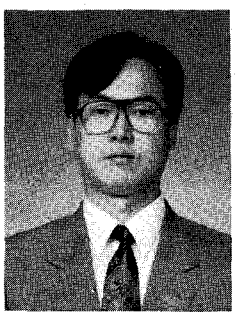
특집

카오스(CHAOS)이론



노 영 훈

(주) 금성사 생활시스템연구소
제5연구실 선임연구원

1. 카오스(CHAOS)란 무엇인가

카오스(CHAOS)란 혼돈의 의미로 복잡, 무질서, 불규칙한 상태를 말하며 장래의 예측이 불가능한 현상을 가리킨다. 카오스의 어원으로는 그리스어로 우주가 생성되는 과정중 최초의 단계로 천지의 구별이 없는 엉망진창의 상태를 뜻한다. 그러나 여기서의 혼돈상태란 상호 깨어지고 서로 부서지는 상태가 아니라 마치 교향악을 연주하듯 조화를 이룬 가운데 혼동하는 복잡함속의 일정한 규칙이 존재한다. 카오스는 혼돈이라는 원래 의미보다는 "복잡한 본질을 이루고 있는 요소" 또는 "불규칙한 이동현상"이라는 뜻으로 쓰이고 있다. 지금까지 우리가 간과해 왔던 현상중에는 과학의 모든 분야에서 큰 영향을 미치고 있는 요소가 그 속에 감추어져 있다는 사실을 알게 되었다. 카오스이론을 통해서 복잡한 현상을 일으키는 여러 요인들중에서 2~3개정도의 요인만을 분

석함으로써 예측도 가능하게 되었다. 이것은 언뜻보아서는 무질서하게 보이는 현상의 배후에는 정연한 질서가 감추어져 있다는 것을 의미한다. 그랗게 베일속에 감추어져 있는 알려지지 않은 법칙을 파헤치는 것이 카오스연구의 최대목적이다. 따라서 카오스에는 완전히 새로운 과학을 탄생시키는 가능성이 있는 것이다. 카오스이론을 처음으로 제안한 사람은 미국의 기상학자인 에드워드 로렌츠였다. 로렌츠는 1963년 기상현상의 대류현상을 컴퓨터로 시뮬레이션을 하던중 처음의 조건이 아주 적게 다를지라도 그 결과는 아주 달라지고 만다는 불안정한 현상이 존재하고 있음을 발견하고 이때문에 천기의 예측이 어렵다는 것을 알게 되었다. 로렌츠의 이러한 연구발표로 카오스의 연구가 여러분야로 확산되었으며 오늘날에는 카오스공학으로 자리를 잡게 되었다.

"카오스"는 상대론이나 양자역학과 비교하여 양자레벨에서 우주레벨까지 여러가지의 시간적, 공간적 스케일로 광범위한 현상으로 존재한다. 따라서 상대론, 양자역학과 더불어 "카오스"는 20세기 과학의 3대 발견이라고 까지 예찬하고 있다. 지금까지 공학세계에서 주로 다루어왔던 선형세계의 한계점을 뛰어넘어 비선형세계의 문제까지 해결할 수 있는 방법을 제공하게 되었다. 종전까지만 해도 해석이 가능한 것만을 측정하여 분석하고 복잡하고 불규칙적인 현상들을 잡음으로 처리할 수 밖에 없었지만 "카오스이론"을 적용함으로써 그러한 뜻을 알 수 없는 복잡한 현상중에서도 일정한 규칙과 단순한 행동에 따라 움직인다는 것이 점차 밝혀지게 됨으로서 해석이 가능하게 되었다.

카오스의 특징과 판정기준을 요약하면 다음과 같다.

카오스의 특징
1. 결정론적 시스템(deterministic system)에서 일어난다.
2. 외부잡음(external noise)과는 다르다.
3. 한 parameter에 대한 trajectory는 초기조건에 민감하다.
4. positive lyapunov exponent는 초기조건에 민감하지 않다.
5. 시스템 parameter값들이 정해졌을 때 이상하고 복잡한 trajectory는 subharmonics가 존재하는 일련의 과정을 통해 일어난다.
카오스의 판정기준
1. 위상고간(phase space)상에서 어트랙터(attractor)의 형상이 이상한 끌개(strange attractor)이다.
2. 에너지 스펙트럼(power spectrum)에서 하나의 discrete한 주파수로 이루어져 있지 않고 넓은 영역에 걸쳐 존재한다.
3. correlation dimension이 정수값이 아니다.

2. 공학적측면에서의 카오스(CHAOS)

대부분의 공학적 실험장비들을 주파수변환기(frequency transformer)로 생각할 수 있다. $\omega 1$, $\omega 2$와 같은 주파수를 갖는 입력신호를 받아들여 출력신호를 분석할 수가 있다. 이때 출력신호에 입력신호와 같은 주파수가 나타난다면 그 시스템은 선형시스템이라 할 수 있다. 한편 비선형시스템인 경우에는 출력신호에 입력신호의 주파수들이 서로 조합된 주파수가 나타나게 되고 subharmonic 현상이 나타난다. 이러한 subharmonic현상이 카오스현상의 첫번째 단계로 나타나는 것이 밝혀졌다.

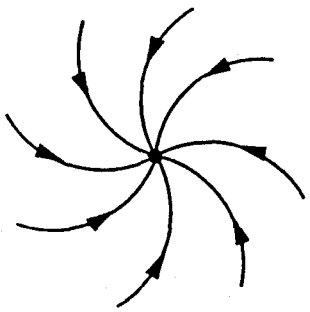
카오스현상은 결정론적시스템(deterministic system)의 어떤 매개변수(parameter)의 값에서 비

주기적인 해(non-periodic solution)가 불안정(unstable) 하지만 일정한 범위내에 제한(bounded)되어 나타난다. 잡음(NOISE)과 같이 복잡하고 예측하기 어려운 이 같은 현상을 "결정론적 카오스"라 하며 이러한 해의 궤적을 이상한 끌개(strange attractor)라고 부른다. 이런 현상을 분지(bifurcation)이론으로 설명할 수 있다. 이제 어떤 과정을 걸쳐 카오스 현상이 나타나는 지에 대해 자세히 살펴보자.

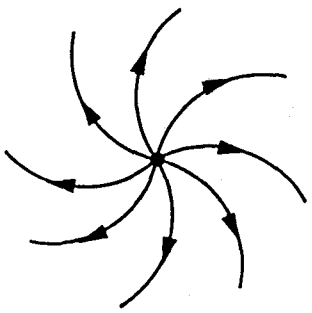
Navier-Stokes 방정식

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(V\Delta)V = -\frac{1}{\rho}\Delta p+\upsilon\Delta V$$

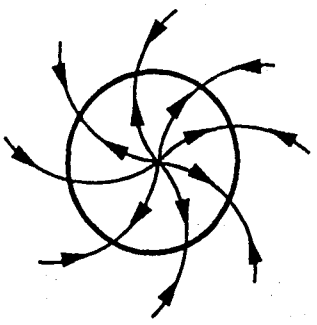
의 Dissipative Term에 있어서 중요한 역할을 하는 Reynolds수 R이 충분히 작을 때 유체운동은 위상공간(phase space)상에서 안정된 고정점(stable fixed point)으로 나타난다. 이 안정된 고정점이 어트랙터(attractor)로서 작용한다. Reynolds수를 첫번째 임계값(critical value) R_c1보다 더 크게 증가시키면 고정점은 안정성(stability)을 잃게 되어 이점에서 반발하게 된다. Reynolds 수 R의 작은 변화는 위상공간상에서 모든 흐름의 방향을 바꾸게 할 만큼 크게 작용하지 않으므로 고정점 근처에서는 반발하지만 전체적으로 보았을 때에는 어트랙터(attractor)를 형성하고 있다. 이러한 어트랙터는 불안정한 고정점 주위에서 폐곡선(closed curve)를 형성하고 이 폐곡선 위로 모든 흐름을 끌어 당긴다. 이것을 시스템의 주기적인 운동에 기인하는 "limit cycle"이라 부른다. "Hope Bifurcation"을 이용하여 고정점으로부터 limit cycle을 만들어 낼 수 있다, Reynolds 수 R을 또다른 임계값 R_c2로 증가시키면 limit cycle이 안정성을 읽게 되고 이 limit cycle이 모든 흐름을 반발시키게 되고 또 다른 분지의 성질이 나타난다. 이 때 불안정한 limit cycle 주위에 2-torus(attracting closed curve)가 나타난다. 만약 토러스위에 있는 두개의 주파수가 incommensurate하다면 그 운동은 준-주기적(quasi-periodic)으로 나타난다. Landau와 Hopf는 이 과정을 계속했을 때 incommensurable frequency의 매우 큰 값을 갖는 final state를 "turbulence"라 정의했다.



Stble fixed point



Unstable fixed point



Limit cycle

그러나 Landau-Hopf의 주장은 중요한 물리적 현상인 frequency locking현상을 무시하였다. 즉, 거의 모든 주파수들을 locking되기 때문에 독립적인 주파수들을 사라지게끔 되어있다. 따라서 1971년 Ruelle-Takens는 Landau-Hopf가 주장한 turbulence가 자연계에 존재하지 않는다고 반박하게 되었다. Ruelle-Takens는 이상한 끌개(strange attractor)상의 운동을 turbulence라고 주장하게 되었다. 이것은 다음과 같이 요약할 수 있다.

fixed point ⇒ limit cycle ⇒ 2-torus
⇒ strange attractor(turbulence)

여기서 주목해야 할 것은 2-토러스상의 준-주기 운동(quasi-periodic motion)이 안정성을 잃게 되어 바로 turbulence를 야기시킨다는 것이다.

시스템 매개변수(parameter)가 변함에 따라 시스템의 정상적인 운동이 어떻게 바뀌는 지를 알 수 있는 분지(bifurcation)에 대해 알아보자. 함수

$$Q_{-\mu}(x) = \mu x(1-x)$$

에서 분지되는 μ의 값은 중요한 역할을 한다. 결국 이러한 μ의 값을 통해서 어느 곳에서 주기적인 점(periodic point)이 생기고 사라지는 지를 알 수 있다. 이 함수에 대한 bifurcation diagram은 x=1/2로 놓고 구간 (0, 4)에서 μ를 0.001씩 증가시킴으로써 약 700번 정도 iteration하고 (μ, $Q_\mu^{[n]}(x)$)의 좌표를 찍으면 얻을 수 있다. 함수 $Q_{-\mu}(x)$는 x=0, 1에서 평행점(equilibrum point)를 갖는다. μ인 경우에는 2개의 평형점이 존재하게 된다. 한편 고정점에서 계산된 기울기 $|Q_{-\mu}(x)'|$의 값을 이용하여 mapping의 안정성을 결정할 수 있다. 즉, 기울기는 $|Q_{-\mu}(x)|$〉1이라면 고정점은 불안정하다. 이렇게 하여 얻은 bifurcation diagram을 분석해 보자.

i) $0 \leq \mu \leq$ 일때

모든 점들은 x축상에 놓이게 된다. 왜냐하면 $0 \leq \mu \leq 1$일때 모든 x의 iteration이 0으로 attract되기 때문이다.

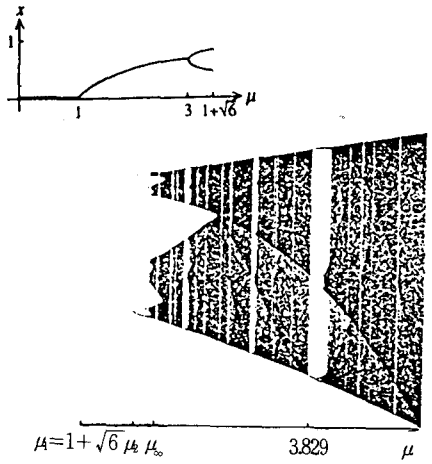
ii) $1 < \mu \leq 3$일때

2개의 고정점이 있다. x=0인 점에서는 기울기가 1보다 크므로 불안정하고 다른점에서는 안정하다. 이 구간에서 곡선은 $(\mu, P_{-\mu})=(\mu, 1-1/\mu)$의 형태로 모든 점들을 나타낸다. 즉, $P_{-\mu}$는 (0, 1)구간에 있는 모든 x의 iteration을 attract한다.

iii) $3< \mu \leq 1+\sqrt{6}$일때

(0, 1)구간에 있는 모든 x의 iteration들은 결국 한점으로 고정되지 않고 2-cycle($q_{-\mu}$, μ)로 attract된다. 즉, 2개의 곡선이 존재하는데 하나는(μ, $q_{-\mu}$), 다른 하나는 (μ, $r_{-\mu}$)의 형태로 점을 표시한 것이다. 분지점 μ=3에서 attracting 2-cycle을 나타내고 있다.

μ을 $1+\sqrt{6}$ 보다 더 증가시키면 attracting 8-cycle에 대응하는 8개의 가지가 존재한다. 이런 과정을 계속 진행시키면 결국 2^n배로 가지가 분지되는 것을 알 수 있다. (period-doubling bifurcation)



3. 카오스 어트랙터(chaos attractor)의 특징

어떤 시스템에서 분지(bifurcation)와 카오스 스펙트럼(chaos spectrum)의 분석은 먼저 위상공간(phase space)에서 시스템의 궤적(trajectory)을 그려보고 주기적인 특성을 찾은 후에 어트랙터위에서의 카오스적 운동의 특징을 도출하는 것이다. 에너지 스펙트럼(power spectrum)을 분석해 보면 카오스 대역(chaotic band)에 있는 높은 차수의 주기운동을 확인함으로써 준-주기운동과 주기운동을 구별할 수 있다. 그러나 2배 주기(periodic doubling)와 관련된 카오스 어트랙터의 에너지 스펙트럼은 광대역잡음의 영역위에서 분명한 peak치에 의해 구별이 가능하지만 카오스 어트랙터 사이에서는 서로 큰 구별이 되지 않는다. 일반적으로 준-주기적(quasi-periodic)인 운동이나 외부잡음에 의해 오염된 운동을 카오스운동과 구별하는 것을 결코 쉽지 않다. 따라서 어트랙터를 인식하고, 특징을 잡는 등, 구별할 수 있는 정량적인 수단을 필요로 하게 된다. 특히 표본화된 점(sampled point)들로 이루어진 시계열의 데이타(data of time series)로 부터 변화하지 않는 특성을 추출하는 작업이 요구되어진다. 따라서 Lyapunov exponent와 dimension에 대한 여러가지 정의를 소개함으로써 어트랙터를 서로 구별할 수 있는 방법을 제시한다. 본 장을 설명하기에 앞서 자주 사용되는 전문용어에 대한 설명을 먼저 하기로 한다.

용 어 설 명

(1) dissipative system

마찰이 없는 입자에 대한 뉴톤역학과 같은 Hamiltonian시스템에서는 시간이 경과함에 따라서 위상공간의 부피는 일정하게 유지된다. 그러나 dissipative system에 있어서는 이와같은 성질을 갖지 못한다. 위상공간에서 궤적이 차지하는 면적이 시간이 경과함에 따라서 줄어들게 되고 오랜 시간이 경과한 후의 위상공간에서 차지하는 면적이 초기상태의 면적보다 작게되고 결국 dissipative system은 어트랙터가 존재할 수 밖에 없는 특성을 갖게 된다.

(2) 어트랙터

어떤 시스템의 위상공간을 고려할 때 초기조건은 시간이 무한대로 진행함에 따라 위상공간상의 한 부분집합으로 끌려 들어옴을 볼 수 있다. 예를들면 damped harmonic oscillator에 있어서 어트랙터는 정지한 상태의 점이된다. 또한 limit cycle 안에서 주기적으로 동작하는 oscillator의 경우 limit set은 위상공간상에서 폐곡선이 된다.

(3) 이상한 끌개(strange attractor)

어트랙터가 점으로 나타날때 그것의 차원은 0이며, 폐곡선일때는 1의 차원을 갖는다. 많은 경우에 있어서 어트랙터들은 매우 복잡하고 불규칙적일 수 있기 때문에 정수가 아닌 차원을 갖게 된다. 이러한 경우 프랙탈(fractal)이라 부르며 만약 이러한 프랙탈이 어트랙터로 작용할 때 이것을 이상한 끌개라 부른다.

가. Kolmogorov Capacity

dissipative system에 대한 phase space상의 궤적은 시간이 무한대로 갈수록 어트랙터를 벗어나지 못하고 어트랙터안에서 움직이게 된다. 이때 어트랙터의 차원은 원래의 위상공간상의 차원보다 더 낮은 차원을 갖게 된다. 그리고 우리는 카오스 어트랙터가 아닌 경우에 보통의 어트랙터의 차원이 정수값이라는 사실을 쉽게 확인할 수 있다.

즉, 고정점의 차원은 0, limit cycle의 차원은 1, 2-토러스(torus)의 차원은 2가 된다. 그러나 카오스 어트랙터의 차원은 정수값이 아님이 밝혀졌다.

1919년 초에 Hausdorff는 차원에 대한 일반적인 정의를 다음과 같이 간단하게 설명했다. 먼저 규칙적인 기하학 형태를 갖는 물체 즉, 입방체를 선택한 후 이 입방체의 각각의 공간방향으로 길이를 2배로 한다. 이때 부피는 원래 입방체의 8배가 된다. 일반적으로 차원이 D인 물체를 취한 후 각각의 공간방향으로 길이를 1배 증가시키면서 부피가 처음 것보다 $k(=1^D)$배 증가하게 된다. 따라서 다음과 같이 새로운 차원의 정의를 얻게 된다.

$$k = 1 \Rightarrow D = \frac{\log K}{\log 1} \qquad (식\ 3-1)$$

이때 차원 D의 값은 정수가 아닐 수 있다. 이것이 바로 카오스의 특징중의 하나이다. 정수값이 아닌 차원을 갖는 가장 간단한 예로 칸투어 집합(cantour set)을 들어보자. 먼저 구간(0, 1)에서 선분을 취한 후 그것을 3등분 한다. 그중 가운데 1/3부분을 버린다. 이제 남아있는 선분(0, 1/3), (2/3, 1)에 대해서도 위의 과정을 계속 반복한다. 이렇게 하여 얻어진 점들의 limit set의 차원은 얼마나 되겠는가?

구간(0, 1/3)에 남아있는 선분을 생각해 보면 1=3배만큼 크기를 증가시키면 원래의 것(0, 1)과 같이 되고 마찬가지로 구간(2/3, 1)의 선분에 대해서도 같은 결과를 얻으므로 2개가 생기게 된다 (k=2). 따라서 차원 D는 다음과 같다.

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

대부분의 이상한 끌개는 집합과 같은 비슷한 구조를 갖는다. 한편 실제적 경우에 있어서는 box-counting algorith을 사용하여 차원을 계산한다. 즉, 한변의 크기가 ε인 작은 box로 위상공간을 분할한 후 궤도상에 적어도 하나 이상의 점을 포함하는 box의 수를 카운트하고 다음과 같이 극한을 취하면 차원을 계산할 수 있게 된다.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log N(1/\varepsilon)} \qquad (식\ 3-2)$$

식 (3-1), (3-2)를 kolmogorov capacity라 한다.

나. Correlation Dimension

어떤 연속적인 신호를 디지탈화하는 장치를 사용하여 물리적인 변수들의 시간에 따른 변화를 측정한다고 가정해 보자. 이때 데이타들이 다음과 같이 시계열(time series)로 기록된다.

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \cdots\cdots, X_N \qquad (식\ 3-2)$$

여기서 보통 데이타의 총 갯수 N을 10^8정도가 되도록 크게 잡는다. 일반적으로 어떤 시스템에 있어서 선형적인 상호작용에 의해 이러한 데이타 X_i들은 다른 변수에 대한 정보도 포함하고 있으므로 하나의 시계열 데이타로부터 이와 같은 정보를 추출할 수 있다. 간단한 예로써 어트랙터에 대한 phase portrait를 둘 수 있다. 대부분의 실험적인 상황에서 우리는 위상공간의 차원을 알 수 없고 다만, 시스템의 trajectory가 훨씬 더 낮은 차원의 어트랙터안에서 벗어나지 않고 있다는 사실만을 알 수 있다. 따라서 우리가 우선적으로 해야 할 일은 유한하지만 충분히 높은 차원 m(embedding dimension)을 갖는 벡터공간을 시계열 데이타로부터 만드는 것이다.

$$Y_1 = (X_1, X_{1+p}, X_{1+2p}, X_{1+4p}, X_{1+5p}, \cdots\cdots X_{1+(m-1)p}),$$
$$Y_2 = (X_2, X_{2+p}, X_{2+2p}, X_{2+4p}, X_{2+5p}, \cdots\cdots X_{2+(m-1)p}),$$
$$Y_3 = (X_3, X_{3+p}, X_{3+2p}, X_{3+4p}, X_{3+5p}, \cdots\cdots X_{3+(m-1)p}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$Y_i = (X_i, X_i+p, X_i+2p, X_i+4p, X_i+5p, \cdots\cdots X_i+(m-1)p),$

.....

이제 우리는 M개의 벡터를 만들었고 두 벡터 사이의 거리를 정의할 수 있다. 만약 두 백터사이의 거리가 어떤 상수 ε보다 작다면 이 두 벡터들은 서로 correlated되어 있다고 한다. 이러한 M개의 벡터들 중에서 서로 correlated되어 있는 모든 쌍들을 카운트한 후 그것들의 최대값을 1로 정규화(normalization)시킨 후 다음과 같은 correlation sum을 얻을 수 있다.

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j}^{M} \theta(\varepsilon - \text{distant}(y_i, y_j)) \qquad (식\ 3-4)$$

여기서 step 함수 $\theta(x)$는

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

이때 correlation dimension D는 다음과 같이 정의한다.

$$D = \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \qquad (식\ 3-5)$$

한편 ε을 너무 크게 택하면 모든 벡터들이 correlated되어 $C(\varepsilon) = 1$이 되므로 $D = 0$가 된다. 만약 ε이 변함에 따라 $C(\varepsilon)$을 다음과 같이 scaling 하다면

$$C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\nu} \qquad (식\ 3-6)$$

$D = \nu$가 된다. 반대로 ε을 너무 작게 택한다면 외부와 장비에서 생기는 모든 잡음들이 중대한 영향을 미치게 된다. 일반적으로 모든 차원의 계산에서 random noise가 작용을 하기 때문에 ν값이 embedding dimension m에 접근하게 된다. 따라서 scaling relation (3-6)은 ε의 어떤 범위내에서만 유효하게 되어 D를 정확히 계산할 수 있다. ε의 적당한 범위내에서 scaling relation(3-6)을 다시 적어보면

$$C(\varepsilon) = A * \varepsilon^{\nu} \qquad (식\ 3-7)$$

로 표시할 수 있고 (식 3-7)의 양변에 log를 취하면

$$\log C(\varepsilon) = \log A + \nu \log \varepsilon \qquad (식\ 3-8)$$

$$\nu = \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \text{constant}$$

따라서 ε에 대한 $C(\varepsilon)$을 log-log로 그렸을 때 기울기값이 바로 correlation dimension이 된다.

다. Lyapunov Exponent

Lyapunov exponent는 평형점(equilibrium point)에서 eigenvalue를 일반화 시킨 것이다. 준주기적인 해와 카오스 해까지도 포함해서 어떤 형태의 stead state behavier의 안정성(stability)를 결정하기 위해서 Lyapunov exponent를 사용할 수 있다.

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t),\ X(t_o) = X_o \qquad (식\ 3-9)$$

위 식을 평행점 X_{eq}에서 선형화시키면.

$$\delta\left[\frac{dX}{dt}\right] = Df(X_{eq})\,\delta X \qquad (식\ 3-10)$$

이때 $Df(X_{eq})$의 eigenvalue를 λ_i, eigenvector를 n_i, 식(3-9)의 solution trajectory를 $\phi_{t_o}(X)$, $\phi(X)$의 X에서의 도함수를 $\phi_t(X_{eq})$, $\phi_t(X)$의 eigenvalue를 n_i라고 하자. 이때 Lyapunov exponent는 다음과 같이 정의 된다.

$$\nu_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n \qquad (식\ 3-11)$$

이해를 돕기 위해 평행점에서의 Lyapunov exponent를 구해보자. 식(3-9)의 solution trajectory $\phi_{to}(X, t)$를 식(3-9)에 X대신 대입하면,

$$\phi_t(X_o, t_o) = f(\phi_t(X_o, t_o), t),\ \phi_{t_o}(X_o, t_o) = X_o \qquad (식\ 3-12)$$

위 식을 초기조건 X_o에 대해 미분하면,

$$D_{x0}(\phi_t(X_o t_o)) = D_{x0}(f(\phi_t(X_o t_o)), t)\, D_{x0}(\phi_t(X_o t_o)),$$
$$D_{x0}(\phi_{t_0}(X_o t_o) = 1$$

$$\phi = D_{x0} f(\phi_t(X_o t_o))\ \phi_t\ \phi_{t_0} = 1$$

따라서 우리는 $X = X_{eq}$에서 다음과 같은 식을 유도해 낼 수 있다.

$$\phi_t(X_{eq}) = \varepsilon^{Df(X_{eq})t}$$

즉, $mi(t) = \varepsilon^{\lambda_i * t}$,

$$v_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\varepsilon^{\lambda_i * t}| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} Re[\lambda_i]t = Re[\lambda_i]$$

이 특별한 경우에 있어서 Lyapunov exponent는 평형점에서의 eigenvalue의 실수부와 같고 평형점 근처에서 $\lambda_i < 0$ 이면 수축(contradiction)하고 $\lambda_i > 0$ 이면 팽창(expansion)하게 된다. 이렇게 구해진 Lyapunov exponent는 steady state behavier를 보다 쉽게 판별할 수 있다. 어트랙터인 경우 contradiction이 expansion보다 더 지배적으로 작용한 경우가 된다. 즉,

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i < 0$$

정리하면 다음과 같다.

1) 안정된 평형점(stable equilibrium point)
   모든 i에 대해서 $\lambda_i < 0$이다.
2) 안정된 limit cycle
   $\lambda_1 = 0,\ \lambda_i < 0$ for $i = 2, 3, 4, \cdots\cdots$
3) 안정된 토러스(stable torus)
   $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_i < 0$ for $i = 3, 4, 5, \cdots\cdots$

따라서 여러종류의 어트랙터로 부터 이상한 끌개를 구별하는 방법은 적어도 하나의 positive Lyapunov exponent의 존재여부를 확인하면 된다.

4. 카오스의 응용

카오스현상을 이용하는 방법에는 2가지 접근방법이 있다.

가. Negative한 응용

시스템에 카오스현상이 나타나지 않도록 설계하는 것이 목적이다. 시스템설계시에 parameter공간에 의한 카오스 발생영역이나 분기구조 상태공간에 의한 카오스의 발생영역등을 해석하는 것이 중요하다. 여러가지 비선형시스템은 보다 쉽게 카오스해를 가질 수 있다. 그러나 시스템의 고장은 주로 해가 카오스나 프랙탈 경계에 기인하는 가능성이 있다. 이러한 시스템의 예상보전이나 안전설계에는 카오스 이론이 필요하다.

나. Positive한 응용

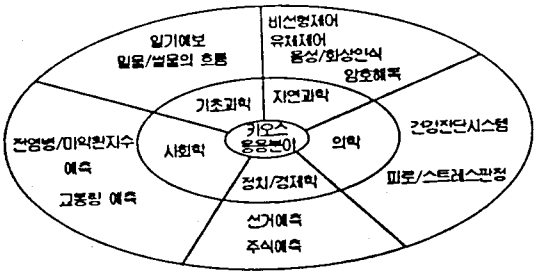
카오스현상 발생시 어떻게 그 진동을 제어할 것인가에 관심을 갖는다. 카오스가 발생하는 경우에 그 진동을 어떻게 억제하는 가는 종래의 제어이론의 중요한 목적으로 정적 안정성을 습득하는 문제이다. Ott는 카오스에 수반하는 불안정 평형점이나 불안정 주기해를 시스템 parameter의 미소한 시변구동에 의해 안정화하는 제어법칙을 제안하였다. 기타 적용제어를 이용한 수법이나 2자유도를 갖는 robust controller를 이용하는 방법이 있다.

위의 2가지 응용방법중 positive응용을 적용하는 어떤 시계열 데이타로부터 그 데이타가 가지고 있는 결정론적 규칙성을 찾아내고 어떤 시점의 데이타를 이용하여 장차 그 데이타가 어떤 값을 갖을 것인가를 예측할 수가 있다. 그 예측은 "고차원 역학계의 궤도는 그 중의 임의의 한 성분좌표(변수)의 정보만으로 부터 재구성할 수 있다"

라는 타켄스 이론에 기초하고 있다.

〔타겐스 이론〕

어떤 시계열 데이타 y(t)로부터 백터(Y(t), Y(t+τ), Y(t+2τ), Y(t+3τ), ……, Y(t+nτ))를 만든다. 이때 벡터는 n차원 데이타공간상에서 한점을 나타내고 있다. 따라서 t를 변화시킴으로써 n차원 데이타공간상에 궤적을 그릴 수 있다. 이 궤적은 n을 충분히 크게 잡으면 원래의 고차원 역학계의 궤적이 그려지게 됨으로 어떤 어트랙터가 나타난다. 다시 말하면 원래의 역학계의 어트랙터가 n차원 위상공간속에 묻혀 나타난다. 이때 n을 통상 embedding dimension이라 하지만 이 차원은 원래 역학계의 차원을 m으로 하면 n = 2m+1로 하면 충분하다는 것이 증명되고 있다. 실제로 이 경우는 충분조건이고 데이타에 의해서는 2m+1 미만에서도 가능한 경우가 있다. 특히 단기예측을 할 경우에는 n = 3~4 정도로 해도 충분한 경우가 있다.



5. 카오스이론의 응용사례

컴퓨터 컨비니언스社(日本)의 건강진단 시스템

일본의 정보처리회사인 컴퓨터 컨비니언스가 카오스이론을 응용하여 맥박을 측정함으로써 건강을 진단할 수 있는 카오스 어트랙터 프로서스(CAP)를 개발하였다. 이 장치는 손가락으로부터 맥박을 측정함으로써 얻어지는 데이타를 가지고 카오스 어트랙터를 도출함으로써 건강정도를 판정하게 된다. 즉 어떤 사람이 긴장상태에 있거나 흥미로운 일에 집중하고 있을 때, 그리고 목욕후 휴식상태에 있는 사람의 카오스 어트랙타는 서로 다르게 나타남을 볼 수 있다. 따라서 간장이 나쁜 사람의 경우에는 A형과 같은 카오스 어트랙터가 그려지고 신장이 나쁜 사람의 경우에는 B형과 같은 카오스 어트랙터가 그려짐으로써 건강을 진단하게 된다. 이러한 의학장비가 더욱 더 개발된다면 비싼 건강진단장비를 사용하지 않고서도 스스로의 건강을 진단하는 것이 가능하게 된다. 이러한 카오스 어트랙터를 이용한 건강진단이 가능한 것은 우리가 한의원에 갔을 때 한의사는 먼저 환자의 맥박을 진단함으로써 환자의 병명과 치료약을 조제해 주는 것과 유사한 방법을 적용한 예이다.

소니(日本)의 정보통신연구소의 6축 로봇

소니에서 제조공장에 응용하기 위해서 카오스를 이용한 제어시스템을 탑재한 6축 로봇을 개발하였다. 이 로봇은 전방에 장애물이 있으면 에너지값이 커지게함으로써 이를 피하고 목표물에 접근하면 에너지값이 작아지게 만들어 줌으로써 목표물에 도달하도록 되어 있는 제어시스템으로써 최소 에너지 기법을 이용한 것이다. 예를들면 에너지공간에서 공이 언덕을 굴러갈 때 속도가 서서히 감소하고 약간 홈이 파진 곳에 도달하게 되면 정지하게 되여 이 상태를 국부 최소치라한다. 로봇이라면 이 상태에서 정지하게 된다. 정지하였을 때 에너지값이 크다면 이곳이 목표로 하는 장소가 아니므로 카오스 진동현상을 이용하여 이곳을 탈출하여 또다시 진행하게 되고 에너지값이 최소로 되는 장소에서 정지하게 되면 이곳이 바

로 목표로 하는 장소가 된다. 이때 로봇은 목표물에 도달하는 경로를 알지 못하더라도 스스로 탐색하면서 찾는 과정을 실현함으로 기존의 로봇에서는 움직임이 모두 프로그램되어 있는 것과는 상당히 자율성이 높은 로봇에 해당된다.

일본 기상청의 일기예보 예측시스템 연구

일본 기상청 예보과에서는 카오스이론을 응용해 일기예보의 정확성을 높이려는 연구가 활발히 진행중이다. 기상현상이 카오스라는 사실은 연구가들사이에서는 공통적으로 인식하고 있는 사실이다. 현재 일기를 예측하는 기본 방정식은 정립이 되어 있지만 온도, 습도, 바람, 기압배치등 변수를 아무리 세분화하고 정밀한 데이타를 입력하더라도 정확한 일기예보를 한다는 것은 불가능하다. 그러나 카오스이론을 적용하면 1개월정도는 어렵겠지만 1주정도의 정확한 일기예보는 가능할 것이라고 발표하고 있다.

금성사의 세탁기에 카오스이론을 적용

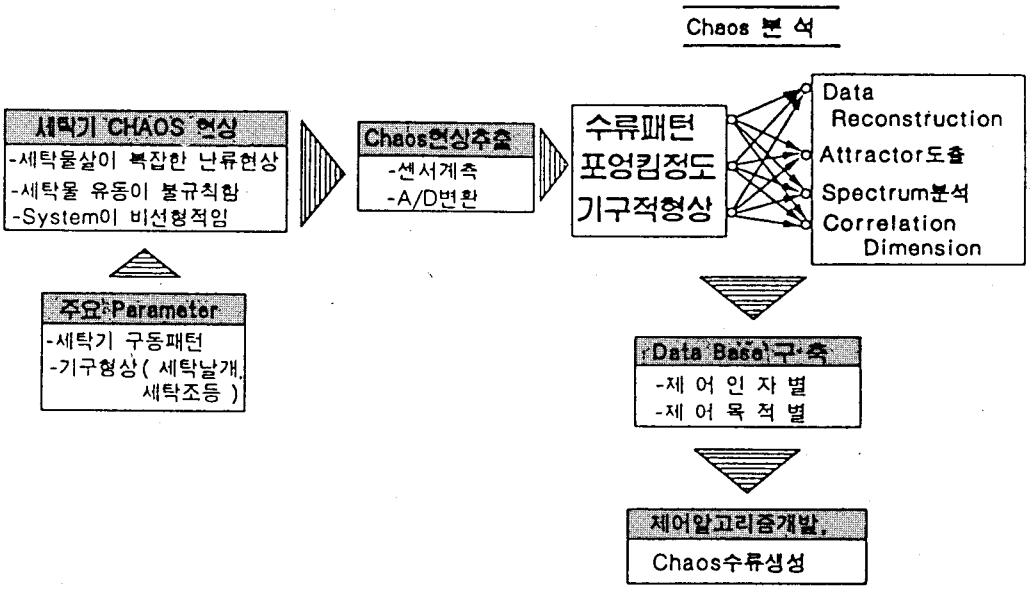
세탁기에 있어서 세탁중 빨래가 움직이는 패턴이 매우 불규칙하여 이제까지는 세탁물엉킴의 원인을 찾아내는 것은 거의 불가능한 것으로 인식되어 왔으나 카오스이론을 통하여 세탁물의 패턴을 해석해 냄으로써 이 엉킴의 원인을 제거하는 카오스 수류를 세탁기에 적용하여 세탁물 엉킴현상을 획기적으로 개선하였다, 이러한 연구를 진행시키기 앞서 금성사에서는 독자적으로 카오스 시뮬레이터를 자체 개발함으로써 이를 이용하여 세탁기의 복잡한 수류이동현상 및 세탁물 유동현상을 수류패턴과 기구형상(세탁날개 형상)에 따라 카오스 어트랙터 형상을 도출하여 분석한 후 일정한 규칙성을 가진 카오스 현상을 규명하고 여기서 세탁시 유리한 새로운 형태의 신수류인 카오스수류를 개발하는 데 성공하여 세탁물 엉킴을 획기적으로 해결하였다. 적용원리를 자세히 살표보면 다음과 같다.

먼저 세탁물살이 복잡한 난류현상을 일으키므로 세탁물의 유동이 불규칙하며 또한 시스템 자체가 비선형적 특성을 갖고 있기 때문에 세탁기는 카오스 특성을 갖고 있다. 세탁기에 카오스 현상을 일으키는 주요 Parameter가 세탁기는 구동패턴과 기구적형상임에 주목하여 세탁기로부터 카오스 추출장치를 통하여 얻은 데이타를 카오스 시뮬레이터를 통하여 카오스 분석을 행한다. 카오스 시뮬레이터에서는 수류패턴별, 포엉킴정도별, 기구적 형상별로 각각 Data Reconstruction, Attractor도출, Spectrum분석, Correlation Dimension을 분석한 후 Data Base를 구축하였다. 특히 세탁물이 엉켰을 때와 풀렸을 때의 어트랙터의 형상이 구별가능하며 Correlation Dimension을 통하여 이러한 어트랙터를 정량화할 수 있었다. 이렇게 구축된 Data Base를 통하여 포엉킴을 최소로 하는 카오스 수류를 개발하였다. 적용원리와 실험장치는 그림과 같다.

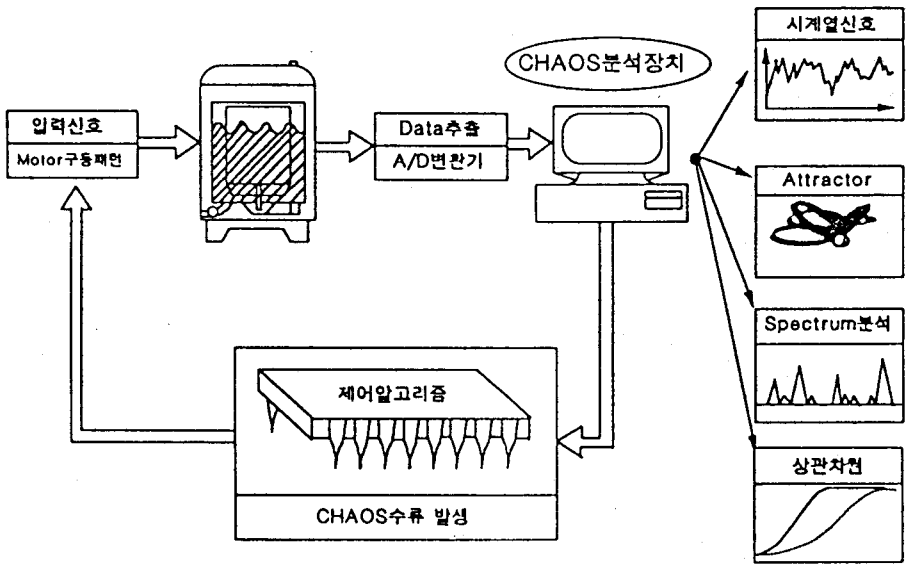
6. 참 고 문 헌

- Denny Gulick, "Encounters With Chaos", McGraw-Hill Inc. 1992
- Hao Bai-Lin, "CHAOS II", World Scientific, 1990
- J. M. T. Thompson & H. B. Stewart, "非線形力學とカオス", オーム社, 1989
- 合原一幸, "カオス", サイエンス社, 1992
- Francis C. Moon, "Chaotic Vibrations", John Wiley & Sons, 1987
- 日本 Trigger, "카오스의 시대가 오다", 1992년 3월
- Electronics, 1993년 1, 2월호

적 용 원 리



실 험 장 치 도



상관차원 : Correlation Dimension

전안