} \sqrt{(x_r - x_m)^2} \quad (3)$$

尺度再定 範圍(rescaled range)는 시계열 데이터에서 표본평균을 차감하여 데이터를 척도조정 또는 정규화하여 얻을 수 있다.

$$z_r = (x_r - x_m), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式(4)에 의한 시계열  $z$ 는 평균이 0이다. 누적시계열  $Y$ 는 다음과 같다.

$$Y_r = (z_1 + z_r), \quad r = 2, \dots, n \quad (5)$$

위에서  $z$ 는 평균이 0이므로  $Y$ 의 최종값  $Y_n$ 은 언제나 0이다. 조정범위  $R_n$ 은  $Y_r$ 의 최대값과 최소값의 차이이다. 즉,

$$R_n = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \min(Y_1, \dots, Y_n) \quad (6)$$

그런데  $Y$ 는 평균이 0이므로  $Y$ 의 최대값은 0과 같거나 0보다 크다.  $Y$ 의 최소값은 0과 같거나 0보다 적다. 따라서 조정범위  $R_n$ 은 time index  $n$ 에 대하여 system이 움직여 간 거리를 의미한다.  $n = T$ 로 놓을때, 시계열  $x$ 가  $n$ 의 증가하는 값에 대하여 독립적이면 式(1)을 적용할 수 있다. 그러나 式(1)은 Brownian motion process의 시계열에만 적용이 된다. 평균이 0이고 분산이 1인 Brownian motion process가 아닌 시계열에 式(1)을 적용하기 위해서는 式(1)을 일반화시켜야 한다. Hurst(1951)는 式(1)의 일반적 형태를 다음과 같이 제시하고 있다.

$$(R/S) = cn^H \quad (7)$$

위에서  $n$ 은 시계열  $x_1, \dots, x_n$ 의 첨자에 대응되는 수치이다. 위의 식(7)의  $R/S$  값을 測度再定範圍(rescaled range; RS)라 한다. 평균은 0이고 표준편차가 1이 아닌 경우에 적용할 수 있도록 측도를 재정립한 식이기 때문이다. 그리고  $H$ 는 Hurst 指數(Hurst exponent)이다. 프랙털은 모두 power law에 따라 scale이 이루어 진다. 이것이 프랙털 구조의 특성 중의 하나이다. 식(7)에 對數를 취하면

$$\log(R/S) = \log c + H \log n. \quad (8)$$

시스템이 독립적으로 분포하면  $H = 0.50$ 이다.  $R/S$ 분석은 非母數分布(nonparametric)이므로 확률분포에 대한 가정이 없다.  $0.50 < H \leq 1.00$  이면 시계열은 persistent 하며, persistent 시계열은 장기기억효과가 주요 특성이다. 오늘 발생한 것이 미래에 영원히 영향을 미친다. Chaotic dynamics에서는 초기조건에 민감하게 의존한다. 이 장기기억은 시간의 크기에 관계없이 발생한다. 모든 일일 변동은 모든 미래의 일일 변동과 상관관계를 맺고 있으며 모든 주간변동은 모든 미래의 주간변동과 상관관계를 맺고 있다. 시간의 크기에 대한 무관련성이 프랙털 시계열의 주특성(key characteristic)이다.  $0 \leq H < 0.50$  이면 antipersistence를 의미한다. antipersistent system은 無作爲行步 시스템이 cover한 거리보다 짧은 거리를 cover한다. 따라서 무작위행보과정보다 자주 반전해야 한다. 이것이 평균회귀과정(mean-reverting process)이다.

다음에는 식(7)의 통계적 성질을 살펴보자. Hurst(1951)는 식(7)의 특별한 경우로 다음의 형태를 취하는 확률과정을 무작위 행보로 제시하고 있다.

$$(R/S)_n = (n\pi/2)^{1/2} \quad (9)$$

위에서  $n$ 은 관찰수 이다. Anis와 Lloyd(1976)는  $n$ 이 적을 경우 다음과 같은 기대값

을 제시하였다.

$$E(R/S_n) = [\Gamma\{0.5(n-1)\}/(\sqrt{\pi}\Gamma(n/2))] \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (10)$$

위에서 감마함수(gamma function)에 대하여 Sterling함수를 사용하여 式(10)을 간편화 시키면 다음과 같다.

$$E(R/S_n) = (n\pi/2)^{-1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (11)$$

그런데 Peters(1994)는 Anis와 Lloyd의 방정식을 simulation을 통하여 분석한 결과가 식에 ias가 존재함을 발견하고 다음과 같은 수정방정식을 제시하였다.

$$E(R/S_n) = [(n-0.5)/n] (n\pi/2)^{-1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (12)$$

기술분석에 있어서는 주기를 찾는 것이 곧 시장분석이다. 그러나 分光分析(spectral analysis)같은 고도의 기법을 사용한 통계적 분석에서는 상관성 있는 잡음(noise) 만을 발견하고 있는 실정이다. 시계열 분석에서 중요시되고 있는 Fourier 분석에서는 모양이 불규칙한 시계열의 수많은 sine wave 들의 합계로 가정하고 있으며, 分光分析에서는 관찰된 불규칙한 시계열을 이 sine wave들로 나눈다. power spectrum의 정점들(peaks)은 주기적 행동의 증거로 본다. 그러나 증권시장에 대한 시계열 분석에서 주기에 대한 검증은 결론을 내릴 수 있는 입장에 있지 않다. Hurst(1951)는 R/S분석에 의하여 주기를 찾아내는 것이 가능하다고 주장한다. 독일의 수학자인 Weirstrass가 프랙틀函數를 창조하였는데 이 식은 모든 곳에서 연속적이나 어느 곳에서도 미분이 가능하지 않은 함수이다. West(1990)는 프랙틀 시계열에 적용될 수 있는 함수로서 분석을 시도하였다. Weirstrass 函數는 Fourier series 형

태로 표현되는 다음의 식인데, 이 식의 움직임을 그래프로 표현해 보면 주식을 비롯한 금융시계열의 패턴을 상당히 반영하고 있으며, 주기를 비롯한 여러 성질을 포착하고 있음을 알 수 있다.

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/a^n) \cos(b^n \omega t) \quad (13)$$

式(12)는 곰시장(bear market)과 황소시장(bull market)의 형태를 표현해 주며 곰시장내의 봉우리와 계곡을 표현하고 동시에 이와 같은 주기가 여러개 존재함을 제시해 주고 있다. 뿐만 아니라 황소시장에서도 봉우리와 계곡, 그리고 이 소주기를 극명하게 보여준다. R/S분석을 Weirstrass함수에 적용할 때 단기주기(shortest frequency) 경우  $H = 0.95$ 이고, 장기주기(longest frequency) 경우  $H = 0.72$ 이다.  $H = 0.70$ 일 때 이 함수는 직선이다.

Hurst(1951)는 안정성과 주기를 발견하기 위한 函數로써 다음을 제시하고 있다.

$$V_n = (R/S)_n \sqrt{n} \quad (14)$$

이 식을  $V$ 통계량이라 한다.  $V$ 와  $\log(n)$ 을 그래프로 표현할 수 있는데, 이 때 확률과정이 독립적 확률과정이면 편편하다. 반면 이 과정이 persistent하고 R/S의 scale이 시간의 제곱근( $H > 0.50$ ) 보다 빠르게 되면 그래프는 기울기가 상향한다. 반대로 과정이 antipersistent( $H < 0.50$ ) 하면 그래프는 하향한다.

## V. 실증분석

주가가 Hurst process를 따르는지 여부를 검증하고 장기기억의 process인지를 판별

하고 나아가 주기(periodic cycle)를 갖고 있는지를 찾아내기 위한 이 연구에서는 일별 종합주가지수를 사용한다. 기간은 1980-1993년이며 일별 종합주가지수를 사용한 종합주가지수 수익률을 사용한다.<sup>14)</sup>

주식수익률은 對數(logarithm) 수익률을 사용한다. 즉,

$$s_t = \log(P_t/P_{t-1}). \quad (15)$$

式(15)의 대수수익률을 사용하여 AR(1)분석을 시행한 후 잔차(residuals)를 이용하여 R/S분석을 수행한다. 自己回歸過程(autogressive process)은 단기의 상관을 야기시키는 과정으로 AR(1)을 사용하는 것은 線型依存性을 제거하거나 최소화하기 위한 것이다. 선형의존성이 존재하면 Hurst exponent 추정에 便倚(bias)가 발생하기 때문이다. 일반적으로 AR(1)을 사용한 잔차방법으로 모든 선형의존성이 제거되는 것은 아니다. 그러나 Brock, Dechert와 Sheinkman(1987)에 의하면 AR과정의 계수가 2나 3 이하 해도 AR이 선형의존성을 충분히 제거하며 이를 이용한 통계분석에 유의성있는 수준의 영향은 미치지 않는다고 주장하고 있다.

추정절차를 좀 더 구체적으로 설명하면 다음과 같다. AR(1)을 추정하여 잔차  $\varepsilon_i$ 를 계산한 후 시계열 기간  $N$ 을  $A$ 개의 기간이  $n$ 인 하위부분기간(subperiod)로 나눈다. 즉,  $An = N$ . 각 부분기간을  $I_a$  ( $a = 1, 2, \dots, A$ )로 부르고 각  $I_a$ 의 각 원을  $N_{k,a}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )라 부르자. 기간이  $n$ 인 각  $I_a$ 에 대하여 평균을 다음과 같이 구한다.

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{k,a}. \quad (16)$$

14) 주식시장의 일반적 성질을 여러 방면에서 파악하기 위하여는 6일 수익률, 10일 수익률, 25일 수익률 등을 사용하여 분석하는 것이 바람직하다. 위 수익률들은 주별, 월별 등을 표상해 줄 수 있으며 10일은 우리들이 日을 10일로 나누는 관습에 따라 사용한 것이다. 이것은 또한 주기의 존재여부를 발견하기 위한 시도인 것이다. 이 부분에 관한 연구가 현대 진행중이나 시간관계로 완성이 되지 않아 수록치 못한다.



위에서  $e_a$ 는 기간  $n$ 인 하위부분기간  $I_a$ 에 포함된  $\varepsilon_i$ 의 각 하위부분기간의 평균으로부터 누적적인 일탈(accumulated departures)의 시계열은 다음과 같다.

$$x_{k,a} = \sum_{i=1}^k (\varepsilon_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

각 하위부분기간내의  $x_{k,a}$ 의 최대값과 최소값의 차이인 범위는

$$R_{I_a} = \max(x_{k,a}) - \min(x_{k,a}), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (18)$$

각 하위부분기간  $I_a$ 의 표본표준편차는 다음과 같다.

$$S_{I_a} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k,a} - e_a)^2 \right]^{1/2} \quad (19)$$

각 범위  $R_{I_a}$ 는 이것에 대응되는  $S_{I_a}$ 로 나누어 표준화시킨다. 따라서 각  $I_a$  하위부분기간의 測度再定範圍는  $R_{I_a}/S_{I_a}$ 와 같다. 기간이  $n$ 인 하위부분기간이  $A$ 개이므로 기간이  $n$ 인 평균  $R/S$  값은 다음과 같다.

$$(R/S) = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A (R_{I_a}/S_{I_a}) \quad (20)$$

이제 기간  $n$ 을 다음의 높은 값으로 증가시킨다. 전체 시계열의 기간이  $M$ 이라 하면  $t$ 期の 잔차가  $t - 1$ 期の 잔차의 함수이므로  $(M - 1)/n$ 이 정수이다. 시계열의 시작과 종료를 포함한  $n$ 의 값을 사용하여 위와 같은 방법을  $n = (M - 1)/2$ 가 될 때까지 반복한다. 이 반복을 통하여 얻은 값으로 式(7)과 (8)을 사용하여 OLS를 수행한다.

이 분석에서는 일별주가지수의 최초값과 최종값이 모든 표본에 반드시 포함되도록

하였다. 이것은 표본에 포함된 정보를 모두 이용하기 위한 것이다. 전체 표본을 분할하는데 있어 어느 표본에 포함된 데이터의 개수를 특정한 수자로 지정할 경우 시계열의 끝부분에 있는 데이터는 표본에 포함되지 못하고 버리게 되는 경우가 발생한다. 일별종합주가지수의 수익률의 전체 표본개수는 3940개이다. 전체 시계열 데이터 중 하나의 표본의 데이터 개수를 7로 하면 표본수가 567개 이고 마지막 1개의 데이터는 분석표본에 포함되지 않는다. 이때 정보의 손실은 많지 않다. 그러나 표본에 포함되는 데이터의 개수를 1000으로 구성하면 3개 표본을 얻고 970개에 달하는 데이터는 사상하게 된다. 이때에는 정보의 손실이 크다.

실증분석을 통하여 얻은 Hurst process의 회귀분석의 값은 <表 1>과 같다. 주가지수에 의한 Hurst 지수는  $H = 0.52$ 이며, 이 지수의 기대값은 식(12)를 사용하여 계산한 결과  $E(H) = 1.71$ 이다. 표준오차는 각각 0.02와 0.08로 p값은 0.0이다. 이 점은 F의 p값이 0.0으로서 F분포에 의한 결과와 동일하다.  $E(H)$ 의 분산은  $1/T$ 이다. 따라서 이 분산은  $1/3940$ 로써  $E(H)$ 의 표준편차는 Gauss 확률변수로 간주할 때 0.016이다. 따라서 유의수준은 74.82이다. 종합주가지수의 수익률의 Hurst process의 H값은 H의 기대값 보다 74.82 표준편차 위에 있다. 엄청나게 유의수준이 높다.

그런데  $H = 0.50$ 이면 이 process는 無作為行步를 따른다.  $H > 0.50$ 이면 이 시계열은 충격의 지속성(persistence)이 존재한다. 장기기억 process이다.  $H < 0.50$ 이면 antipersistence가 존재한다.

회귀분석에 의한 H값의 추정에 의하면  $H = 0.52$ 로서 0.50과 거의 같다. 유의도 검정에 의하면 유의도가 엄청나게 높다. Hurst process의 Hurst 指數 H가 0.52인데 이것을 working approximation으로 0.50과 동일하다고 본다면, 우리나라의 증권시장은 무작위 행보(random walk)를 따른다고 볼 수 있다. 이 분석에서 사용된 시계열은 AR(1)의 잔차들로 구성되어 있다. 잔차시계열은 오히려 ARCH 계통의 성질과 같은 점을 보유하고 있다고도 볼 수 있을 것이다.

〈表 1〉 回歸分析의 結果

	일별종합주가지수	기대 R/S
상수	0.6948 (0.2132)* (0.0173)**	0.7244 (0.2213)* (0.0170)**
Hurst지수	0.5199 (0.0234)* (0.0000)**	1.7119 (0.0806)* (0.0000)**
F	491.5348 (0.0000)**	451.2594 (0.0000)**
R <sup>2</sup>	0.9879	0.9869
회귀식의 표준오차	0.2720	0.2838
기대 Hurst 지수의 분산		0.000254 (0.015931)***
유의수준	74.8227	

\* = 標準誤差 (standard error)

\*\* = p-값 (p-value)

\*\*\* = 標準偏差

일별종합주가지수를 사용한 이 분석에서 Hurst process의 H값이 기대 H값과는 상당한 차이를 보이고 있으며 H값이 0.52로써 무작위 행보를 보여주고 있는데, 일별주가를 사용하여 계산된 6일별 주가와 달력에 의한 週別株價, 25일별 주가와 월주가를 동시에 분석해야 완벽한 결론을 내릴 수 있을 것이다. 현재 이와 같은 분석과 계산이 진행중에 있는데 시간관계상 이 곳에 수록하지 못한 것이 아쉽다. 이 부분이 논문을 보완할 기회가 오면 수록하거나 별도의 논문으로 작성할 예정이다.

## VI. 結論

주가가 선형함수를 취한다는 선형가격결정모형(linear pricing model)이 현재 재무관리의 지배적인 연구결과이다. 선형모형은 아비트라주(arbitrage)가 존재하지 않으며 아비트라주가 존재하지 않으면 상태가격(state price)이 존재하고 상태가격이 존재하면 아비트라주가 존재하지 않는다는 정리를 정교한 수학을 사용하여 증명함으로써 그 정당성이 인정되어 왔다. 선형모형은 또한 효율적 시장가설을 전제로 하고 있다. 사실 재무관리의 모든 이론은 현재까지 효율적 시장가설을 전제조건으로 하여 정립하고 발전되어 왔다. 현대 재무관리의 가격평가 또는 가격결정의 기초는 합리적 시장가설이다. 합리적 시장가설 또는 효율적 시장가설은 상당한 신축성을 내포하고 있어 자본자산의 가격을 결정하는 모형에서 할인율이 결정론적인 경우와 확률적인 경우어나 상관 없이 적용되고, 정보의 비동질성에 대하여도 모형의 정립에 지장이 없으며 거래비용도 포괄할 수 있다.

가격은 선형모형이고 비선형모형은 아닌가? 單位根 分析을 비롯한 여러 기법은 가격이 비선형모형으로 존재할 수 있다는 암시를 제시하고 있다. 특히 非線型 動態(nonlinear dynamics)로 표현될 수도 있다는 것이다. 가격은 현재까지 결정론적 계에 의하여 형성된다고 보았는데, 결정론적 계가 특히 동태적 상황에서 chaos적 성질을 갖고 있을 수 있다. 이 때에는 결정론적 계에 확률적 또는 무작위적 운동이 작용하여 동태 계(dynamic system)는 chaos적 계(chaotic system)가 된다. 이와 같은 상황에서 非線型 動態가 존재할 때 결정론적 계는 지속적인 추세, 주기적 또는 비주기적 사이클, 장기상관관계, 장기적 기억 등을 나타내주는, 무작위적으로 보이는 결과를 생성시킬 수 있다. 결정론적 계를 전제로 하여 정립되고 그 성질이 탐구된 선형모형은 결정론적 계를 형성해 주는 변수를 파악하여 이 변수들의 선형적 조합으로 정립된다. 모형을 구성하는 변수가 이론적으로 파악되면 이 변수들과 확률 교란항의 직선회귀식으로 모수를 추정하고 검정하여 그 모형의 현실 타당성이나 적합성을 점검한다. chaos적 系에서 무작위적으로 보이는 결과는 chaos의 운동법칙에 따라 움직이는 것이 현상적으로 또 그렇게 보인 것에 불과하다. 때문에 선형모형의 실증분석에서 보인 무

작위성과는 일치할 수가 없다. 이 때에는 비선형의 동태를 도입한 모형의 정립이 필요하게 된다.

재무와 금융을 비롯한 경제시계열의 분석은 chaos적 결정론을 가정하지 않고 非 chaos적 결정론에 입각하여 진행되어 왔다. 그런데 이 분석들은 chaos의 가능성을 암시하고 있다. AR과 MA를 비롯하여 이 두 process를 여러 형태로 결합시킨 시계열 모형들은 모형의 결과와 현실이 불일치하고 있음을 제시하고 있다. 특히 단위근 분석과 ARCH계통의 모형은 재무와 금융시계열이 chaos적 현상을 갖을 수 있다는 결과를 직·간접적으로, 주로 암시적으로 제시하고 있다. 효율적 시장을 분석한 연구결과들은 주가의 장기적 예측가능성을 암시하고 있으며 기간적 주기가 존재한다는 암시를 여러 연구논문에서 잡아낼 수 있다. 이와 같은 암시에 의하여 프랙탈 차원  $d$ 를 모형에 직접 도입한 ARFIMA( $p, d, q$ ) 모형의 탄생을 이루게 되었다.

기존의 연구와 암시를 전제로 하여 우리나라의 증권시장이 chaos적 움직임, 특히 fractal(쪽거리)구조에 의한 운동을 갖고 있는지의 여부를 검증하기 위하여 Hurst process를 우리나라의 증권시장의 가격을 형성시키는 process로 보고 이 프로세스의 모수를 추정하고 가설을 검정하였다. Hurst 指數는 0.52이며, 기대 Hurst 지수는 1.71로 이 양자가 같다는 결론을 유도하기가 불가능하였다. Hurst 指數가 0.50이면 이 process는 無作爲 行步 프로세스(random walk process)이고 지수가 0.50보다 크면 Hurst process로서 충격의 장기기억과 지속성, 추세에의 지속성 등의 성질을 갖고 장기 기억이 존재한다. 그러나 Hurst 지수가 0.50보다 적으면 antipersistence가 존속한다. 우리나라의 일별종합주가지수를 대상으로 분석한 본 논문에서는 이 지수가 0.52로 0.50과 거의 동일하다. 따라서 우리나라의 증권시장은 Hurst process를 따른다고 보다는 무작위 행보를 따른다고 할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- 구본열, 한국증권시장에서 투자자의 상대위험기피계수의 추장에 관한 연구, 증권학회지, 제14집, 1992.
- 김영구·배재봉, Chaos 모형을 이용한 한국주식시장의 비선형 동태적 특성에 관한 연구, 재무관리연구, 제11집, 1994, 73-96.
- 이일균, 상대적 위험기피계수의 추정과 자본자산가격결정의 소비기저모형에 대한 실증적 검증, 재무관리연구, 제9권 제2호, 1992, 1-29.
- 이일균, 시계열자료와 재무관리이론, 재무관리논총, 제1집 제1호, 1994, 1-23.
- 이일균, 증권의 日別 收益率과 月別 收益率의 特性에 관한 研究, 증권학회지, 제11집, 1989, 199-229.
- 이주희·남주하, GMM을 이용한 자본자산가격결정모형의 추정, 재무관리연구, 제9권 제2호, 57-75.
- 조 담, 주식수익률의 조건부 이분산성에 관한 실증적 연구, 재무학회발표논문집, 1993, 1-26.
- 홍갑수, 시장평균환율제도하의 환율과 원화콜금리 관계분석, 금융경제연구 15, 한국은행금융경제연구소, 1990.
- 황성응·이일균, 자본자산포트폴리오의 효율성에 대한 다변량 검증, 증권학회지 13, 1991, 357-401.
- Akgriray, V., and Lamoureux, C.G., "Estimation of Stable-Law Parameters: A Comparative Study," *Journal of Business and Economic Statistics* 7 (1989).
- Andrews, D.W.K., "Least squares Regression with Integrated or Dynamic Regressors under weak error Assumptions." *Econometric Theory* 3 (1987), 98-116.
- Anis, A.A., and Lloyd, E. H., "The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands," *Biometrika* 63 (1976).
- Bachelier, L., "Theory of Speculation," in P.Cootner, ed., *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA: M.I.T Press, 1964

(Originally published in 1900)

- Backus, David K., Allan W. Gregory, and Stanley E. Zin**, Risk Premiums in the Term Structure: Evidence from Artificial Economies, *Journal of Monetary Economics* 24 (1989), 371-399.
- Baillie, Richard T.**, Econometric Tests of Rationality and Market Efficiency, *Econometric Reviews* 8 (1989), 151-186.
- Baillie, Richard T. and Tim Bollerslev.**, A Multivariate Generalized ARCH Approach to Modeling Risk Premia in Forward Foreign Rate Markets. *Journal of International Money and Finance* 9 (1990), 309-324.
- Baillie, Richard T. and Tim Bollerslev**, Conditional Forecast Densities from Dynamic Models with GARCH Innovations, *Journal of Econometrics* (1992), this issue.
- Baillie, Richard T. and Roert J. Myers**, Modelling Commodity Price Distributions and Estimating the Optimal Futures Hedge. *Journal of Applied Econometrics* 6 (1991), 109-124.
- Barnesly, M.**, *Fractals Everywhere*. San Diego, CA: Academic Press (1988).
- Baxter, M.**, "Real Exchange Rates and Real Interest Differentials: Have We Missed the Business-Cycle Relationship?," *Journal of Monetary Economics* 33 (1994), 5-37.
- Beveridge, S. and C.R. Nelson**, "A New Approach to the Decomposition of Economic Time series into Permanent and Transient Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle." *Journal of Monetary Economics* 7 (1981), 151-174.
- Bierens, H.J.**, "Higher-Order Sample Autocorrelations and the Unit Root Hypothesis," *Journal of Econometrics* 57 (1993), 137-160.
- Bodurtha, James N. and Nelson C. Mark**, Testing the CAPM with time varying risks and returns, *Journal of Finance* 46 (1991), 1485-1505.

- Bollerslev, T.**, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31 (1986).
- Bollerslev, T., Ray Y. Chou and K.F. Kroner**, "ARCH Modeling in Finance," *Journal of Econometrics* 52 (1992), 5-59.
- Bollerslev, T. and R.F. Engle**, "Comman Persistence in Conditional Variances," *Econometrica* 61 (1993), 167-186.
- Bollerslev, T.**, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307-327.
- Bollerslev, T.**, A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, *Review of Economics and Statistics* 69 (1987), 542-547.
- Bollerslev, T.**, On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, *Journal of Time series Analysis* 9 (1988), 121-131.
- Bollerslev, T., Robert F.Engle, and Jeffrey M.Wooldridge**, A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, *Journal of Political Economy* 96 (1988), 116-131.
- Brock, W.A.**, "Distinguishing Random and Deterministic System," *Journal of Economic Theory* 40 (1986).
- Brock, W.A., W.D. Dechert, and J.A. Scheinkma**, "A Test for Indpendence Based on the Correlation Dimension," Unpublished manuscript (University of Wisconsin, Madison, WI), (1987).
- Brock, W.A., D.A. Hsieh, and B. LeBaron**, Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability, Cambridge, Mass: MIT Press (1991).
- Brockwell, P.J. and R.A. Davis**, Time Series: Theory and Methods, Second Edition, New York: Sponger-Verlag (1991).
- Campbell, J.Y. and A.S. Kyle**, "Smart Money, Noise Tranding and Stock Price



- Behavior," *Review of Economic Studies* 60 (1993), 1-34.
- Campbell, J.Y. and N.G. Mankiw**, "Permanent and Transitory Components in Macroeconomic Fluctuations," *American Economic Review* 77 (1987), 111-117.
- Campbell, J.Y. and R.J. Shiller**, "Cointegration and Tests of Present Value Models," *Journal of Political Economy* 95 (1987), 1062-1088.
- Campbell, J.Y. and R.J. Shiller**, Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View, *Review of Economic Studies* 58 (1991), 479-494.
- Campbell, J.Y.**, Stock Returns and the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 18 (1987), 373-399.
- Chen, P.**, "Empirical and Theoretical Evidence of Economic Chaos," *System Dynamics Review* 4 (1988).
- Cheng, B. and Tong, H.**, "On Consistent Non-parametric Order Determination and Chaos," *Journal of the Royal Statistical Society* 54 (1992).
- Cheung, Y.W.**, "Long Memory in Foreign Exchange Rates," *Journal of Business and Economic Statistics* 11 (1993).
- Chou, R.Y.**, "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH," *Journal of Applied Econometrics* 3 (1988), 279-294.
- Chou, R.Y. and K.C. Denning**, "A Simple Variance Ratio Tests," *Journal of Econometrics* 58 (1993), 385-401.
- Cochrane, J.H.**, "How Big Is the Random Walk in GNP?" *Journal of Political Economy* 96 (1988), 893-920.
- Cootner, P.**, ed., *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA: M.I.T. Press (1964).
- Davidson, R. and J.C. Mackinnon**, *Estimation and Inference in Econometrics*, New York: Oxford University Press (1993).
- Davies, R. and Harte, D.**, "Tests for the Hurst Effect," *Biometrika* 74 (1987).

- De Gooijer, J.G.**, "Testing Non-linearities in World Stock Market Prices," *Economics Letters* 31 (1989).
- DeLong, J.B., Shleifer, A., Summers, L.H., and Waldmann, R.J.**, "Positive Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation," *Journal of Finance* 45 (1990).
- Devaney, R.L.**, An Introduction to Chaotic Dynamical systems. Menlo Park, CA: Addison-Wesley (1989).
- Dickey, D.A. and W.A. Fuller**, "Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica* 49 (1981), 1057-1072.
- Dickey, D.A. and S.G. Pantula**, "Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes: *Journal of Business and Economic Statistics* 5 (1987), 455-462.
- Dickey, D.A., W.R. Bell and R.B. Miller**, "Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications," *The American Statistician* 40 (1986), 12-26.
- Diebold, F.X. and G.D. Rudebusch**, "Scoring the Leading Indicators," *Journal of Business* 62 (1989), 369-392.
- Diebold, F.X. and G.D. Rudebusch**, "Long Memory and Persistence in Aggregate Output," *Journal of Monetary Economics* 24 (1989), 189-209.
- Diebold, F.X. and M. Nerlove**, "Unit Roots in Economic Time Series: A Selective Survey," *Advances in Econometrics* 8 (1990), 3-69.
- Diebold, F.X. and M. Nerlove**, The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model, *Journal of Applied Econometrics* 4 (1989), 1-21.
- Diebold, F.X.**, "Testing for Bubbles, Reflecting Barriers and Other Anomalies." *Journal of Economic Dynamics and Control* 12 (1988), 63-70.
- Domowitz, I. and C.S. Hakkio**, "Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market," *Journal of International Economics* 19

(1985), 47-66.

**DuMouchel, W.H.**, "Stable Distributions in Statistical Inference: 1. Symmetric Stable Distributions compared to Other Symmetric Long-Tailed Distributions," *Journal of the American Statistical Association* 68 (1973).

**DuMouchel, W.H.**, "Stable Distributions in Statistical Inference: 2. Information from Stably Distributed Samples," *Journal of the American Statistical Association* 70 (1975).

**Durlauf, S.N.**, "Time Series Properties of Aggregate Output Fluctuations," *Journal of Econometrics* 56 (1993), 39-56.

**Durlauf, S.N. and P.C.B. Phillips**, "Trends Versus Random Walks in Time Series Analysis," *Econometrica* 56 (1988), 1033-1044.

**Edison, H.J. and B.D. Pauls**, "A Re-assessment of the Relationship Between Real Exchange Rates and Real Interest Rates: 1974-1990," *Journal of Monetary Economics* 31 (1993), 165-187.

**Engle, R.F.**, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica* 50 (1982), 987-1008.

**Engle, R.F. and Chowdhury Mustafa**, Implied ARCH Models from Options Prices. *Journal of Econometrics*, this issue, (1992).

**Engle, R.F. and C.W.J. Granger**, "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing," *Econometrica* 55, 251-276.

**Engle, R.F., D.M. Lillien and R.P. Robbins**, "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica* 55 (1987), 391-408.

**Engle, R.F. and Gloria Gonzalez-Rivera**. Semiparametric ARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics* 9 (1991), 345-360.

**Engle, R.F. and Tim Bollerslev**, Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric Reviews* 5 (1988), 1-50.

- Engle, R.F., Victor Ng, and Michael Rothschild,** Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, *Journal of Econometrics* 45 (1990), 213-238.
- Fama, E.F.,** "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business* 38 (1965a), 34-105.
- Fama, E.F.,** "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance* 25 (1970).
- Fama, E.F.,** "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market," *Management Science* 11 (1965b).
- Fama, E.F., and French, K.R.,** "The cross-Section of Expected Stock Returns," *Journal of Finance* 47 (1992).
- Fama, E.F., and Roll, R.,** "Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions," *Journal of the American Statistical Association* 66 (1971).
- Feller, W.,** "The asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Variables," *Annals of Mathematics and Statistics* 22 (1951).
- Franzini, L. and A. C. Harvey,** "Testing for Deterministic Trends and Seasonal Components in Time Series Models," *Biometrika* 70 (1983), 673-682.
- French, K., W. Schwert and R. Stambaugh,** "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics* 19 (1986), 3-29.
- Friedman, B.M., and Laibson, D.I.,** Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock Prices," *Brookings Papers on Economic Activity* 2 (1989).
- Gallant, A. Ronald and George Tauchen,** Semi Non-parametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications, *Econometrica* 57 (1989), 1091-1120.
- Geweke, J. and S. Porter-Hudak,** "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis* 4 (1983),

221-238.

**Granger, G.W.J.**, "Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48 (1986), 213-228.

**Granger, C.W.J.**, "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models." *Journal of Econometrics* 14 (1980), 227-238.

**Granger, C.W.J. and R. Joyeux**, "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis* 1 (1980), 15-39.

**Hamilton, J.D.**, A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica* 57 (1989), 357-384.

**Hamilton, J.D.**, Time-Series Analysis, Princeton: Princeton University Press (1994).

**Hendry, D.F.**, "Econometric Modeling with cointegrated Variables: An Overview." *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48 (1986), 201-212.

**Hansen, B.E.**, "Efficient Estimation and Testing of Cointegrating Vectors in the Presence of Deterministic Trends," *Journal of Econometrics* 53 (1992), 87-121.

**Harvey, A.C.**, Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge University Press (1989).

**Harvey, A., E. Ruiz and N. Shephard**, "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies* 61 (1994), 247-264.

**Hosking, J.R.M.**, "Fractional Differencing," *Biometrika* 68 (1981), 165-176.

**Hsieh, D.A.**, "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance* 46 (1991).

**Hsieh, D.A.**, "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates," *Journal of Business* 62 (1989), 339-368.

- Hurst, H.E.**, "Long-Term Storage Capacity in Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineer* 116 (1951), 770-799.
- Johansen, S.**, "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models," *Econometrica* 59 (1991), 1551-1580.
- Kashyap, P.L. and K. B. Eom**, "Estimation in Long-Memory Time series Models." *Journal of Time Series Analysis* 9 (1988), 35-41.
- King, M., E. Sentuna and S. Wadhvani**, "Volatility and Links Between National Stock Markets," *Econometrica* 62 (1994), 901-933.
- Lamoureux, Christopher G. and William D. Lastrapes**, Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects, *Journal of Finance* 45 (199b), 221-229.
- Larrain, M.**, "Empirical Tests of chaotic Behavior in a Nonlinear Interest Rate Model," *Financial Analysts Journal* 47 (1991).
- Li, W.K. and A.E. McLeod**, "Fractional Time Series Modeling," *Biometrika* 73 (1986), 217-221.
- Lo, A.W.**, "Long Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica* 59 (1991), 1279-1313.
- Lo, A.W. and A.C. MacKinlay**, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks:Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies* 1 (1988), 41-66.
- Loretan, M. and Phillips, P.C.B.**, "Testing the Covariance Stationarity of Heavy-tailed Time Series: An Overview of the Theory with Applications to Several Financial Datasets," *Journal of Empirical Finance* 1 (1994) 211-248.
- Mandelbrot, B.**, "Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and 'Martingale' Models," *Journal of Business* 39 (1966).
- Mandelbrot, B.B.**, "Statistical Methodology for Nonperiodic cycles: From the

- Covariance to R/S Analysis," *Annals of Economic and Social Measurement* 1 (1977), 259-290.
- Mandelbrot, B.**, *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman (1982).
- Mandelbrot, B.**, "The Pareto-Levy Law and the distribution of Income," *International Economic Review* 1 (1960).
- Maravall, A.**, "Stochastic Linear Trends," *Journal of Econometrics* 56 (1993), 5-37.
- Medio, A.**, *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- Nelson, C.R. and C.I. Plosser**, "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications," *Journal of Monetary Economics* 10 (1982), 139-162.
- Nelson, D.B.**, "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Appraisal," *Econometrica* 59 (1991), 347-370.
- Nelson, D.B.**, ARCH Models as Diffusion Approximations, *Journal of Econometrics* 45 (1990), 7-38.
- Nelson, D.B. and D.P. Foster**, "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models," *Econometrica* 62 (1994), 1-41.
- Nyblom, J. and T. Makelainen**, "Comparisons of Tests for the Presence of Random Walk Coefficients in a Simple Linear Model," *Journal of the American Statistical Association* 78 (1983), 856-864.
- Nychka, D., Ellner, S., Gallant, A R., and McCaffrey, D.**, "Finding Chaos In Noisy Systems," *Journal of the Royal Statistical Society* 54 (1992).
- Ouliaris, S., J.Y. Park and P.C.B. Phillips**, "Testing for a Unit Root in the Presence of a Maintained Trend," In B. Raj(ed.) *Advances in Econometrics and Modeling*, Kluwer Academic Publishers, Needham, MA.,

(1988)

- Peters, E.**, Chaos and Order in the Capital Markets. New York: John Wiley & Sons (1991a).
- Peters, E.**, "A Chaotic Attractor for the S&P 500," *Financial Analysts Journal* (March/April 1991b).
- Peters, E.**, "R/S Analysis using Logarithmic Returns: A Technical Note," *Financial Analysts Journal* (November/December 1992).
- Peters, E.**, Fractal Market Analysis, New York: Wiley (1994).
- Phillips, P.C.B.**, "Some Exact Distribution Theory for Maximum Likelihood Estimations of Cointegrating Coefficients in Error Correlation Models," *Econometrica* 62 (1994), 73-93.
- Phillips, P.C.B.**, "Time Series Regression with a Unit Root," *Econometrica* 55 (1987), 277-301.
- Phillips, P.C.B. and S.N. Durlauf**, "Multiple Time Series Regression with Integrated Variables," *Review of Economic Studies* 53 (1987), 473-496.
- Phillips, P.C.B. and S. Ouliaris**, "Testing for Cointegration Using Principal Components Methods," *Journal of Economic Dynamics and Control* 12 (1988), 1-26.
- Phillips, P.C.B. and C.W. Schwert**, "Estimation of a Noninvertible Moving-Average Process: The Case of Overdifferencing," *Journal of Econometrics* 6 (1977), 199-224.
- Rhee, Il King**, "An Incomplete Information Structure and An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Pricing with Taxes," *The Korean Financial Management Association Vol.8 No.2* (Dec. 1991), 165-208.
- Rhee, Il King**, "Empirical Tests on the Consumption-based Asset Pricing Model by Estimating the Risk Aversion Coefficient in the Korean Economy," *Research in International Business and Finance IIA* (1994), 181-215.



- Rhee, Il King**, "Optimal Risk Sharing Between the Bank and Its Depositors in a General Equilibrium Economy," *Journal of Myong-Ji University and Collection of Lectures: On the 40th Anniversary of the University* (1989), 397-423.
- Poterba, James and Lawrence Summers**, The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations, *American Economic Review* 76 (1986), 1142-1151.
- Said, S.E. and D.A. Dickey**, "Hypothesis Testing in ARIMS( $p, 1, q$ ) Models," *Journal of the American Statistical Association* 80 (1985), 369-374.
- Said, S.E. and D.A. Dickey**, "Testing for Unit Roots in ARMA Models of Unknown Order," *Biometrika* 71 (1984), 599-607.
- Sargan, J.D. and A. Bhargava**, "Testing the Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk," *Econometrica* 51 (1983), 153-174.
- Scheinkman, J.A., and LeBaron, B.**, "Nonlinear Dynamics and stock Returns," *Journal of Business* 62 (1989).
- Schinasi, G.J.**, "A Nonlinear Dynamic Model of Short Run Fluctuations," *Review of Economic Studies* 48 (1981).
- Schwert, G.W.**, "Effects of Model Misspecification on Tests for Unit Roots in Macroeconomic Data," *Journal of Monetary Economics* 20 (1987), 73-103.
- Schwert, G.W.**, Indexes of United States Stock Prices from 1802 to 1987, *Journal of Business* 63 (1990b), 399-431.
- Schwert, G.W.**, Stock Volatility and the Crash of 87, *Review of Financial Studies* 3 (1990a), 77-102.
- Schwert, G. W.**, "Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Business and Economic Statistics* 7 (1989), 147-160.
- Schwert, G.W.**, Why Does Stock Market Volatility Change over Time?, *Journal of Finance* 44 (1989), 1115-1153.
- Shephard, N.**, "Local Scale Models: State Space Alternative to Integrated GARCH

- Porcesses," *Journal of Econometrics* 60 (1994), 181-202.
- Shiller, R.J.**, Market Volatility. Cambridge, MA: M.I.T. Press (1989).
- Sowell, F.**, Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Econometrics* 53 (1992), 165-188.
- Stock, J.H.**, "Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors," *Econometrica* 55 (1987), 1035-1056.
- Stock, J.H. and M.W. Watson**, "Testing for Common Trends," *Journal of the American Statistical Association* 83 (1988c), 1097-1107.
- Tong, H.**, Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach. Oxford, England: Oxford University Press (1990).