

불규칙한 3차원 상의 점군들에 대한 삼각곡면 보간에 관한 연구[†]

A Study of Triangular Surface Interpolant for Scattered 3D points[†]

주상윤*

Sang-Yoon Ju*

Abstract

This paper deals with a systematic procedure for constructing a triangular composite surface which is interpolated from given scattered 3-D points. The procedure consists of a triangulation, construction of curve net, and interpolation of triangular patches. An obtained surface is composed of cubic triangular patches, which are G^1 continuous to adjacent other patches.

1. 서 론

본 연구는 3차원 공간 상에 불규칙하게 주어진 점군들을 부드럽게 지나는 곡면을 정의하고자 하는 것이다. 곡면 모델링에 관한 대부분의 연구는 사각형 단위곡면에 기초하고 있다. 그러나 실물모형의 측정이나 공학적 실험을 통하여 불규칙한 점군을 얻어 이들을 보간한 곡면을 형성하고자 할 경우에는 삼각형 단위 곡면을 이용하는 것이 효과적이다. 지금까지 삼각형 단위곡면을 기초로 하여 이루어진 곡면 보간에 관한 연구는 3차식으로 정의된 단위곡선으로 형성된 곡선망을 기초로 하여 이루어져왔다. Farin[2]은 인접한 두 삼각 단위곡면들

간에 면적비 조건을 이용하여 3차 Bezier 단위 곡면들을 부드럽게 연결한 복합곡면을 형성하였다. 그러나 Farin의 면적비 조건은 곡선망을 부자연스럽게 만들 수 있으므로 결과적으로 얻어진 곡면은 왜곡될 가능성이 있다. Piper[3]와 Shin[1]은 그와 같은 면적비 조건을 제거하는 대신에 주어진 점 데이터들을 4차 Bezier 단위 곡면들에 의하여 보간하는 방법을 연구하였다. 이들중 Piper[3]의 방법은 인접한 두 삼각형 단위곡면들을 부드럽게 연결하기 위하여 곡선망을 변형시켜야 하는 문제점을 지니고 있다. 한편 Shin[1]은 degree elevation과 인접한 단위 곡면의 공통경계에서 tangent ribbon을 정의함으로써 Piper[3]의 문제점을 해결하였다. 그러나 Shin[1]은 곡면 내부에 측정경로가 존재하는 경우까지 고려하여 곡선망을 3차식 Bezier 단위곡선들을 사용하여 보간하였으므로 얻어진 보간곡면은 Piper[3]와 마찬가지로 4

† 본 연구는 1992년도 교육부의 대학교수 국비 해외파견 연구계획의 연구 결과임

* 울산대학교 산업공학과

차 Bezier 함수식으로 표현되었다. Shin[1]의 곡면은 점 데이터가 불규칙하게 주어졌을 뿐 아니라 곡면 내부에 측정경로가 요구되는 경우에 매우 적합하다. 그러나 공학적 실험으로부터 얻어지는 점 데이터들은 내부 측정 경로 없이 단지 불규칙하게 얻어진 점군만을 보간하는 것이 일반적이며 실물모형의 측정을 통하여 점군들을 얻은 경우라 할지라도 내부 측정 경로가 존재하지 않는 경우는 많이 있다. 본 연구에서는 내부측정 경로 없이 불규칙하게 주어진 점 데이터들을 3차식 계산 모형에 의하여 보간하는 방법을 제시하고자 한다.

이제까지 이루어진 연구에 의하면 주어진 점군으로부터 삼각형 단위곡면들에 의하여 이들을 지나는 곡면을 형성하는 과정은 다음과 같이 이루어진다[1-3].

1) 삼각형 망의 형성(Triangulation)

주어진 점군을 연결하여 삼각형망을 만드는 과정이며 곡면의 topology를 부여하는 단계이다.

2) 곡선망의 형성

주어진 점들 간의 edge를 곡선으로 보간하여 삼각형 곡선망을 만드는 과정이다.

3) 곡면의 형성

얻어진 곡선망 내부를 삼각형 단위 곡면들로 보간하는 단계이며 인접한 다른 단위 곡면들과 부드럽게 연결되어야 한다.

2. 삼각형망의 형성(Triangulation)

이는 주어진 점군으로부터 원래의 곡면 형상에 유사한 다면체를 이루는 삼각형망을 형성하는 것으로 본 연구에서는 Choi[4]의 방법을 따른다. 본 연구에서는 불규칙하게 측정된 점군 가운데 가장 바깥쪽에 위치한 점들은 곡면의 경계경로 상에 존재한다고 가정한다. Choi[4]의 삼각형망 형성은 다음의 절차를 따라 이루어진다.

1) 점군의 분할

점군들을 투영할 기준면에 따라 여러 그룹으로 분할한다.

2) 초기 삼각형망의 구성

각 그룹별로 분할된 점군들을 기준면 상에서 삼각형망으로 구성한다.

3) 삼각형 망의 개선

적절한 평활성 기준을 이용하여 삼각형망이 보다 부드럽게 만들어지도록 개선한다.

3. 곡선망의 형성

형성된 삼각형망에서 두 점을 연결한 edge들은 보간될 곡면 내부에 존재하는 edge와 곡면 경계의 경로 상에 존재하는 edge로 구분된다. 곡면의 내부에 놓여 있는 edge를 보간하는 곡선은 인접한 두 단위곡면의 공통 경계선인 반면, 곡면의 경계 경로에 위치한 edge를 보간하는 곡선은 단지 한 단위곡면의 경계선이 된다. 보간될 곡면 내부에 위치한 한 점을 끝점으로 하여 보간될 다수의 곡선들은 그 점에서 곡선의 접선벡터가 접 평면 상에 놓이는 것으로 충분하다. 하지만 곡면의 경계 경로를 보간한 경계곡선 spline은 특별한 요구가 없는 한 경계선 상에 존재하는 점들을 부드럽게 지나가야 하므로 최소한 G^1 연속을 만족해야 한다. 여기서 G^1 연속이란 다수의 knot point를 지나가는 spline내의 이웃한 두 단위 곡선들이 공통 knot point에서 단위 접선벡터가 일치하는 것을 의미한다.

3.1 곡면의 경계경로 상의 edge에 대한 곡선망

경계경로 상에 있는 n 개의 점 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ 을 지나는 부드러운 경계선을 얻기 위하여 Ferguson 곡선에 기초한 chord length spline을 Choi[5]로 부터 구한다. 얻어진 chord length spline 내에서 knot point P_i, P_{i+1} 를 양끝점으로 갖는 Ferguson 단위 곡선의 양끝 접선벡터를 각각 t_i, t_{i+1} 라고 할 때 Ferguson 단위 곡선의 식 (1)과 같이 정의된

$[\Gamma_{10}, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}]$ 을 조종점으로 갖는 Bezier 단위 곡선과 일치한다.

$$[\Gamma_{10}, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}] = [P_i, P_i + t_i/3, P_{i+1} - t_{i+1}/3, P_{i+1}] \quad (1)$$

$i=0, 1, \dots, n-1$

3.2 곡면 내부의 edge에 대한 곡선망

곡면 내부의 edge에 대한 곡선망 형성은 각 점에서 접평면을 추정하는 것과 얻어진 접평면에 접하는 2차 Bezier 단위곡선을 형성하는 것으로 이루어진다.

3.2.1 접평면 추정

이는 그림 1과 같이 삼각형망에 존재하는 한 점 P에서 법선벡터 n_p 를 추정하는 것으로 점 P 주변의 삼각형들에 대한 법선벡터 n_i 들의 가중평균에 의하여 결정한다. 본 연구에서는 삼각형 PP_iP_{i+1} 에서 점 P를 포함한 두 변 PP_i, PP_{i+1} 의 길이와 점 P에서 각 삼각형에 대한 각도 $\angle P, PP_{i+1}$ 를 함께 고려한 방법, 즉 각 삼각형에서 점 P와 마주보는 변 P_iP_{i+1} 과의 거리 d_i 를 제공한 값의 역수를 가중치로 사용한다 [6]. 이 방법에 의하여 점 P에서 얻어진 접평면에 대한 단위법선벡터는 다음과 같다.

$$n_p = \{ \sum (n_i/d_i^2) \} / | \sum (n_i/d_i^2) | \quad (2)$$

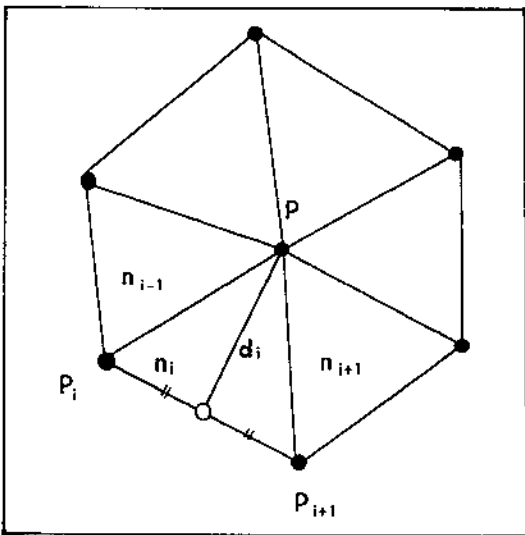


그림 1. 곡면 내부 점에 대한 법선벡터 추정

3.2.2 단위곡선의 보간

이는 곡면 내부의 각 edge에 대응하는 단위 곡선을 만드는 단계이다. 본 연구에서는 이 단위곡선들을 2차 Bezier곡선으로 보간한다. 각 edge에서 양 끝점을 지나고 그 점에서 접평면에 접하는 2차 Bezier곡선은 쉽게 결정된다. 우선 그림 2(a)와 같이 2개의 삼각형이 만나는 공통 edge E에서 양끝점 P와 Q는 2차 Bezier곡선의 양끝 조종점에 해당된다. 또한 공통 edge를 포함하고 두 삼각형 사이를 지나면서 그들의 교각을 이등분하는 평면 π_m 과 점 P와 Q에서 식 (2)에서 구한 단위법선벡터를 갖는 두 접평면 π_p, π_q 가 동시에 교차하는 점 R을 Bezier곡선의 중간 조종점으로 정한다. 두 삼각형 사이의 교각을 이등분하도록 평면 π_m 를 정하는 이유는 얻어진 단위곡선이 두 삼각형의 어느 한 쪽으로 치우치지 않게 하고자 하기 때문이다. P, R, Q를 조종점으로 갖는 2차 Bezier단위 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$r(t) = (1-t)^2P + 2t(1-t)R + t^2Q$$

$0 \leq t \leq 1$ (3)

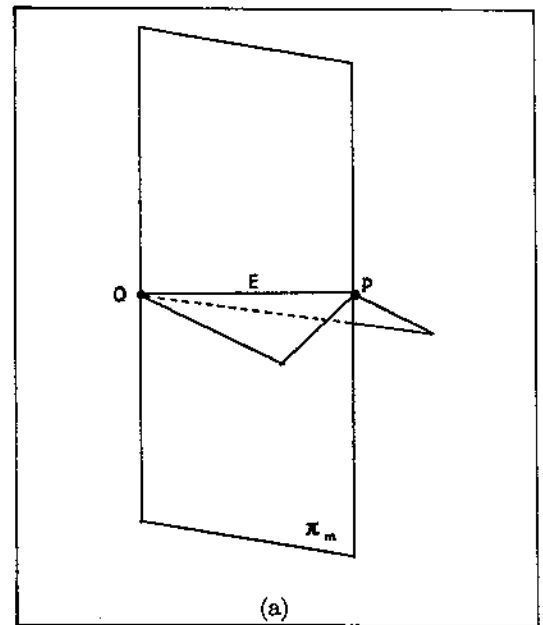


그림 2. 중간 조종점의 결정(계속)

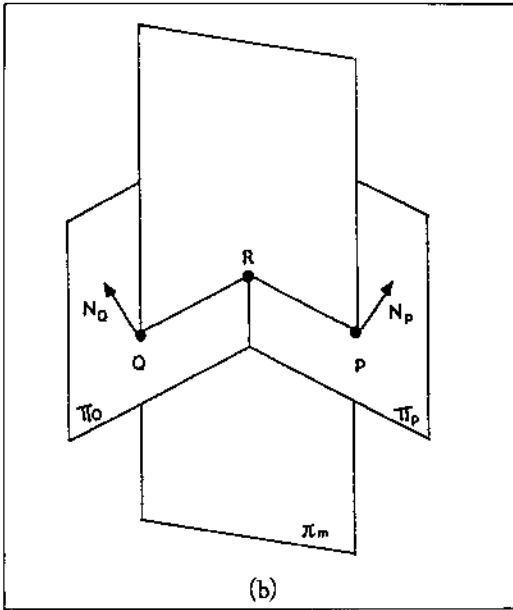


그림 2. 중간 조종점의 결정

Q_i, R_i 를 지나는 원호를 찾아 점 P 에서 원호에 대한 단위 접선벡터 s_i 를 구하여 이들의 평균 s_p 를 계산한다. 두 개의 접선벡터 t_p 와 s_p 를 이용하여 점 P 에서 접평면에 대한 단위 법선벡터 n_p 를 구한다.

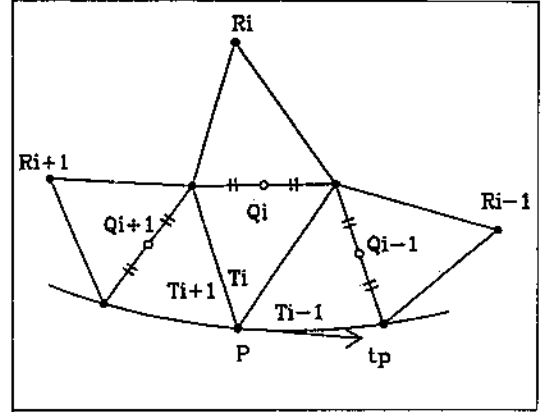


그림 3. 경계 경로 상에 있는 점의 법선벡터 추정

3.3 곡면의 경계경로상에 있는 점들에 대한 접평면 결정

경계경로 상에 있는 점에서는 곡면의 형상에 관한 정보가 경계내부에만 있으므로 식 (2)를 사용하면 법선벡터가 경계내부로 기울어지는 현상이 나타나게 된다. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 Shin[1]은 점 주위의 삼각면들을 구면에 근사시켜 법선벡터를 구하는 방법을 시도하였다. 그러나 이같은 방법으로 구한 접평면은 3.1에서 결정된 경계경로 곡선의 접선벡터를 고려하지 않으므로 접선벡터가 접평면 상에 놓이지 않는 문제점을 지니고 있다. 만약 경계경로 곡선의 접선 벡터를 접평면 상에 존재하도록 하기 위하여 3.2.2에서와 같이 경계 경로 상의 단위곡선들을 2차 Bezier곡선으로 정할 경우 얻어진 경계 경로 곡선은 G^1 연속조차 만족시키지 못하게 된다.

그러므로 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 3.1에서 구한 경계경로 곡선의 접선벡터 t_p 를 이용하여 각 점 P 에서 법선 벡터를 구하는 방법을 제안한다. 그림 3에서와 같이 점 P 주변의 삼각형 T_i 들에 대하여 점 P ,

4. G^1 연속의 곡면 형성

이미 정의된 2차 Bezier 곡선망으로부터 곡 선망 내부는 그림 4와 같이 3차 Bezier subpatch S_1, S_2, S_3 에 의하여 보간되며 조종점들의 결정은 다음의 3단계로 이루어진다.

1) 경계곡선 조종점 결정

보간될 단위곡면에 대한 경계곡선 상의 조종점들이며 그림 4에서 ■로 표시되어 있다.

2) 접선 조종점 결정

그림 4에서 $M_i, L_i(i=1, 2, 3)$ 로 표시된 조종점들로서 이웃한 단위곡면들이 부드럽게 연결되도록 정한다.

3) 내부 조종점 결정

그림 4에서 $N_i(i=1, 2, 3), 0$ 로 표시된 조종점들로서 이웃한 subpatch들이 서로 부드럽게 연결되도록 정한다.

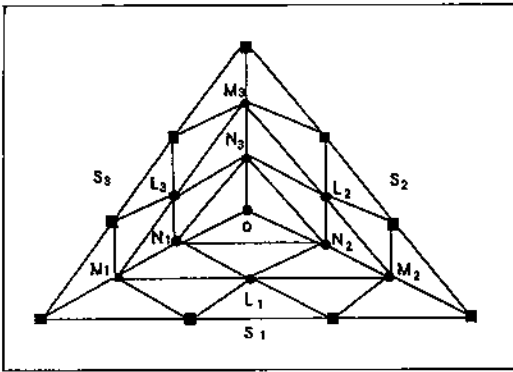


그림 4. 단위곡면 내에서 subpatch들의 조종점

4.1 경계곡선 조종점 결정

조종점 $[V_0, V_1, V_2]$ 를 가진 2차 Bezier곡선으로부터 식 (4)의 degree elevation에 의하여 3차 Bezier조종점들을 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{00} &= V_0; r_{01} = (1/3)V_0 + (2/3)V_1; \\ r_{02} &= (2/3)V_1 + (1/3)V_2; r_{03} = V_2 \end{aligned} \quad (4)$$

곡선망 내의 2차 Bezier 단위곡선들이 곡면의 내부에 존재하는 경우 식 (4)를 이용하여 조종점을 정의하면 곡선망의 변화없이 3차 Bezier 단위곡선을 얻을 수 있다. 반면에 곡면의 경계 경로상에 존재하는 곡선망의 단위곡선들은 3.1에서 이미 3차 Bezier곡선으로 보간되었으며 식 (1)에서 얻어진 Bezier조종점을 단위 곡면의 경계곡선 조종점으로 사용한다.

4.2 접선 조종점 결정

그림 5(a)와 같이 3개의 subpatch로 분할된 단위곡면 내에서 임의의 한 subpatch를 취하고 (S_1 이라고 하자) subpatch S_1 상에 존재하는 조종점들을 $r_{i,j}$ ($0 \leq i+j \leq 3$)로 표기하도록 한다. 이 때 subpatch S_1 에 대한 곡면식 $r(u, v)$ 는 조종점 $r_{i,j}$ 가 결정된 경우 다음과 같이 표현된다.

$$r(u, v) = \sum_{i+j \leq 3} r_{i,j} B^3_{i,j}(u, v) \quad (5)$$

여기서 $B^3_{i,j}(u, v) =$

$$\frac{3!}{i!j!(3-i-j)!} u^i v^j (1-u-v)^{3-i-j}$$

그림 5(b)에서는 subpatch S_1 의 곡면 $r(u, v)$ 와 곡면 경계에 대한 조종점들을 보여주고 있다. 이제 곡면 $r(u, v)$ 의 경계곡선 $b(v) = r(0, v)$ ($0 \leq v \leq 1$)에서 cross boundary tangent $t(v)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$t(v) = (1-v)t_0 + vt_1 \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } t_0 &= (c_0 \times n_0) / |c_0 \times n_0| \\ t_1 &= (c_1 \times n_1) / |c_1 \times n_1| \\ c_i &= V_{i+1} - V_i \quad i=0, 1 \\ n_0, n_1 &: V_0, V_2 \text{에서 법선벡터} \end{aligned}$$

식 (6)에 의하여 정의된 cross boundary tangent $t(v)$ 은 인접한 두 단위곡면들의 공통경계선 $b(v)$ 를 따라가며 형성된 tangent ribbon으로 생각할 수 있으며 만일 인접한 두 단위곡면이 tangent ribbon $t(v)$ 와 부드럽게 연결된다면 이들 두 단위곡면들 또한 부드럽게 연결될 것은 분명하다.

subpatch $r(u, v)$ 는 다음의 조건을 만족할 때 경계곡선 $b(v)$ 상에서 인접한 다른 단위곡면들과 G^1 연속을 만족한다. 여기서 곡면들 간의 G^1 연속이란 공통 경계선 $b(v)$ 를 따라가며 인접한 두 곡면들의 단위법선벡터가 항상 일치함을 의미한다.

$$a(v) = p(v)t(v) + q(v)c(v) \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{단 } a(v) &= [\partial r(u, v) / \partial u |_{u=0}] / 3 \\ &= (1-v)^2 a_0 + 2v(1-v)a_1 + v^2 a_2 \\ c(v) &= [\partial r(u, v) / \partial v |_{u=0}] / 2 \\ &= (1-v)c_0 + vc_1 \\ a_i &= r_{i0} - r_{0i} \quad i=0, 1, 2 \\ c_i &= V_{i+1} - V_i \quad i=0, 1 \\ p(v) &= (1-v)p_0 + vp_1 \\ q(v) &= (1-v)q_0 + vq_1 \end{aligned}$$

식 (7)에서 $a(v)$ 는 subpatch $r(u, v)$ 의 cross boundary tangent이고 $c(v)$ 는 공통경계선 $b(v)$ 의 접선을 가리킨다.

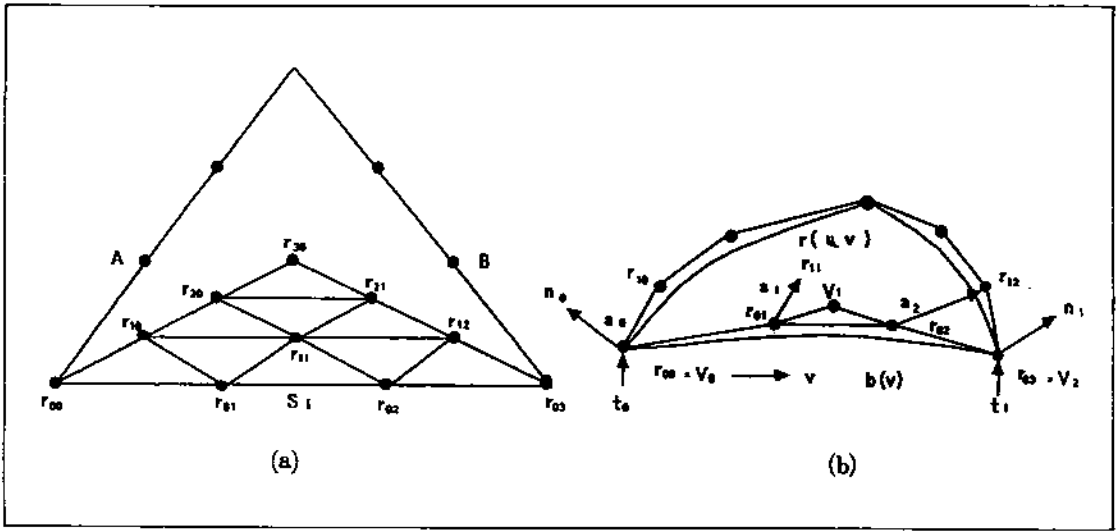


그림 5. 삼각 단위곡면의 G' 연속 조건

이제 식 (7)의 양변에서 동일한 차수를 가진 항의 계수를 같게 놓으면 다음의 관계식들을 얻는다.

$$p_0 t_0 + q_0 c_0 = a_0 \tag{8a}$$

$$p_1 t_1 + q_1 c_1 = a_2 \tag{8b}$$

$$(p_1 t_0 + p_0 t_1)/2 + (q_1 c_0 + q_0 c_1)/2 = a_1 \tag{8c}$$

그림 5(a)의 subpatch에서 조종점 r_{01} , r_{10} 는 일단 다음과 같이 정한다.

$$r_{10} = (r_{00} + r_{01} + A)/3 \tag{9a}$$

$$r_{12} = (r_{02} + r_{01} + B)/3 \tag{9b}$$

식 (8a), 식 (8b)을 풀면 미지수 p_0, q_0, p_1, q_1 를 쉽게 결정할 수 있으며 이 값들을 식 (8c)에 대입하면 tangent ribbon $t(v)$ 와 부드럽게 연결되는 조종점 r_{11} 을 다음과 같이 얻는다.

$$r_{11} = r_{01} + (p_1 t_0 + p_0 t_1)/2 + (q_1 c_0 + q_0 c_1)/2 \tag{10}$$

단,
$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \cdot t_0 & t_0 \cdot c_0 \\ t_0 \cdot c_0 & c_0 \cdot c_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_0 \cdot a_0 \\ c_0 \cdot a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \cdot t_1 & t_1 \cdot c_1 \\ t_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_1 \cdot a_2 \\ c_1 \cdot a_2 \end{bmatrix}$$

$$t_0 = (c_0 \times n_0) / |c_0 \times n_0|$$

$$t_1 = (c_1 \times n_1) / |c_1 \times n_1|$$

$$c_i = p_{i+1} - p_i \quad i=0, 1$$

$$a_i = r_{1i} - r_{0i} \quad i=0, 1, 2$$

식 (9)에 의해서 얻어진 점들은 그림 4에서 조종점 M_1, M_2 에 해당하고 식 (10)에 의해서 얻어진 점들은 그림 4에서 조종점 L_1 에 해당된다.

나머지 2개의 subpatch S_2, S_3 에 대해서도 동일한 과정을 적용하면 단위곡면 내의 점선 조종점 $M_i, L_i (i=1, 2, 3)$ 들을 모두 결정할 수 있다.

4.3 내부 조종점 결정

subpatch S_1, S_2, S_3 로 이루어진 단위곡면 내에서 아직 결정되지 못한 조종점들은 그림 4의 N_i 와 0이다. Farin[2]에 의하여 이들을 다음 식과 같이 결정하면 subpatch들 간에 G' 연속이 만족된다.

$$N_1 = (L_3 + L_1 + M_1)/3$$

$$N_2 = (L_1 + L_2 + M_2)/3$$

$$N_3 = (L_2 + L_3 + M_3)/3$$

$$0 = (N_1 + N_2 + N_3)/3 \tag{11}$$

4.4 경계 경로에 위치한 subpatch의 조종점 결정

단위곡면의 한 경계곡선이 경계경로 상에 위치한 경우 해당 경계곡선에서는 인접한 다른 단위곡면이 존재하지 않으므로 G^1 연속이 요구되지 않는다. 그러므로 이미 결정된 경계곡선 조종점 $\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}$ 외에 접선 조종점 $\Gamma_{10}, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}$ 은 식 (9)와 식 (10)으로부터 정할 수 있다. 또한 내부 조종점 $\Gamma_{20}, \Gamma_{21}, \Gamma_{30}$ 는 subpatch들간의 G^1 연속을 위하여 식 (11)에 따라 결정한다.

4.5 형성된 곡면의 예

그림 6은 구면상에 존재하는 점군을 불규칙하게 측정한 후 본 방법에 의하여 보간하여 곡면을 얻은 것이다. 그림 (6a)은 주어진 점군으로부터 얻어진 삼각형망이며 그림 (6b)는 그로부터 얻어진 곡면의 subpatch들에 대한 경계곡선을 보여주고 있다. 또한 그림 7에서는 실린더 면에서 불규칙하게 취한 점들로 부터 얻은 삼각형망과 subpatch들의 경계곡선을 보여준다.

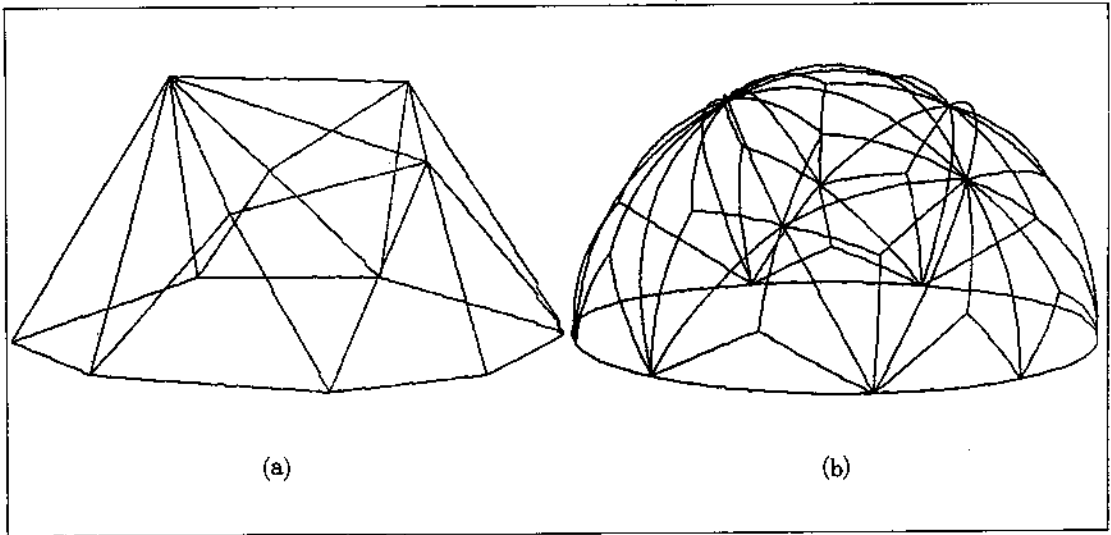


그림 6. 구면상의 점들로 부터 얻은 삼각형망(a)과 보간곡면(b)

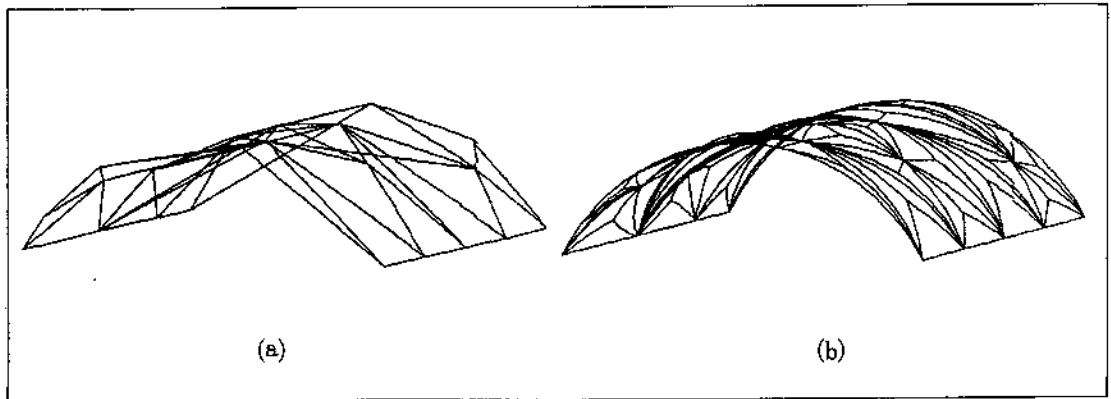


그림 7. 실린더 상의 점들로 부터 얻은 삼각형망(a)과 보간곡면(b)

5. 결 론

본 연구에서는 3차원 공간 상에 불규칙하게 주어진 점군들을 3차 삼각 Bezier곡면에 의하여 보간하는 전반적인 과정을 제시하였다. 본 방법에서는 주어진 점군들을 곡면의 경계경로 상에 있는 점들과 경로 내부에 있는 점들로 구분하여 곡면의 경계경로 상에 있는 곡선망의 단위곡선들은 3차 Bezier 곡선으로 그 외의 곡선망 단위곡선들은 2차 Bezier 곡선으로 정의한 후 곡선망 내부를 3차 Bezier 곡면으로 보간하였다. 이와 같은 방법으로 얻어진 3차식 곡면은 4차식 곡면을 사용했던 기존의 방식에 비하여 보간 곡면을 단순하게 표현하므로 조종점 저장에 적은 기억장소를 차지할 뿐만 아니라 곡면의 계산을 빠르게 수행할 수 있게 한다.

참 고 문 헌

1. Shin, H.Y., "Surface modeling for 3D scattered data interpolation", PH.D. Dissertation, KAIST, 1991.
2. Farin, G., "Smooth interpolation to scattered 3D data", in Surfaces in Computer Aided Geometric Design(Barnhill & Boehm eds), North-Holland, 1983.
3. Piper, B.R., "Visually smooth interpolation with triangular Bezier patches", in Geometric Modeling : algorithms and trends(farin ed), SIAM, 1987.
4. Choi, B.K., Shin, H.Y., Yoon, Y.I. and Lee, J.W., "Triangulation of scattered data in 3D space", Computer Aided Design, Vol.20, pp.239-248, 1988.
5. 최병규, NC 절삭가공과 CAM 시스템, 청문각, 1988.
6. Choi, B K, Surface Modeling for CAD/CAM, Elsevier, 1991.
7. Boehm, W., Farin, G and Kahmann, J. "A survey of curves and surface methods in CAGD", Computer Aided Geometric Design, Vol.1 pp.1-60, 1984.
8. Farin, G., "Triangular Bezier Patches", Computer Aided Geometric Design, Vol.3, pp. 83-127, 1986.
9. Faux, I D and Pratt, M J, Computational geometry for design and manufacture, Ellis Horwood, Chichester, UK 1980.