Einstein-Hermite 계량에 관한 연구

박 기 성

1. 서론

Compact Kähler 다양체 (X, ω) 위에 주어진 Hermite 벡터속 (E, h) 에 대하여 Einstein 조건을 생각하자. 즉 E 의 내부 준동형 K 가 E 의 항등내부 준동형의 스칼라 배가 될 때를 말한다. 이와 같은 Einstein 조건을 만족하면 E 를 Einstein-Hermitian 벡터속이라고 한다.

S. Kobayashi [K] 는 compact Kähler 다양체 위의 정칙 벡터속에 Einstein-Hermite 계량의 개념을 도입하였다. 이 계량이 이 벡터속의 안정성과 깊은 관계가 있음을 Donaldson [D] 에 의하여 증명되었다.

본 논문에서는 연접층 (Coherent sheaf) 에 대하여도 벡터속에 대한 결과가 자연히 확장됨을 증명하였다.

2. 본문

Kähler 형 ω 인 n 차원 compact Kähler 다양체 (X, ω) 위의 Hermite 정칙벡터속 (E, h) 의 곡률 F 와 평균곡률 H 는 국소정칙표구를 사용하여 다음과 같이 표시하자.

$$F = \overline{\partial}(\partial h h^{-1}) \ , \qquad H = \mathrm{tr}_\omega F.$$

여기서 tr_ω 는 F 가 내부 준동형속 $\mathrm{E}nd(E)$ 에서 값을 갖는 2-형으로 보고 저공간 방향과 같은 적 (trace) 을 잡은 것이라 하자. 바꿔 말하면 (E, h) 가 Einstein-Hermite 란 $\mathrm{E}nd(E)$ 에서 값을 갖는 평균곡률 H 가 항등변환의 상수배와 같을 때를 말한다. (X, ω) 위의 torsion 을 갖지 않는 연접해석

층 $\mathcal{E}$의 기울기는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(\mathcal{E}) = \left(c_1(\mathcal{E}) \cup [\omega]^{n-1}\right)[X]/rank\ \mathcal{E}.$$

여기서 $c_1(\mathcal{E})$은 $\mathcal{E}$의 차수이다.

$\mathcal{E}$가 **안정(준안정)**이란 $\mathcal{E}$의 임의의 진부분속 S가 $0 < rank\ S < rank\ \mathcal{E}$에 대하여

$$\mu(S) < \mu(\mathcal{E}), \qquad (\mu(S) \leq \mu(\mathcal{E}))$$

이 성립할 때를 말한다. 또 $\mathcal{E}$가 기울기가 같은 안정속의 직합으로 분해될 때 **다중안정**이라 부른다.

다음 정리는 벡터속의 경우의 안정성과 Einstein-Hermite계량사이의 관계를 나타내고 있다 [D], [U - Y].

정리. [K] 정칙벡터속 E는 다중안정일 때 그 때에 한해서 Einstein-Hermite 계량을 갖는다.

본 연구의 목적은 위의 결과를 연접층의 경우까지 확장하고자 한다. 그러기 위해서는 연접층의 Hermite 계량은 무엇인지 알아야 하며 여기서 연접층은 반사적인 것만 생각한다. 연접층 $\mathcal{E}$ 이 반사적이란 $\mathcal{E}$ 이 $\mathcal{E}$의 이중쌍대 $\mathcal{E}^{**}$ 와 동형일때를 말한다. 여기서 반사성을 도입하는 이유는 일반적으로 $\mathcal{E}$와 $\mathcal{E}^{**}$의 안정성은 동치이고 $\mathcal{E}$의 Hermite 계량은 $\mathcal{E}^{**}$의 Hermite 계량을 자동적으로 유도하기 때문이다.

연접층 $\mathcal{E}$의 특이점집합 S 밖에서 정의된 $\mathcal{E}$의 Hermite 계량 h를 연접층 $\mathcal{E}$의 Hermite 계량이라 하자. 그러나 이것만으로는 $\mathcal{E}$의 특이성이 통제되지 않기 때문에 h가 다음 성질을 가질때 허용적이라 하고 그와 같은 Hermite 계량을 벡터속의 Hermite 계량이라 하자.

i) 평균곡률 H는 일양유계이다.

ii) 그의 곡률 F는 자승가적분이다.

정리 1. S를 Kähler 다양체 (Y, ω) 내의 실여차원 4의 Hausdorff 측도가 국소유한인 폐집합이라 하고 (E, h)를 S의 보집합 위에서 정의된 Hermite 정칙벡터속이라 하자. (E, h)의 곡률 F가 국소자승가적분이라 하면 다음이 성립한다.

(1) E는 Y 위의 반사적 연접층으로 확장되며 $\mathcal{E}$의 국소절단 $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$에 대하여 함수 $\log^+ h(s, s)$는 $H^1_{loc}(U)$에 속한다.

(2) 평균곡률 H가 국소유한이면 $h(s, s)$도 국소유한이고 h는 $\mathcal{E}$이 벡터속일 때는 임의의 유한의 p에 대하여 $L^p_{2,loc}$에 속한다.

(3) (E, h)가 Einstein-Hermite이면 $\mathcal{E}$이 벡터속이 되는 개집합까지 확장되며 여기서 Einstein-Hermite 계량이 정해진다.

정리 2. 임의의 반사적 연접층은 Hermite 계량을 갖는다.

명제 3. h를 Hermite 행렬에서 값을 갖는 (Y, ω)위의 H^1에 속하는 함수로서 h와 h^{-1}가 유계, 즉 유계인 f가 존재하여 약한 의미로 다음이 성립한다고 하자.

$$\mathrm{tr}_\omega \overline{\partial}(\partial h h^{-1}) = f$$

라 하면 h는 임의의 $0 < \alpha < 1$에 대하여 $C^{1,\alpha}_{loc}$에 속한다.

정리 4. [Na] (E_i, ∇_i)을 리-만 다양체위의 Hermite Yang-Mills 접속의 열이라 하자. 만약 그의 곡률 F_i의 L^2−norm 이 유계이면 어떤 부분열이 존재하여 적당히 gauge 변환을 하면 여차원 4의 Hausdorff 측도가 국소유계인 폐집합 밖에서 어떤 Yang-Mills 접속에 수렴한다. 또 그의 곡률은 자승가적분이다.

계 5. compact Kähler 다양체 (X, ω)위의 제1, 제2 Chern 류가 일정

한 Einstein-Hermite 벡터속 (E_i, h_i)의 열은 적당히 부분열을 잡아 Gauge 변환을 하면 실여차원 4 의 Hausdorff 측도가 유한인 폐집합 밖에서 X 전체에서 정의된 반사적인 허용적 Einstein-Hermite 연접층에 수렴한다.

벡터속의 열이 퇴화하여 층이 되는 현상은 복소차원인 경우에는 많이 알려졌으나 고차원인 경우는 별로 알려지지 않고 있다.

정리 6. compact Kähler 다양체 위의 반사적 연접층은 다중안정일 때 그때에 한해서 허용적 Einstein-Hermite 계량을 갖는다.

벡터속의 경우와 마찬가지로 Chern-Weil 동형을 이용하여 Bogomolov 형의 부등식을 얻는다.

계 7. 계수 r의 반사적 다중안정 연접층 $\mathcal{E}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(2rc_2(\mathcal{E}) - (r-1)c_1(\mathcal{E})^2) \cup [\omega]^{n-2}[X] \geq 0.$$

여기서 $\mathcal{E}$이 벡터속이고 Einstein-Hermite 계량이 주어진 접속이 사영적으로 평탄일 때 등호가 성립한다.

명제 8. n 차원 compact Kähler 다양체 (X, ω)위의 반사적이고 허용적 Einstein-Hermite 연접층 $\mathcal{E}$의 대국절단은 $\mu(\mathcal{E}) < 0$, $\mu(\mathcal{E}) = 0$에 따라 영절단 또는 평행절단일 때이다.

참 고 문 헌

[K] S. Kobayashi, " Differential geometry of holomorphic vector bundles," Princeton University Press (1987).

[D] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987) 231-247.

[U-Y] K. Uhlenbeck and S-T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills connection in stable vector bundles*, Comm. pure Appl. Math. **42** (1989) 703-707.

[B] S. Bando, *Removable singularities of holomorphic vector bundles*, Tohoku Math. J. **43** (1991) 61-67.

[S] Y.T. Siu, *A Hartogs type extension theorem for coherent analytic sheaves*, Ann. of Math. **93** (1971) 166-188

[H] S. Hildebrant, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, in "Harmonic mappings and minimal immersions", Lec. note Math. **1161**, Springer-Verlag (1985), 1-117.

[Na] H. Nakajima, *Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions*, J. Math. Soc. Japan. **40** (1988).

강남대학교 수학과
경기도 용인군 기흥읍 구갈리 산 6-2
(우) 449-900