

혼돈띠에서의 내부고비현상

김 칠 민, 박 종 대, 조 창 호
배재대학, 물리학과

Interior Crisis in a Chaotic Band

Chil-Min Kim·Jong-Dae Park·Chang-Ho Cho
Dept. of Physics, Pai Chai University

주기배가 갈래질 본뜨기에서 안정 주기의 궤도는 2^n 으로 그 주기가 갈래질 하고 또 혼돈에 이르면 그 혼돈 띠는 $1/2^n$ 로 수렴하여 넓은 영역의 혼돈이 생긴다. 이때 순환식에 따라서 혼돈 띠 (Chaotic Band)의 수렴과정에서 이 혼돈띠들이 갑자기 넓은 영역의 하나의 혼돈띠로 바뀌는 고비현상이 생기기도 하는데 여기서는 우리가 만든 순환식에서 생기는 이러한 내부고비현상 (Interior Crisis)을 살펴보고 이 현상의 특성을 Lyapunov Exponent를 얻어 분석하고자 한다.

In the map of period-doubling bifurcation, stable fixed points bifurcate to 2^n fixed points, and in the chaotic region, the chaotic bands merge to $1/2^n$ bands. In a typical map, the chaotic bands expand to a broad chaotic band during the merging process, so called crisis. In this paper, interior crises appearing during the merging process will be discussed by using our map and will be analyzed the characteristics of the phenomenon by obtaining the Lyapunov Exponents.

Keywords : Interior Crisis, Lyapunov Exponents, Chaos, Bifurcation

I. 서론

주기배가 갈래질 본뜨기에서 생기는 여러 현상들이 많은 사람들에 의해 연구되고 그 결과가 분석되어 왔다. 본뜨기 과정 중에는 Feigenbaum 보편상수¹⁾ 외에도 주기창 (Periodic Window), 고비현상 (Crisis) 등이 연구되었었다. 그중 고비현상 (Crisis)은^{2), 3), 4), 5)} 네가지가 알려지고 있는데 Grebogi 등이 연구한 내부고비와 경계고비 (Boundary Crisis)가 있으며⁶⁾, Yamaguchi등에 의해 연구된 변환고비 (Transfer Crisis)³⁾가 있고 또 그외에 수렴고비⁴⁾ (Merging)가 있다. 이러한 고비현상들은 tangent갈래질에 의해서 생기는 간헐성 (intermittency)과는 달리 불안정점인 밀개 (repeller)와 혼돈끌개 (chaotic attractor)가 서로 만나게 될 때 두 상반된 행동을 하는 이들의 역할에 의해 어떠한 현상이 생기는가를 밝히는 것인데 이들 고비의 성질을 자세히 설명하면 내부고비의 경우는 주기창등에서 새로이 생기는 혼돈끌개가 불안정 궤도와 만나게 되면 갑자기 넓은 영역의 혼돈으로 확장되는 현상을 말하며, 경계고비는 넓은 영역의 혼돈끌개가 불안정한 궤도와 만나게 되면 그 혼돈이 발산해 버리는 현상을 말하고, 변환고비는 넓은 영역의 혼돈끌개가 불안정한 궤도와 만나 안정된 궤도로 갑자기 변환되는 것을 말한다. 그리고 주기배가 갈래질의 경우에는 주기가 2ⁿ에서 2ⁿ⁺¹로 갈라질 때 처음 안정된 주기의 2ⁿ의 주기는 불안정한 주기로 바뀌게 된다. 이러한 불안정한 주기는 혼돈이 시작되면 혼돈띠가 서로 만나는 점으로 수렴하게 되는데, 예를들면 2T의 불안정한 주기는 네개의 혼돈띠가 두개의 혼돈띠로 바뀔 때 두 혼돈띠가 서로 만나는 점으로 수렴해 가게 된다. 그 결과 두 혼돈끌개는 하나의 혼돈끌개로 변하며 이때 이 혼돈끌개들이 불안정 점과 만나게 되는데 이것도 내부고비의 일종으로 수렴고비라고 부른다.

이중 내부고비는 앞에서 설명한대로 혼돈띠의 갑작스러운 변환인데 이것은 주기창에서 생기는 안정한 궤도가 갈래질하여 혼돈띠로 바뀌며 이 혼돈띠가 발달해갈 때 이 혼돈띠와 상응하는 불안정 궤도, 즉 주기창에서의 tangent 갈래질 때 생기는 불안정 궤도와 만나게 되면 갑자기 혼돈띠가 확대되는 것으로 설명되어질 수 있다. 이런 고비는 항상 혼돈끌개와 이에 대응되는 (Coexisting) 불안정 궤도, 주기창에서의 Tangent 갈래질에 의해 생성되는 궤도로 설명되어지고 있다. 그러나 주기배가

갈래질의 경우에는 주기가 2ⁿ에서 2ⁿ⁺¹로 갈라질 때 처음 안정된 주기의 2ⁿ의 주기는 불안정한 주기로 바뀌게 된다. 이러한 불안정한 주기는 혼돈이 시작되면 혼돈띠가 서로 만나는 점으로 수렴하게 되는데 아직 이러한 혼돈띠 의 중간에서 하나의 혼돈띠와 불안정한 궤도가 서로 만나 그 혼돈띠의 영역이 갑자기 확대되는 현상에 대해서는 정확히 밝혀지지 않고 있다. 단 Grebogi 등에 의해 Q-switching 된 CO₂ 레이저에서⁶⁾ 주기창에서의 내부고비와는 달리 혼돈으로 가는 혼돈띠 중간에서 갑자기 넓은 영역의 혼돈으로 바뀌는 현상이 나타났으나 그 분석도 불완전 하였다. 즉 Grebogi 등의 고비현상들은 tangent 쌍갈래질에 의해서 생기는 서로 대응되는 혼돈끌개와 불안정궤도가 만나는데 비하여 CO₂레이저에서 실험된 고비는 tangent 쌍갈래질에 의해 생기는 것이나 수렴고비가 아니다. 따라서 혼돈끌개와 이것에 대응하는 불안정궤도를 자세히 조사해 보아야 한다.

그래서 여기서는 Grebogi등의 실험에서 생기는 것과 같은 꼴의 고비현상을 우리의 순환식으로 보이고 서로 대응 궤도를 조사하여 그 현상을 설명하므로써 Grebogi 등의 실험에서 생기는 내부고비를 좀더 자세히 이해하고자 한다.

II. 계산결과 및 분석

이러한 내부고비현상을 보기 위하여 다음의 식을 사용하였다.

$$X_{n+1} = \dots a X_n \cdot (1 - X_n) \dots \dots \dots (1-a)$$

$$Y_{n+1} = \dots 4 \cdot X_{n+1} \cdot Y_n \cdot (1 - Y_n) \dots \dots \dots (1-b)$$

여기서 X_n, Y_n ∈ {0,1} 이며 n은 변수로서 0부터 4까지 변화시키면서 쌍갈래질 본뜨기를 구했다. 먼저 이 식을 좀더 자세히 살펴보면 1-a식에서 0에서 4까지 변하고 X_n의 값은 0에서 1까지 바뀌므로 Y_n의 변수인 4·X_n도 0에서 4까지 변하므로 전체적으로 1-b식도 1-a식과 동일한 조건에서 바뀔을 알 수 있으며 두식의 차이는 1-b식의 경우 X_n이 혼돈의 값을 갖거나 n이 0이 아닌 주기배가 2ⁿ의 값을 갖게되면 X_n 값이 변하면서 입력되므로 Y_n의 값이 X_n에 의해서 좀더 복잡한 모양을 가지게 된다. 그러나 X_n의 값이 안정된 한 값만 갖게되면 이 값이 Y_n에 입력되므로 전체적으로는 1-b와 1-a의 식이 비슷한 현상을 가지게 됨을

알 수 있다. 즉 1-b식은 1-a에 의해 제어되는 연결 순환식의 모습이다. 이러한 식은 실제 실험에서도 나타나게 되는데 예로서 똑 같은 식으로 주어지는 것은 아니나 그 물리적 성질이 같은 것으로 이득이 변조되는 이산화탄소 레이저⁷⁾ 등을 들 수 있다. 이 경우 이산화탄소 레이저에서의 이득은 방전에 의해 주어지는데 방전이 불안정하여 갈래질하게 되면 이 방전의 결과는 X_n 으로 주어지게 되고 레이저 자체의 비선형으로 생기는 갈래질은 위 식의 Y_n 으로 들 수 있게 된다.

본 뜨 기

이렇게하여 구한 a의 변화에 따른 Y_n 값의 본뜨기가 그림 1-a에 주어져 있다. 이 그림은 a값을 2.7에서 4 까지 변화시켜 가며 구한 본뜨기인데, 이 그림을 보면 주기배가 쌍갈래질은 2ⁿ으로 쌍갈래질 해감을 알 수있고, 이것이 혼돈띠로 바뀐 다음 이 혼돈띠가 다시 서로 겹쳐지는 것을 알 수 있다. 그런데 이때 a의 값이 3.592572176...일때 4개의 혼돈띠가 갑자기 넓은 영역의 혼돈으로 그 본뜨기가 변하는 것을 볼 수 있는데 이것이 바로 내부고비의 하나인 것이다. 이 내부고비를 더 정확히 보기 위하여 a의 값을 3.4에서 3.6로 변화시켜 그림을 확대시켜 보면 그림 1-b처럼 고비현상이 생김을 좀더 명확히 볼 수 있으며 이것이 고비에 의한 것이라는 것은 이것을 그림 1-c처럼 다시 3.59257에서 3.59258로 확대시켜 보면 이 현상을 좀더 명확히 알 수 있다. 이 그림에서 점선 들은 불안정 궤도들로서 이러한 불안정 궤도가 혼돈띠와 만남을 명확히 알 수 있다.

이 현상을 좀더 분석하기 위하여 X_n 과 X_{n+1} 의 본뜨기를 구했는데 그 결과는 그림 2에 주어져 있다. 이 그림에 의하면 고비현상 이전에는 a값이 3.592572일 때 네개의 혼돈 끌개 (Chaotic Attractor)가 그림 2-a처럼 서로 떨어져 있었는데 비하여 고비 현상이 생기고 난 뒤에는 a값이 3.592573일 때 이 혼돈끌개가 그림 2-b처럼 서로 연결되어 있음을 알 수 있다. 이것은 A라고 그림에 표시되어 있는 새로운 끌개에 의하여 연결되어 있음을 알 수 있다. 이때 이 끌개를 X_n 축이나 X_{n+1} 축에 투영해보면 처음에는 네개의 투영된 혼돈이 생기나 고비가 생기고 난 뒤에는 하나의 혼돈으로 겹쳐져 투영되어 있음을 알 수 있다. 이것으로 볼 때 혼돈띠가 고비현상 뒤에는 하나의 넓은

혼돈띠로 갑자기 넓어짐을 알 수 있다.

Transcritical 쌍갈래질

여기서 혼돈띠와 불안정 궤도가 만나는 것을 보이기 위하여 혼돈띠와 만나는 불안정 궤도를 구했다. 혼돈띠와 만나는 불안정 궤도가 시작 되는 점은 식 1-a에서 이 식의 쌍갈래질 본뜨기 4T에서 4T로 가는 Transcritical 갈래질의 분기점에서 시작 되었는데, 이점은 $a = 3.4469\cdots$ 에서 시작하고 그 불안정 궤도를 그림 3-a에서 보면 Transcritical 쌍갈래질에 의해서 그 궤도가 시작됨을 알 수 있다. 이해를 돕기 위해 쌍갈래질 본뜨기를 다시 설명하면, 처음 1-a식에 의해서 구해진 안정된 한 궤도는 $a = 3$ 이 될 때 까지 X 값은 $1 - 1/a$ 의 함수를 가지므로 Y의 값도 역시 안정된 값을 가진다. 그뒤 X의 값이 쌍갈래질을 한번해서 2개의 안정된 값을 가지면 이궤도는 $X = (a-1)/2a \pm (1 - 2/a - 3/a^2)^{1/2}$ 로 주어지게 된다. 이식의 큰 값이 0.75를 넘어서면 분기할 수 있게 되는데 1-b식에 의해 두번째 갈래질 분기점인 $a = 3.37\cdots$ 에서 4.X의 값이 a보다 크므로 여기서 4T로 쌍갈래질하게 된다. 4T로 갈래질이 생긴 후 Y의 다음 8T로 쌍갈래질하는 점의 값은 3.54...인데 그전에 Transcritical 쌍갈래질이 생기므로 이 분기점의 값을 전산시뮬하여 풀어보면 3.4469...이 된다. 이 점은 X의 값이 2T에서 4T로 갈래질하는 점과 동일한 값을 알 수 있다. 그래서 이 점에서 다시 분기하게 되는데 이때의 X 값은 다시 Y 값을 쌍갈래질 시킬 만큼 크지 못하므로 이 점에서 새로운 8T의 분기 대신 그 안정된 궤도의 수는 유지하면서 그 궤도가 갑자기 꺾이는 Transcritical 쌍갈래질이 생기게 되는 것이다. Transcritical 쌍갈래질하는 분기점의 값은 X의 두번째 갈래질 점인 $a = 3.4469\cdots$ 이다. 여기서 우리는 이 때 생긴 불안정 궤도가 어떻게 혼돈띠와 대응되는지를 살펴 보아야 한다.

불안정 궤도와 혼돈띠의 만남

그러면 이 분기점 이후의 불안정 궤도를 구할 수 있게 되는데, 앞에서 언급한 바와 같이 X가 2T의 궤도를 가지고 그에 따른 Y의 2T되는 궤도가 Trans-critical 쌍갈래질 이후의 불안정한 궤도가

되고 안정된 4T 궤도는 X가 4T의 값을 가지고 Y가 안정된 값을 가지는 점이 전체적으로 안정된 4T의 궤도가 되는 것이다. 그래서 식을 이용하여서 구하면 먼저 X의 안정된 2T의 궤도를 1-a식을 이용하여 구한 다음 1-b 식을 이용하여 이 값에 각각 대응되는 2T의 안정궤도를 구하면 된다. 그래서 먼저 $X = f(x) \circ f(x)$ 로 둔 다음 X의 두 안정된 궤도를 구한 다음 이 값을 1-b식의 4·X에 반복적으로 대입시키면서 1-b식을 전자계산기를 이용하여 풀면 4개의 불안정한 궤도를 구할 수 있게 된다. 그 결과의 그림이 그림 1-a에서 점선으로 표시되어 있다. 이때 내부고비는 $a = 3.592572176\dots$ 에서 생기므로 a값이 3.592572 일때 생기는 네개의 불안정 궤도에 의한 X 값은 약 0.25155..., 0.37058..., 0.65427..., 0.81057...로 주어지게 된다. 그리고 전산시뮬을 통하여 계산된 혼돈띠의 경계값 중 그림 1-(b)에 주어진 Xa^* , Xb^* , Xc^* , Xd^* 네개의 값을 구하게 되면 그 값이 각각 약 0.251..., 0.335..., 0.654..., 0.81...로 주어지므로 이 중 세계가 서로 만나는 것을 알 수 있다. 그러면 하나의 불안정 궤도는 그 전에 이미 안정 궤도와 충돌하게 되는데 그 충돌은 그림 1-b에서도 알 수 있다⁶⁾. 이 그림을 더욱 확대시켜보면 그림 3-b 처럼 불안정 궤도는 밀개로서 그 점 주위의 값들을 발산시키게 되는데 이로인해 불안정궤도와 혼돈띠가 만나 고비가 생김을 볼 수 있게 된다. 이러한 고비에 의해서 혼돈띠는 갑자기 넓은 영역으로 그 혼돈이 확장되고 여기서 생긴 고비는 앞에서 이미 언급했듯이 Grebogi 등이 제안한 tangent 쌍갈래질에 의한 불안정 궤도와와의 충돌이 아닌 transcritical 쌍갈래질에 의해서 생기는 주기배가의 불안정 궤도와와의 충돌에 의한 내부고비임을 알 수 있다. 그러면 여기서 이 때 혼돈띠와 대응되는 불안정 궤도는 X가 2T일때 생기는 Y의 4T 값이 그 불안정 궤도가 되는데 Transcritical 갈래질이 생기기 이전의 안정된 궤도가 Transcritical 갈래질이 생길 때 원래는 한 안정된 궤도가 불안정 궤도로 바뀌고 새로운 2개의 안정궤도가 생겨야 하는데 그림 3에서 보는 되돌이 본뜨기 (Return Map)에서와 같이 이때 한 되돌이 본뜨기가 2개의 되돌이 본뜨기로 갈라지게 되는데 이는 X의 두번째 갈래질 때문에 생기는 4개의 안정점 때문에 갈라지는 것이다. 이 변화는 변수가 3.44일때의 그림 3-a에서 3.4484로 변할 때 생기는 되돌이 본뜨기 그림 3-b

에 의해서 잘 표현 되어 있다. 그런데 여기서 3-b를 보면 이 그림은 화살표로 표시된 값에 의해 두 안정점과 한개의 불안정점을 가짐을 알 수 있다. 그 그림이 3-c 에 자세히 나타나 있는데 여기서 a로 표시된 점은 안정점으로 나타나 실제의 계산에선 불안정점으로 나타남으로 이 점이 불안정 점임을 알 수 있다. 그런 데 이 때의 변수 값을 좀더 증가시켜 3.45 정도가 되면 이 점은 그림 3-d에서와 같이 대각선 과 만나지 못하게 되어 갑자기 없어지게 되는데 이는 불안정점들이 서로 만나 없어지는 독특한 경우로 아직 밝혀지지않고 있다. 어쨌든 Transcritical 갈래질 때 생겨야할 다른 안정점은 결국 불안정 점이 되고 이 불안정점은 없어지게 되므로 남아 있는 그림 1의 점선 만이 그 불안정 점이 되는 것이다. 이 불안정점에 대한 되돌이 본뜨기는 그림 3-e에 나타나 있는데 이 그림을 보면 혼돈띠와 만나는 불안정점에 대한 이해를 할 수 있게된다. 또 Transcritical 갈래질 때 생기는 여러 불안정점들은 다 각각에 대응하는 안정점들이 만드는 혼돈띠와 대응되는 불안정점들로 볼 수 있게 된다.

Ⅲ. 분 석

이러한 고비현상의 분석으로 Lyapunov exponent를 사용하여 일반적으로 분석하였는데 간헐성의 경우에는 Lyapunov exponent가 연속적으로 그 값이 변해가게 되는데 비하여 고비가 생기게 되면 근접한 두점 사이 거리의 평균 발산 값이 갑자기 증가하므로 불연속적인 점이 생기게 되므로 고비가 생긴 것인지 아닌지를 알 수 있게 된다. 즉 a값의 변화에 따라 구한 곡선을 구해보면 이러한 현상이 고비에 의한 것인지 아니면 tangent 쌍갈래질에 의한 것인지 간헐성에 의한 것인지를 확실히 알 수 있게 된다는 것이다. 그러나 최근의 연구 결과들은 고비의 경우에서도 간헐성의 경우와 마찬가지로 넓은 혼돈띠가 나타나는 시간적 평균은 a값의 변화에 따라 $\Delta a^{1/2}$ 에 비례하게 되므로 간헐성의 경우와 마찬가지로 연속적인 Lyapunov Exponent를 가져야 한다. 그래서 그 값을 구하는 식을 아래의 식⁸⁾으로 구했는데 여기서의 식처럼 2차로 연결된 순환식의 경우에는 1차 Lyapunov exponent와 2차 Lyapunov exponent가 각각 아래 식처럼 주어지게 된다.

$$\sigma_1 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|W_0\| \rightarrow 0}} \frac{1}{n} \ln \frac{\|W_n\|}{\|W_0\|}$$

$$\sigma_2 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|V_2(X_0, 0)\| \rightarrow 0}} \frac{1}{n} \ln \frac{\|V_2(X_0, n)\|}{\|V_2(X_0, 0)\|}$$

여기서 σ_1 과 σ_2 는 각각 제 1차 Lyapunov exponent 와 제 2차 Lyapunov exponent 이고, $\|V_2(X_0, 0)\|$ 와 $\|V_2(X_0, n)\|$ 는 vector 공간에서 각각 처음 두 점과 n번 순환시킨 뒤의 마지막 두점의 공간의 norm 들이다. 이때의 두 면적은 각각 다음과 같이 주어지는데

$$\|V_2(X_0, n)\| = \|V_{1, n}(X_0, n) \times V_2(X_0, n)\|$$

$$\|V_2(X_0, 0)\| = \|V_{1, 0}(X_0, 1) \times V_2(X_1, 0)\|$$

여기서

$$W_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_n} \cdot W_n = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_n} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_n} \cdots \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} \cdot W_0$$

가 되며 여기서 F는 식 1의 vector 표현이며, W_0 는 최초점의 vector 양이며, W_n 는 n번 순환시킨 뒤의 vector 양이다. 또 n은 순환시킨 수이며, 1,0 and 2,0 각각 처음 두점의 vector들이며, $W_{1, n}$ 과 $W_{2, n}$ 은 n번 순환시킨 뒤의 마지막 두 점에 대한 vector들이다.

위 식에서 구한 Lyapunov exponent들이 그림 4에 주어져 있다. 그림4-a는 1차 Lyapunov Exponent로서 화살표의 고비가 생기는 점에서 어떤 불연속적인 변화도 생기지 않는데 이는 이 위치를 확장하여 3.55 에서 3.61로 확장하여도 그림 4-b처럼 어떤 변화도 나타나지 않고 있다. 이는 2차 Lyapunov Exponent에서도 마찬가지인데 그림 4-c에 주어져 있다. 이것은 고비가 생길 때 갑자기 확대된 영역의 혼돈 점들은 앞에서 언급한 바와 같이 변수의 변화에 따라 -1/2의 Exponent

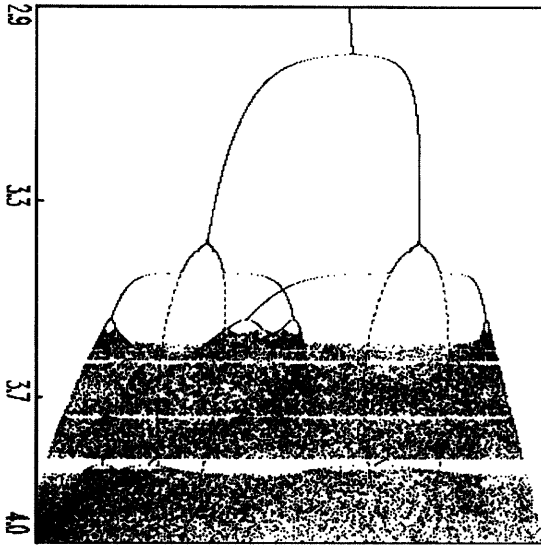
를 가지고 있어 그 변화가 고비현상이 생기는 위치에서도 간헐성의 경우와 마찬가지로 그 변화가 연속적이어야 한다는 것을 보여 준다.

IV. 결론

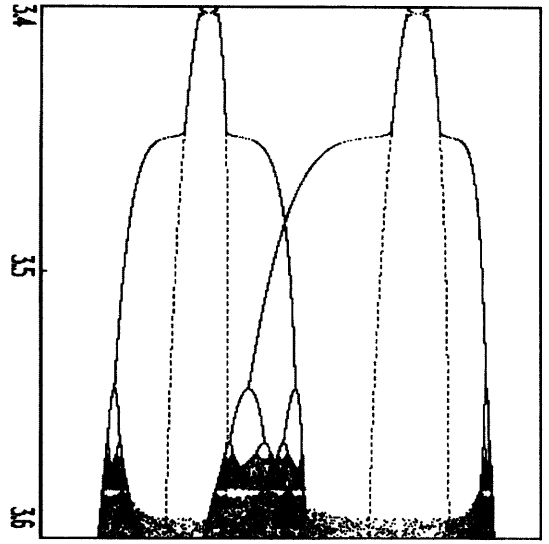
이상의 결과로서 우리가 알 수 있는 것은 여기서 사용한 식에서 만들어지는 갈래질의 본뜨기에서 생긴 혼돈띠의 갑작스런 변화는 고비에 의한 현상임을 알 수 있고 그 고비는 Grebogi등이 정의한 내부고비에 해당됨을 알 수 있다. 또한 이때 생긴 고비는 간헐성에서처럼 Saddle-Node 갈래질에 의한 불안정 궤도와 혼돈띠의 만남이 아니라 Transcritical 갈래질 때 생긴 불안정 궤도와 혼돈띠의 만남에 의한 고비임을 알 수 있다.

참고문헌

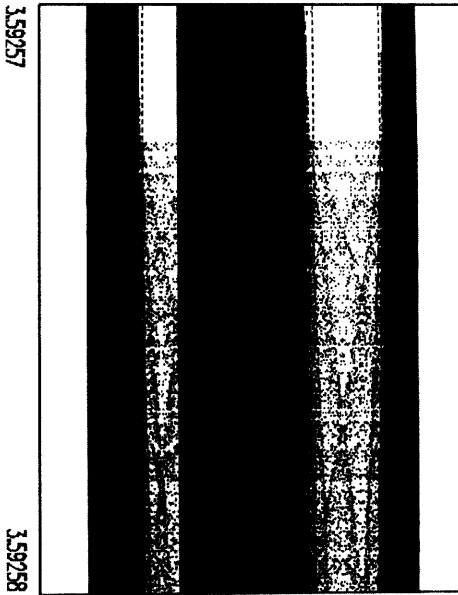
1. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19, 25(1978)
2. C. Grebogi, E. Ott, and J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1507(1982)
3. Y. Yamaguchi and K. Sakai, *Phys. Rev.* A27, 2755(1983)
4. C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras and J. Yorke, *Phys. Rev.* A36, 5365(1987)
5. C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke, *Physica*, D7, 181(1983)
6. D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, *Phys. Rev. Lett.* 57, 2657 (1986)
7. Chil-Min Kim et al, Accepted for publication in *J. Opt. Soc. Am.*
8. S. N. Rasband, "Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems", John Wiley & Sons, 1988



(a)



(b)



(c)

그림 (1) a값에 따른 Y_n 의 분뜨기

- (a) 2.99에서 4까지
- (b) 3.49에서 3.6까지
- (c) 3.592579에서 3.59258까지

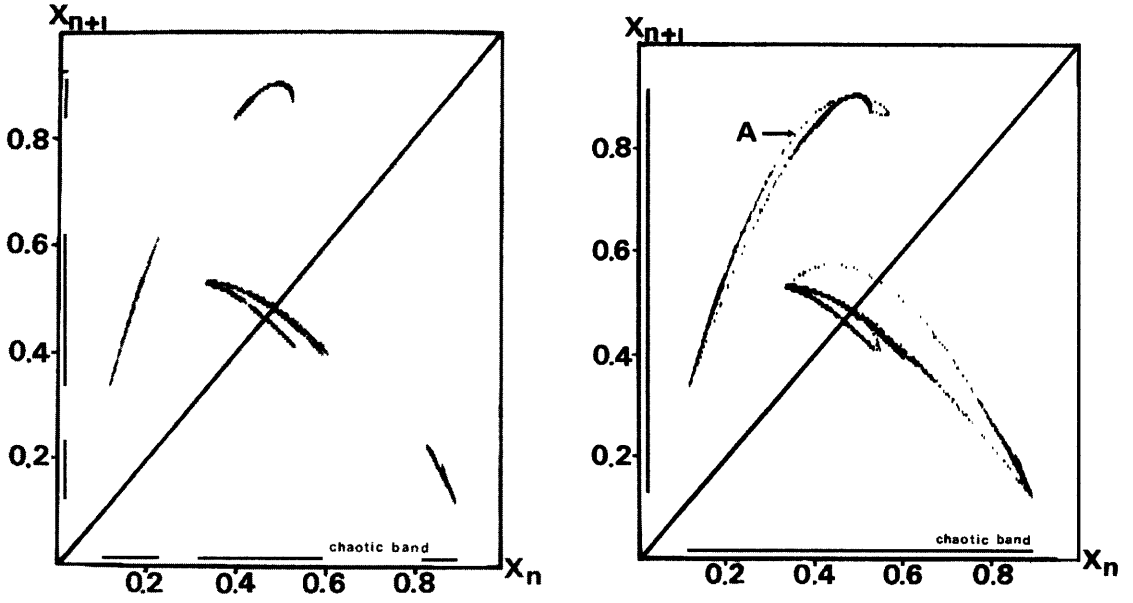


그림 (2) X_n 과 X_{n+1} 의 되돌이 본뜨기

(a) $a=3.592572$ 일때 (b) 3.592573 일때

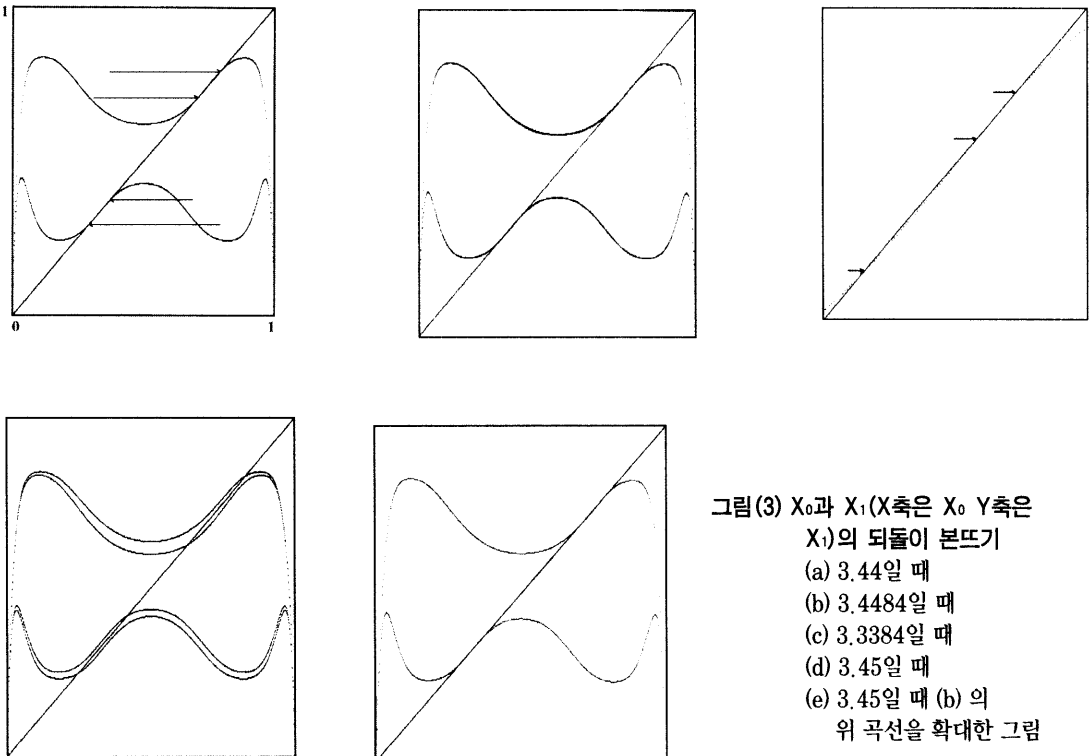
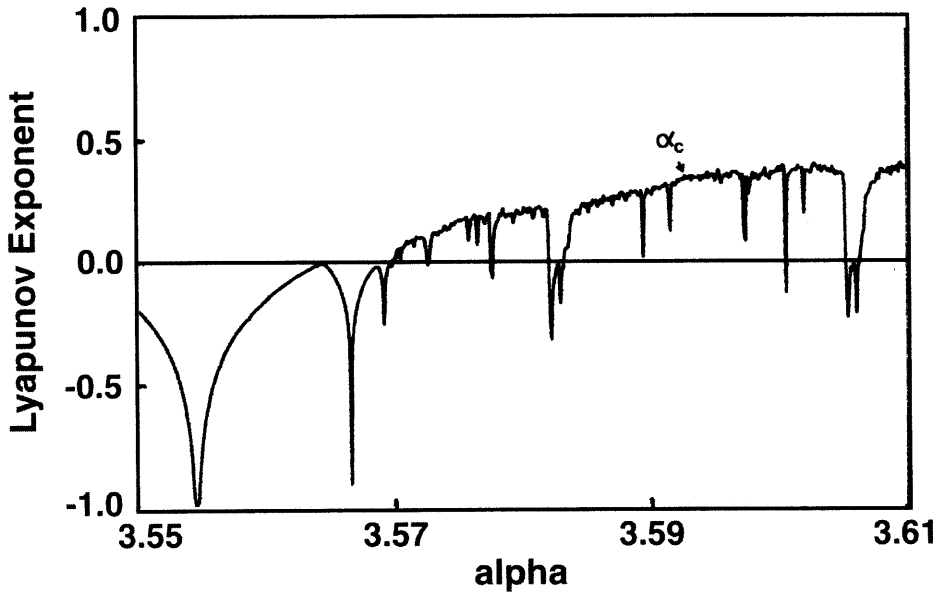
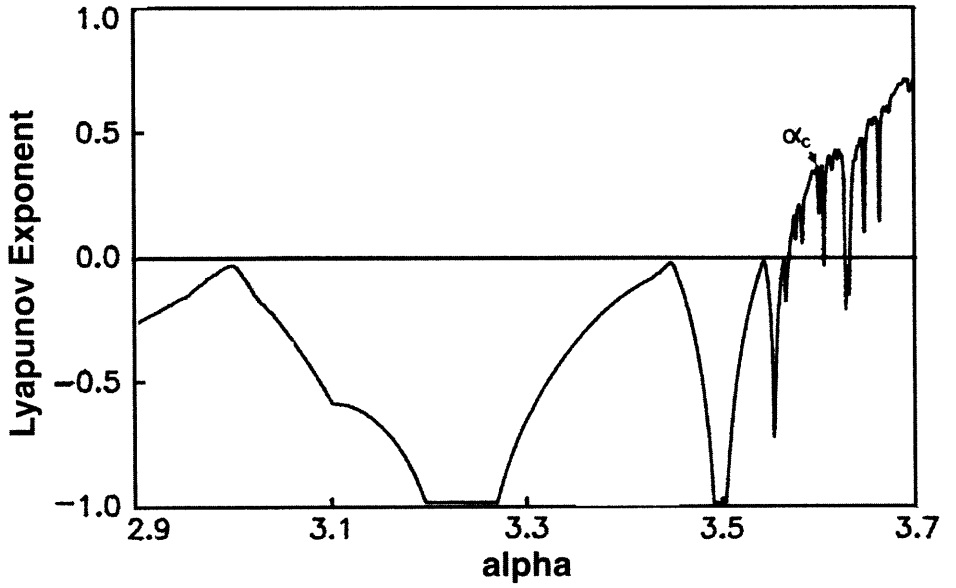


그림 (3) X_0 과 X_1 (X 축은 X_0 Y 축은 X_1)의 되돌이 본뜨기
 (a) 3.44일 때
 (b) 3.4484일 때
 (c) 3.3384일 때
 (d) 3.45일 때
 (e) 3.45일 때 (b)의 위 곡선을 확대한 그림



그림(4) Lyapunov Exponent
 (a) 1차 Lyapunov Exponent
 (b) (a)그림을 3.55에서 3.61 까지 확대한 그림
 (c) 2차 Lyapunov Exponent

