Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 19, No.2, June., 1993

표준 측정치의 오차를 고려한 다변량 계기 교정 절차†

A Multivariate Calibration Procedure When the Standard Measurement is Also Subject to Error †

이승훈*

Seung-Hoon Lee*

Abstract

Statistical calibration is a useful technique for achieving compatibility between two different measurement methods, and it usually consists of two steps : (1) estimation of the relationship between the standard and nonstandard measurements, and (2) prediction of future standard measurements using the estimated relationship and observed nonstandard measurements. A predictive multivariate errors-in-variables model is presented for the multivariate calibration problem in which the standard as well as the nonstandard measurements are subject to error. For the estimation of the relationship between the two measurements, the maximum likelihood (ML) estimation method is considered. It is shown that the direct and the inverse predictors for the future unknown standard measurement are the same under ML estimation. Based upon large-sample approximations, the mean square error of the predictor is derived.

1. 서 론

일반 측정과정에서 얻어지는 측정치에는 계기 자체의 성능, 또는 주위 환경의 영향으로 오차가 포함되게 마련이다. 통계적 방법은 이러한 오차를 분석하여 좀 더 의미있는 측정관리 체계를 유지하는 데 기여하여 왔으며, 앞으로 과학 및 산업 기술이 점차 고도화함에 따라 그 필요성은 더욱 강조되리라 믿어진다.

통계적 측정 관리법은 크게 두가지로 나누어 볼 수 있다. 하나는, 주어진 측정방법의 정확도(accuracy)와 정도(precision)를 결정하는 문제이고, 다른 하나는 서로 다른 방법에 의해 얻어진 측정치들 사이의 관계를 결정하는 것이다. 후자를 일반적으로 통계적 계기교정(statistical calibration)이라 한다[1].

통계적 계기교정에서 교정이 필요한 계기를 일반적으로 비표준계기라 하고, 교정을 실시하는 계기를 표준계기라 칭한다. 통계적 계기교정 절차는 다음과 같은 두가지의 통계적 행위

† 이 논문은 1990년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 지방대 육성 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

* 동의대학교 산업공학과

가 필요하게 된다.

1) 계기교정실험을 행함으로써 표준과 비표준측정치 사이의 관계를 추정하는 것.
2) 추정된 관계식을 이용하여 미래에 비표준계기로 측정한 측정치를 표준계기로 측정하였을 경우의 측정치로 환산, 즉 추정(예측)하는 것.

종래의 계기교정이론은 표준계기에 의한 측정치에는 오차가 포함되어 있지 않다는 가정하에 출발하고 있다. 그러나 측정과정에서 내적, 외적인 요인으로 인하여 비표준측정치뿐만 아니라 표준측정치에도 오차가 포함되게 마련이다. 최근 몇몇 저자들[2-10]에 의해 비표준측정치뿐만 아니라 표준측정치에도 오차가 수반되는 경우의 일변량 계기교정(univariate calibration)이론에 대해 연구되고 있다(연구내용은 Lee와 Yum[9] 참조).

본 연구에서는 표준과 비표준 측정치가 벡터인 다변량 계기교정(multivariate calibration) 문제에서 양 측정치 모두에 오차가 수반되는 경우를 다루고자 한다.

이 경우에 대한 적절한 계기교정 절차를 마련하기 위하여, 표준과 비표준측정치의 오차를 명확하게 고려한 다변량 계기교정문제를 예측을 고려한 다변량 변수오차 모형(Predictive Multivariate Errors-in-Variables Model)으로 정식화하고, 두 측정치사이의 관계식을 추정하기 위하여 최우(Maximum Likelihood, ML)추정방법을 고려한다. 예측량의 평가기준으로 평균제곱오차(Mean Square Error, MSE)를 제시하고, 이 MSE를 대표본 근사(large-sample approximation)에 의해 유도한다.

2. 모형과 추정량

교정실험(calibration experiment)에서 표준과 비표준 측정치사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 가정한다.

$$\boldsymbol{\xi}_i=\begin{bmatrix}\xi_{1i}\\ \xi_{2i}\\ \vdots\\ \vdots\\ \xi_{pi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}\, b_{12}\cdots b_{1q}\\ b_{21}\, b_{22}\cdots b_{2q}\\ \vdots\quad \vdots \qquad \vdots\\ \vdots\quad \vdots \qquad \vdots\\ b_{p1}\, b_{p2}\cdots b_{pq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{1i}\\ \eta_{2i}\\ \vdots\\ \vdots\\ \eta_{pi}\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{a}+\mathrm{B}\boldsymbol{\eta}_i,\ i=1,2,\cdots,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

단, px1 벡터 $\boldsymbol{\xi}_i$와 qx1 벡터 $\boldsymbol{\eta}_i$는 각각 표준과 비표준 측정치의 참값이고, $\mathbf{a}$는 미지의 px1 상수벡터이고, B는 미지의 pxq 상수행렬이고, n은 교정실험에서의 표본수를 나타낸다. 표준과 비표준 측정치의 참값, $\boldsymbol{\xi}_i$와 $\boldsymbol{\eta}_i$는 직접 측정이 불가능하고 각각 측정오차 $\mathbf{u}_i$와 $\mathbf{v}_i$가 수반되어 측정된다고 가정한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_i&=\boldsymbol{\eta}_i+\mathbf{u}_i\\ \mathbf{x}_i&=\boldsymbol{\xi}_i+\mathbf{v}_i\end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

오차벡터 $(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{v}_i)'$는 다음과 같은 분포를 따른다고 가정한다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_i\\ \mathbf{v}_i\end{bmatrix}\sim \mathrm{MVN}\left(\mathbf{0},\ \Omega=\begin{bmatrix}\Sigma_u & 0\\ 0 & \Sigma_v\end{bmatrix}\right)$$

단, 오차벡터의 공분산행렬(covariance matrix) Ω는 기지의 $(p+q)\times(p+q)$ 행렬이고, 'MVN'은 다변량정규분포(Multivariate Normal Distribution)를 나타낸다.

모형 (1)과 (2)를 문헌에서 다변량 변수오차 모형(Multivariate Errors-in-Variables Model)이라 부르고, $\boldsymbol{\xi}_i$가 수학적인 변수이면 'functional relationship model'이라 하고, $\boldsymbol{\xi}_i$가 확률변수이면 'structural relationship model'이라 한다[11]. 본 논문에서는 $\boldsymbol{\xi}_i$를 수학적 변수로 가정한다.

교정실험에서 얻은 측정치 $(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{y}_i)$로부터 관계식(1)의 미지의 모수 $\mathbf{a}$와 B를 최우(ML) 추정방법으로 추정한다. 먼저, 다음과 같은 $(p+q)\times(p+q)$표본공분산행렬 S를 정의하자.

$$S=(n-1)^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})' & \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})' \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})' & \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(y_i-\bar{y})'\end{bmatrix}$$

단, 기호 $\bar{h}$는 h_i의 산술평균을 의미한다. 그리고 $\Omega^{-1/2}S\Omega^{-1/2}$의 $(p+q)$개의 고유값(eigenvalue)을 다음과 같이 크기순으로 나열하자.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{p+q} \geq 0$$

그리고 위의 각 고유값에 대응되는 고유벡터(열벡터)로 이루어진 다음과 같은 $(p+q)$차 직교행렬(orthogonal matrix)을 G라 두자. 즉,

$$(\Omega^{-1/2}S\Omega^{-1/2}-\lambda_j I_{p+q})\mathbf{g}_j=\mathbf{0}, \quad j=1, 2, \cdots p+q$$

$$G=[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2 \cdots \mathbf{g}_{p+q}]$$

$$G'G=I_{p+q}=GG'$$

여기서 $\mathbf{g}_j$는 λ_j에 대응되는 고유벡터이다. 그러면, B와 $\mathbf{a}$의 최우추정량(MLE)은 Amemiya와 Fuller[12]으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{B}=P_{11}P_{12}^{-1}=-(P_{12}')^{-1}P_{22}' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\hat{\mathbf{a}}=\hat{\bar{\mathbf{x}}}-\hat{B}\bar{\mathbf{y}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

단,

$$P=\Omega^{1/2}G=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix} \ ; \ P_{11}: p\times q \quad \cdots (5)$$

미래의 예측실험에서 다음과 같은 비표준측정치 $q\times 1$ 벡터 $\mathbf{y}_o$가 얻어졌다고 하자.

$$\mathbf{y}_o=\boldsymbol{\eta}_o+\mathbf{v}_o, \quad \mathbf{v}_o \sim MVN(\mathbf{0}, \Sigma_v)$$

그러면 교정실험에서 얻어진 교정식(calibration equation)으로부터 이 비표준측정치에 대응되는 표준측정치의 참값 $\boldsymbol{\xi}_0$는 다음과 같이 추정(예측)된다.

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_o=\hat{\mathbf{a}}+\hat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{y}_o \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

미래의 표준측정치의 참값 $\boldsymbol{\xi}_o$를 추정하기 위한 또 다른 하나의 방법은 관계식 (1)에서 $\boldsymbol{\xi}_i$와 $\boldsymbol{\eta}_i$를 서로 자리를 바꾼 다음과 관계식을 이용하는 것이다.

$$\boldsymbol{\eta}_i=\mathbf{c}+D\boldsymbol{\xi}_i, \quad i=1, 2, \cdots, n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

단, $\mathbf{c}=-(B'B)^{-1}B'\mathbf{a}$와 $D=(B'B)^{-1}B$이다. 교정실험의 측정치($\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$)로부터 관계식 (7)의 미지의 모수 $\hat{\mathbf{c}}$와 $\hat{D}$를 ML추정방법으로 추정한 추정량을 각각 $\mathbf{c}$과 D라 하자. 그러면 미래의 비표준측정치 $\mathbf{y}_0$에 대응되는 표준측정치의 참값 $\boldsymbol{\xi}_0$는 다음과 같이 추정된다.

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0=(\hat{D}'\hat{D})^{-1}\hat{D}'\ (\mathbf{y}_0-\hat{\mathbf{c}}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

교정문제에 관한 문헌에서 일반적으로 추정량 (8)을 직접예측량(direct predictor) 혹은 전통적 추정량(classical estimator), 추정량 (6)을 역예측량(inverse predictor) 혹은 역추정량(inverse estimator)이라 부른다[2, 13].

표준측정치에는 오차가 수반되지 않는다고 가정하는 종래의 계기교정 이론에서는 직접예측량과 역예측량이 서로 같지 않고, 두 예측량 사이의 선택문제로 그동안 많은 논의가 되어 왔다(Tracy와 Srivastava[13], Brown[14] 참조). 그러나 본 연구에서 제시한 모형에 ML추정방법을 적용하면 두 예측량이 서로 같게 되는 성질이 있어서, 종래의 계기교정문제에서의 두 예측량이 서로 같지 않음으로 해서 발생되는 논란은 없게 된다(이에 대한 증명은 부록에서 다룬다). 일변량 계기교정 문제에 대해서는 Lee와 Yum[9]에 의해 증명되었다.

3. 예측량의 평균제곱오차

예측량 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_0$의 평가기준으로 다음과 같은 예측

량의 평균제곱오차(MSE)를 정의한다.

$$\mathrm{MSE}(\hat{\xi}_0)=E\{(\hat{\xi}_0-\xi_0)'(\hat{\xi}_0-\xi_0)\}$$
$$=E\{\sum_{i=1}^{p}(\hat{\xi}_{0i}-\xi_{0i})^2\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

본 절에서는 이 MSE를 대표본 근사(large sample approximation)에 의해 유도하기로 한다.

먼저, 다음을 가정한다.

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\eta}_i-\overline{\boldsymbol{\eta}})(\boldsymbol{\eta}_i-\overline{\boldsymbol{\eta}})'=\triangle \quad (10)$$

단, △는 양정치행렬(positive definite matrix)이다. 그러면 Amemiya와 Fuller[12]에 의해 pqx1 벡터 $\mathrm{Vec}(\hat{B}')$는 평균이 $\mathrm{Vec}(\hat{B}')$이고, (pqxpq) 공분산행렬 V가 다음과 같은 점근적 정규분포(asymptotic normal distribution)를 하게 됨을 보일 수 있다.

$$V=n^{-1}(\Sigma_u+B\Sigma_v B')\otimes\{\triangle^{-1}[\triangle+(B'\Sigma_v^{-1}B+\Sigma_v^{-1})^{-1}]\triangle^{-1}\}$$

$$=\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1p} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{p1} & V_{p2} & \cdots & V_{pp} \end{bmatrix} ;\quad V_{ij} : q\times p \cdots (11)$$

단, $\mathrm{Vec}(B')=(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1q}; b_{21}, \cdots, b_{2q}; \cdots; b_{p1}, \cdots, b_{pq})'$이고, ⊗는 Kronecker 곱을 나타낸다.

식 (6)에 약간의 대수적 조작을 행하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\xi}_0-\xi_0=(\hat{B}-B)(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}})+\overline{\mathbf{u}}+\hat{B}(\mathbf{v}_0-\overline{\mathbf{v}})'$$

혹은,

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_{01}-\xi_{01} \\ \hat{\xi}_{02}-\xi_{02} \\ \vdots \\ \hat{\xi}_{0p}-\xi_{0p} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{b}}_1-\mathbf{b}_1)(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}})+\hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{v}_0-\overline{\mathbf{v}})'+\overline{u}_1 \\ (\hat{\mathbf{b}}_2-\mathbf{b}_2)(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}})+\hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{v}_0-\overline{\mathbf{v}})'+\overline{u}_2 \\ \vdots \\ (\hat{\mathbf{b}}_p-\mathbf{b}_p)(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}})+\hat{\mathbf{b}}_p(\mathbf{v}_0-\overline{\mathbf{v}})'+\overline{u}_p \end{bmatrix}$$

단, $\mathbf{b}_i=(b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{iq})$이다. 그리고 다음과 같은 (2q+1)×1 벡터 $\mathbf{w}$와 $\mathbf{w}_0$를 정의하자.

$$\mathbf{w}=(\hat{\mathbf{b}}_i, \overline{u}_i, \overline{\mathbf{v}}')'$$
$$\mathbf{w}_0=(\mathbf{b}_i, 0, \mathbf{0}')'$$

그러면 $\sqrt{n}(\mathbf{w}-\mathbf{w}_0)$는 평균이 0벡터이고, 공분산행렬 T가 다음과 같은 점근적 정규분포를 따르게 된다.

$$T=\begin{bmatrix} nV_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{uii} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_v \end{bmatrix}$$

단, V_{ii}는 $\hat{\mathbf{b}}_i$의 점근적 공분산행렬이고, σ_{uii}는 Σ_u의 i번째 대각원소를 나타낸다. 다음과 같은 함수

$$f(\mathbf{w})=\hat{\xi}_{0i}-\xi_{0i}$$

를 정의하면

$$f(\mathbf{w}_0)=\mathbf{b}_i\ \mathbf{v}_0$$

가 된다. $f(\mathbf{w})$를 $\mathbf{w}$의 원소에 대해 편미분을 하여 $\mathbf{w}_0$에서 값을 구하면 다음과 같다.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}'_i}\right|_{\mathbf{w}_0}=(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}})+\mathbf{v}_0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_i}\right|_{\mathbf{w}_0}=1$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{\mathbf{v}}}\right|_{\mathbf{w}_0}=-\mathbf{b}_i'$$

그리고

$$\boldsymbol{\phi}'=((\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{v}_0)', 1, -\mathbf{b}_i)$$

라 정의하면, Serfling[15, p.122]의 정리에 의하여 $\sqrt{n}\ \{f(\mathbf{w})-f(\mathbf{w}_0)\}$는 주어진 $\mathbf{v}_0$하에서 평균이 0이고, 분산이 다음과 같은 점근적 정규분포를 따르게 된다.

$$\boldsymbol{\phi}'T\boldsymbol{\phi}=n(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{v}_0)'V_{ii}(\boldsymbol{\eta}_0-\overline{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{v}_0)+\sigma_{uii}+\mathbf{b}_i\Sigma_v\mathbf{b}_i'$$

그러므로 $\hat{\xi}_{0i}$의 조건부 점근적 편의(asymptotic bias)와 분산(variance)은 각각 다음과 같

이 주어진다.

$$\mathrm{BIAS}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0) = \mathbf{b}_i \mathbf{v}_0$$
$$\mathrm{VAR}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0) = n^{-1}\boldsymbol{\phi}' T \boldsymbol{\phi}$$

그리고 $\hat{\xi}_{0i}$의 조건부 점근적 평균제곱오차(MSE)는 다음과 같다.

$$\mathrm{MSE}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0) = \{\mathrm{BAIS}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0)\}^2 + \mathrm{VAR}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0)$$

$\mathrm{MSE}(\hat{\xi}_{0i} \mid \mathbf{v}_0)$를 $\mathbf{v}_0$에 대해 평균을 취하면 ξ_{0i}의 MSE를 구할 수 있다. Seber[16, p.13]의 정리에 의해

$$E\{(\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{v}_0)' V_{ii} (\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{v}_0)\} = \mathrm{tr}(V_{ii} \textstyle\sum_v) + (\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta})' V_{ii} (\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}) \text{ 이고,}$$

$$E(\mathbf{b}_i \mathbf{v}_0)^2 = \mathbf{b}_i \textstyle\sum_v \mathbf{b}_i'$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\xi}_{0i}) &= E(\hat{\xi}_{0i} - \xi_{0i})^2 \\ &= \mathrm{tr}(V_{ii}\textstyle\sum_v) + (\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}})' V_{ii} (\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\quad + n^{-1}\sigma_{uii} \\ &\quad + (n^{-1}+1)\mathbf{b}_i \textstyle\sum_v \mathbf{b}_i'\end{aligned}$$

따라서 식 (9)에서 정의한 예측량 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_0$의 평균제곱오차(MSE)는 점근적으로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_0) &= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{tr}(V_{ii} \textstyle\sum_v) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}})' V_{ii} (\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\quad + n^{-1}\mathrm{tr}(\textstyle\sum_u) \\ &\quad + (n^{-1}+1)\mathrm{tr}(B\textstyle\sum_v B')\end{aligned}$$

특히, p=q=1인 일변량 계기교정문제인 경우에는 $\hat{\xi}_0$의 MSE는 다음과 같게 된다.

$$E(\hat{\xi}_0 - \xi_0)^2 = V(b)\sigma_v^2 + (\eta_0 - \overline{\eta})^2 V(\hat{b}) + n^{-1}\sigma_u^2 + (n^{-1}+1) b^2 \sigma_v^2 \quad \cdots\cdots (12)$$

단, $V(\hat{b}) = n^{-1}\{\triangle^{-1}(\sigma_u^2 + b^2\sigma_v^2) + \triangle^{-2}\sigma_u^2\sigma_v^2\}$

이다. 식 (12)는 Fuller[7, p.178]의 표현식과 동일함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 표준측정치와 비표준측정치가 벡터인 다변량 계기교정 문제에서 비표준측정치뿐만 아니라 표준측정치에도 오차가 포함되어 있는 경우를 다루었다. 표준측정치의 오차를 고려한 다변량 계기교정 문제를 예측을 고려한 다변량 변수오차모형(predictive multivariate EVM)으로 표현하였고, 두 측정치사이의 관계식을 추정하기 위하여 최우(ML)추정방법을 고려하였다. 미래의 비표준측정치에 대응되는 표준측정치의 참값에 대한 두 예측량, 즉 직접예측량(direct predictor)와 역예측량(inverse predictor)이 서로 같음을 증명하였다. 예측량의 평가기준으로 평균제곱오차(MSE)를 제시하였고, 대표본 근사에 의해 평균제곱오차를 유도하였다.

평균제곱오차의 수치를 계산하기 위해서는 B와 식 (10)의 △를 추정해야 되는데, B에 대해서는 식 (3)에 주어진 ML추정량 B이 B의 일치추정량(consistent estimator)이므로 추천되고, △에 대해서는 △의 ML추정량

$$\hat{\triangle} = P_{21}'(\Lambda - I_q)P_{21}$$

이 역시 △의 일치추정량이므로 추천한다. 단, P_{21}은 식 (5)에서 정의된 q×q행렬이고, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$이다. 그리고 $(\boldsymbol{\eta}_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}})$의 추정량으로는 $(\mathbf{y}_0 - \overline{\mathbf{y}})$를 추천한다.

5. 부 록

여기서는 직접예측량 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_0$과 역예측량 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_0$이 항상 같게 됨을 보이고자 한다. 먼저, 관계식 (7)의 모수 **c**와 D의 최우추정량은 각각 MLE의 불변성(inveriance property)에 의해

$$\hat{\mathbf{c}} = -(\hat{B}'\hat{B})^{-1}B'\hat{\mathbf{a}}$$
$$\hat{D} = (\hat{B}'\hat{B})^{-1}\hat{B}'$$

단, $\hat{B}$와 $\mathbf{a}$은 식 (3)과 (4)의 추정량이다. 그리고 B′B는 대칭행렬(symmectric matrix)이므로

$$\hat{D}'\hat{D}=\hat{B}(\hat{B}'\hat{B})^{-1}(\hat{B}'\hat{B})^{-1}\hat{B}'$$

$$\hat{B}'\hat{D}'\hat{D}\,\hat{B}=I_q$$

이다. 따라서

$$\hat{D}'\hat{D}=(\hat{B}'\hat{B})^{-1}$$

가 되고,

$$(\hat{D}'\hat{D})^{-1}\hat{D}'=\hat{B}$$

이 된다. 그러므로

$$\tilde{\xi}_0=(\hat{D}'\hat{D})^{-1}\hat{D}'(\mathbf{y}_0-\hat{\mathbf{c}})$$

$$=-\hat{B}\hat{\mathbf{c}}+\hat{B}\mathbf{y}_0$$

$$=\hat{B}(\hat{B}'\hat{B})^{-1}\hat{B}'\hat{\mathbf{a}}+\hat{B}\mathbf{y}_0$$

$$=\hat{\mathbf{a}}+\hat{B}\mathbf{y}_0 \quad (\because \hat{B}(\hat{B}'\hat{B})^{-1}\hat{B}'=I_p)$$

$$=\hat{\xi}_0$$

참 고 문 헌

1. Williams, E.J., "Regression Methods in Calibration Problems," *Bull. ISI.*, Vol. 43, pp.17-28, 1969.
2. Mandel, J., "Fitting Straight Lines When Both Variables Are Subject to Error," *J. Qual. Technol.*, Vol. 16, pp.1-14, 1984.
3. Lee, S.H. and Yum, B.J., "Choice of Statistical Calibration Procedures When the Standard Measurement is Also Subject to Error," *J. Korean Statist. Soc.*, Vol. 14, pp.63-75, 1985.
4. Corroll, R.J. and Spiegelman, C.H., "The Effect of Ignoring Small Measurement Errors in Precision Instrument Calibration," *J. Qual. Technol.*, Vol. 18, pp.170-173, 1986.
5. Lwin, T. and Spiegelmam, C.H., "Calibration with Working Standards," *Appl. Statist.*, Vol. 35, pp.256-261, 1986.
6. Yum, B.J., "Statistical Calibration When Both Measurements Are Subject to Error : A Simulation Study," *Computers Ind. Engng.*, Vol. 12, pp. 57-65, 1987.
7. Fuller, W.A., *Measurement Error Models*, Wiley, New York, 1987.
8. Lee, S.H. and Yum, B.J., "Large-Sample Comparisons of Statistical Calibration Procedures When Both Measurements Are Subject to Error : The Replicated Case," *J. Korean Statist. Soc.*, Vol. 17, pp. 9-23, 1988.
9. Lee, S.H. and Yum, B.J., "Large-Sample Comparisons of Calibration Procedures When Both Measurements Are Subject to Error : The Unreplicated Case," *Comm. Statist. — Theory Math.*, Vol. 18, pp.3821-3840, 1989.
10. Yum, B.J. and Lee, S.H., "Calibration Procedures When Both Measurements Are Subject to Error : A Comparative Simulation Study of The Unreplicated Case," *Computers Ind. Engng.*, Vol.20., pp. 411-420, 1991.
11. Kendall, M.G. and Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, 3rd ed, Hafner, New York, 1973.
12. Amemiya, Y. and Fuller, W.A., "Estimation for the Multivariate Errors-in-Variables Model with Estimated Error

Covariance Matrix," *Ann. Statist.*, Vol. 12, pp.497-509, 1984.
13. Tracy, D.S. and Srivastava, V.K., "Comparison of Some Linear Calibration Estimators," *Commun. Statist.-Theory Meth.*, Vol. 19, pp.2281-2293, 1990.
14. Brown, P.J., "Multivariate Calibration (with Discussion)," *J.R. Statist. Soc.*, Ser. B, Vol. 44, pp.287-321, 1982.
15. Serfling, R.J., *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Wiley, New York, 1980.
16. Seber, G.A.F., *Linear Regression Analysis*, Wiley, New York, 1977.