

株式收益率 變動幅의 規模效果와 非對稱效果

高 英 先

株式收益率의 條件附分散의 움직임을 模型化하기 위하여 Engle(1982)의 ARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)模型을 嚆矢로 많은 종류의 模型이 제시되어 왔다. 이 가운데서 Nelson(1991)의 EGARCH(Exponential Generalized ARCH)는 종래의 模型에 비하여 여러가지 長點을 지니고 있는 模型이다. 그러나 EGARCH에서는 非期待收益率(unexpected return)이 條件附分散에 미치는 規模效果(magnitude effect)와 非對稱效果(asymmetry effect)의 影響이 동일한 動態(dynamics)를 보인다고 假定하고 있다. 本 論文은 이 假定을 完化하였을 때 規模效果와 非對稱效果가 매우 다른 動態를 가지며, 특히 規模效果의 影響은 오래 지속되는 반면 非對稱效果는 비교적 빠르게 사라짐을 보여준다.

I. 序 論

財務分析理論에서 株式收益率의 分散(variance)은 株式投資의 위험성을 나타내는 척도로 사용되고 있다. 예를 들어 Merton(1973)은 市場포트폴리오(market portfolio)의 期待收益率이 分散의 線型函數로 표현될 수 있음을 보여준다. 또한 이러한

전통적인 CAPM(Capital Asset Pricing Model)에서 기본적으로 가정하고 있는 時間에 대한 不變性(stationarity)을 完化하여 分散이 時間에 따라 변하는 경우¹⁾를 상정해 보면, 각 時點에서의 期待收益率은 그 時點에서의 條件附分散(conditional variance)의 函數가 된다. 즉 여기에서 條件附分散이란 未來의 分散에 관한 市場參加者들의 期待值로 해석하게 되며, 期待收益率이 條件附分散의 函數라는 것은 市場危險이 증가하는 것에 대해 市場參加者들이 報償을 받기 원하기 때문이라고 해석할 수 있다.²⁾

筆者 : 本院 招聘研究員

1) 좀더 정확히 말하면 條件附分散과 無條件分散이 상이한 경우.

2) Merton(1980) 참조.

이와 관련하여 Pindyck(1984)과 Poterba and Summers(1986) 사이에 재미있는 論爭이 있었는데, Pindyck은 1970년대의 株價暴落이 많은 부분 條件附分散의 增加에 따른 期待收益率의 增加에 기인한다고 본 반면 Poterba and Summers는 條件附分散의 움직임이 충분한 持續性(persistence)을 갖지 않기 때문에 그렇게 결론지을 수 없다고 반박하고 있다. 여기에서 條件附分散이 持續的이라는 것은 條件附分散이 증가하였을 때 그후에도 당분간은 條件附分散이 계속 높은 수준에 있다는 것을 의미한다. 또한 반대로 條件附分散이 감소하면 그후에도 계속 낮은 수준에 머무르게 될 가능성이 많다는 것을 의미한다.

이러한 論議와 관련하여 중요한 문제는 어떻게 條件附分散을 模型化할 것인가 하는 문제이다. 어떤 模型에 따르면 條件附分散이 매우 지속적인 움직임을 보이는 것으로 추정되는 반면 다른 模型에 따르면 그렇지 않을 수 있기 때문이다. 條件附分散을 模型化하는 데에 있어 가장 많이 사용되는 것은 Engle(1982)이 처음 제안한 ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 계통의 模型이다. 이 계통의 模型에 포함되는 대표적인 것으로 Bollerslev (1986)의 Generalized ARCH(GARCH)와 Nelson(1991)의 Exponential GARCH(EGARCH)를 꼽을 수 있다. Pagan and Schwert(1990)는 이들을 포함한 여러 模型들에 대한 實證的 比較를 제공하고

있다.

本 論文에서는 Nelson의 EGARCH를 좀더 일반적인 형태로 擴張한 模型을 제시하고 그 有用性を 탐색해 보고자 한다. EGARCH는 ARCH 또는 GARCH에 대하여 여러가지 長點을 가지고 있는 模型으로 알려져 있다. 먼저 EGARCH에서는 條件附分散의 持續性的의 의미가 명확하다는 점을 들 수 있다. 즉 ARCH와 GARCH에서는 條件附分散이 어떤 尺度(norm)에서는 지속성을 가지더라도 다른 尺度에서는 지속성을 잃는 경우가 발생할 수 있다. 반면 EGARCH에서는 條件附分散의 로그(log) 값이 일반적 線型模型의 諸假定을 만족시키기 때문에 持續性的의 의미가 명확하다.

EGARCH의 또 다른 長點은, 株式收益率의 예상치 못한 變動이 음(-)의 방향으로 발생하였는가 또는 양(+)의 방향으로 발생하였는가에 따라 條件附分散이 相異한 형태로 움직일 수 있다는 사실을 模型 속에 포착할 수 있다는 점이다. 株式收益率이 豫想值보다 낮은 경우에는 그후 收益率의 變動幅(volatility)이 상대적으로 크고, 반대로 株式收益率이 豫想值보다 큰 경우에는 그후 收益率의 變動幅이 상대적으로 작다는 것이 전부터 알려져 왔었다. 즉 非期待收益率(unexpected return)이 음(-)인 경우에는 그것이 양(+)인 경우보다 條件附分散이 더 크다. 이러한 非對稱性是 條件附分散이 現在 및 過去收益率의 絕對值(magnitude)와 관계가 있을 뿐 아니라 收益率의

符號(sign)와도 관련이 있음을 의미한다.

Black(1976)은 이러한 非對稱的 움직임을 설명하기 위하여 두가지의 理論을 제시하였다. 첫째의 理論은 앞에서 언급한 바와 같은 危險프리미엄假說(risk premium hypothesis)이다. 즉 앞으로 分散이 증가할 것으로 市場參加者들이 예상한다면 현재의 株價가 하락하고 그 결과 非期待收益率은 음(-)이 된다. 만일 市場參加者들의 예상이 平均적으로 옳다면, 즉 이들이 상습적으로 예측을 잘못하지 않는다면 現在의 非期待收益率과 未來의 分散 사이에는 음(-)의 相關關係가 관찰될 것이다. 이 경우에 因果關係는 未來의 分散에서 現在의 非期待收益率의 방향으로 흐르게 된다.

非對稱的 움직임을 설명하는 두번째 假說은 레버리지效果理論(leverage effect hypothesis)이라 불리는 것으로서, 이 假說은 株式所有者들이 해당 企業의 資產에 대하여 가지고 있는 請求權은 債券所有者들이 가지는 請求權에 대하여 下位에 있다는 사실에 착안하고 있다. 즉 株式은 殘餘請求權(residual claim)이기 때문에 企業의 收益性變化에 따른 資產價値의 變動은 債券所有者보다는 株式所有者들에게 더 많이 귀착되며, 따라서 많은 경우 株式價値의 變動幅이 債券價値의 變動幅보다 크다. 또한 全體資

產價値의 變動幅은 같더라도 負債比率(負債 ÷ 總資產)이 높은 기업일수록 株價의 變動幅이 더 크게 된다. 이러한 사실로부터 우리는 株價가 하락하여 負債比率가 증가하면 株式收益率의 分散이 증가할 것으로 예상할 수 있다. 이 경우 條件附分散과 收益率 사이의 因果關係는 앞서와는 달리 後者에서 前者의 방향으로 흐르게 된다.

이러한 두 理論 가운데 어느 것이 옳느냐의 문제는 本 論文의 관심사항이 아니다.³⁾ 本 論文에서는 다만 이러한 非對稱性을 模型化하는 데 있어 EGARCH 模型이 갖는 限界를 지적하고 이에 대한 改善策을 제시하고자 한다. EGARCH에 따르면 非期待收益率의 非對稱效果(asymmetry effect)와 規模效果(magnitude effect)가 동일한 持續性을 가진다. 그러나 선형적으로 이들이 동일한 長期的 動態를 보일 이유가 없다. 따라서 本 論文에서는 이들이 상이한 방식으로 움직일 수 있도록 模型을 一般化하고 이 새로운 模型을 generalized exponential ARCH(GE-ARCH)라고 부르기로 한다. 그리고 이 模型을 美國의 月別 株式收益率 資料에 적용함으로써 非對稱效果와 規模效果가 과연 얼마나 相異한 형태로 움직이는가를 살펴보고자 한다.

다음 章에서는 ARCH, GARCH, 그리고 EGARCH 模型에 대해서 설명한 후에 III 章에서 非對稱效果 및 規模效果의 의미를 구체적으로 설명하고 GE-ARCH模型을 제시한다. IV章은 美國 株式收益率 資料를 이

3) 관심있는 讀者는 Christie(1982), Haugen, Talmor, and Torous(1991), French, Schwert, and Stambaugh(1987) 등을 참조할 것.

용하여 이 模型을 추정하고 EGARCH 模型과의 차이점을 보여준다. V章은 結論을 싣고 있다.

II. 條件附分散의 持續性

論議에 앞서 [圖 1]에 나타난 美國의 株式收益率을 살펴보도록 하자. [圖 1]은 「스탠다드 앤 푸어」의 株價指數(S&P 500)를 기초로 한 美國의 戰後 月別株式收益率을 보여주고 있다.⁴⁾ 이 그림을 살펴보면 美國 株式市場에서는 株式收益率이 비교적 小幅으로 騰落하였던 시기와 큰 폭으로 騰落하였던 시기가 반복되었음을 알 수 있다. 예를 들어 1962년 中반에 收益率은 크게 감소하였다가 곧 증가하였고 그후에는 變動幅이 줄어들어 안정된 모습을 보이다가 1966년 말에 다시 커졌다. 그러나 變動幅이 가장 컸던 시기는 1974년의 오일 쇼크를 전후한 시기로서, 1974년 9월에 收益率이 -11.7%로 暴落하였다가 다음달에는 16.6%로 暴騰하였다. 이러한 暴騰과 暴落은 1976년까지 다소간 지속되고 있다.

ARCH 및 그후의 여러 模型은 이처럼 무리를 지어 일어나는 暴騰과 暴落의 현상을 포착하려는 목적으로 고안되었다. 이러

한 模型들을 설명하기 위하여 다음과 같은 變數들을 정의하기로 한다. 먼저 P_t 를 t 期末의 株式價格이라 하고 E_{t-1} 을 $t-1$ 期末에 알고 있는 情報에 대한 條件附期待值(conditional expectation)라 하자. 그러면

$$r_t = \log(P_t / P_{t-1}) = t \text{ 期의 로그收益率 (log-return) } \dots\dots\dots (1)$$

$$e_t = r_t - E_{t-1} r_t = t \text{ 期의 非期待收益率 (unexpected return) } \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_t^2 = E_{t-1} e_t^2 = t \text{ 期의 條件附分散 } \dots\dots (3)$$

$$z_t = \frac{e_t}{\sigma_t} \dots\dots\dots (4)$$

式 (1)에서 r_t 를 로그收益率로 정의한 것은, 이렇게 정의했을 때 r_t 의 support가 $(-\infty, \infty)$ 가 되어 正規分布 등을 가정할 수 있기 때문이다.

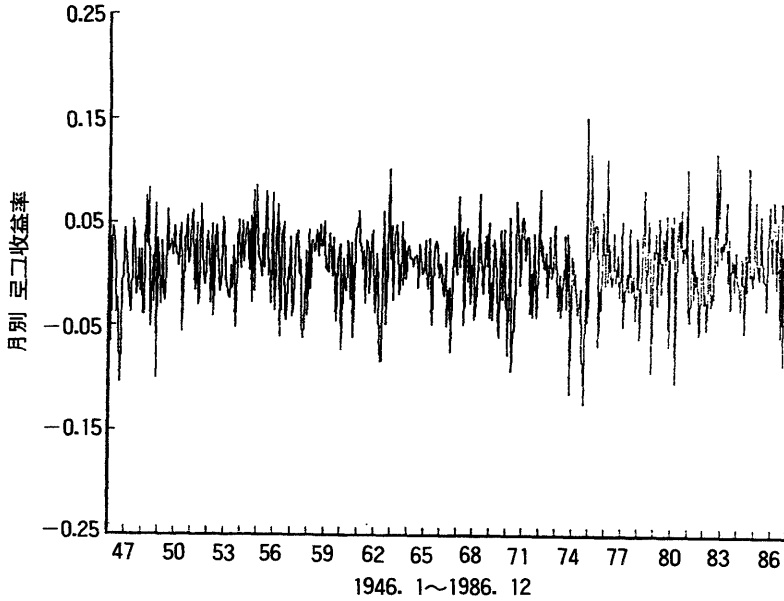
式 (4)에 따르면 z_t 는 平均이 0이고 分散이 1이다. 또한 서로 다른 z_t 간의 共分散(covariance)은 0이 된다. 따라서 r_t 의 條件附分布가 正規分布라면 z_t 는 相互獨立의이고 同一한 (i. i. d; independent and identically distributed) 標準正規分布를 갖게 된다. 뒤에 가서 模型을 추정할 때는 z_t 가 正規分布를 갖는다고 가정하겠지만 현재에는 단지 이들이 i. i. d.이며 對稱的인 分布를 가졌다는 것만을 가정하도록 하자.

ARCH 模型은 σ_t^2 가 다음과 같이 움직인다고 가정한다.

$$\sigma_t^2 = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e_{t-i}^2, \quad A_i \geq 0, \quad i=0, 1, 2, \dots \dots\dots (5)$$

4) 株式收益率은 配當所得을 포함하며, 그림에 그려진 것은 株式收益率+1에 로그를 취한 값이다.

[圖 1] S & P 500 株式收益率



위에서 係數값들이 0 이상이라고 가정한 것은 e^2_{t-1} 의 값에 관계없이 σ^2_t 이 항상 0 이상의 값을 가져야 하기 때문이다. 이렇게 가정하면 e^2_{t-1} 가 클수록 σ^2_t 가 커지게 된다. 예를 들어 $t-1$ 期の 株式값이 暴騰 또는 暴落하여 e^2_{t-1} 의 값이 커지면 σ^2_t 의 값도 커진다. 이것은 $t-1$ 期和 마찬가지로 t 期에도 株式값의 變動幅이 클 것으로 예상됨을 의미한다. 式 (5)의 無限合(infinite sum)은 이러한 效果가 상당히 오래 지속될 가능성을 포착하기 위함이다. 만일 $i \rightarrow \infty$ 함에 따라 $A_i \rightarrow 0$ 한다면 시간이 지남에 따라 e^2_{t-1} 의 영향이 줄어들게 된다.

GARCH 模型은 式 (5)의 ARCH를 一般化하여 σ^2_t 가 좀더 복잡한 형태로 움직일

수 있도록 한 것이다. GARCH에서 σ^2_t 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma^2_t = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^2_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sigma^2_{t-i}, \quad A_i, B_i \geq 0 \dots\dots\dots(6)$$

즉 一般的인 時系列模型에서 MA process를 ARMA process로 확장하는 것처럼 ARCH를 확장한 것이 GARCH이다. 一般時系列模型처럼 式 (6)의 GARCH는 式 (5)의 無限系列(infinite series) ARCH로 표현될 수 있다.

그러나 ARCH 및 GARCH는 一般線型模型과는 근본적으로 다른 성격을 가지고 있는데, 예를 들어 式 (6)에서 $A_1=1-B_1$ 이고 A_1 과 B_1 를 제외한 모든 係數는 0인 경우

를 생각해 보자. 즉

$$\sigma_t^2 = (1 - B_1) e_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2 \dots\dots\dots (7)$$

인 경우에, 간단한 計算을 통하여 다음과 같은 관계를 보일 수 있다.

$$E_{t-1} \sigma_{t+s}^2 = \sigma_t^2, \quad s \geq 1 \dots\dots\dots (8)$$

式 (8)은 σ_t^2 가 martingale process임을 보여준다. 따라서 일반 時系列模型에서처럼 σ_t^2 가 random walk process와 같은 성격을 가질 것으로 (잘못) 짐작할 수 있다. 예를 들어 σ_t^2 에 대한 衝擊(shock)의 效果가 영원히 지속되며 σ_t^2 의 分散이 發散(explode)하게 될 것으로 짐작할 수 있다. 그러나 이러한 짐작과는 반대로 式 (7)의 경우에 σ_t^2 는 確率 1로 (almost surely) 0으로 수렴함을 보일 수 있다.⁵⁾ 즉 σ_t^2 에 대한 衝擊의 效果는 곧 사라지며 σ_t^2 의 分散은 0으로 수렴한다.

이러한 論議는 ARCH 또는 GARCH 模型에서 σ_t^2 가 持續性(persistence)을 갖는가 갖지 않는가를 판단하는 데 있어 一般 時系列分析理論의 結果를 援引할 수 없음을 보여준다. EGARCH 模型은 이러한 점에 있어서 ARCH와 GARCH 模型의 단점을 훌륭히 개선하였다.

EGARCH 模型은 實數 $\theta, \gamma, \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 에 대하여 條件附分散을 다음과 같이 정의한

다.

$$\log \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i g(z_{t-i}), \quad a_1 \equiv 1 \dots\dots\dots (9)$$

$$g(z) = \theta(|z| - E|z|) + \gamma z \dots\dots\dots (10)$$

앞에서 가정한 것처럼 z_t 이 i. i. d. 라고 가정하면 式 (10)에서 $g(z_t)$ 역시 i. i. d. 이며 따라서 式 (9)의 모형은 一般線型模型理論의 적용을 받을 수 있다. 예를 들어 $\log \sigma_t^2$ 가 stationary하고 ergodic하기 위한 必要充分條件은 $\sum a_i^2 < \infty$ 이며, 만일 $\sum a_i^2 = \infty$ 이라면 $\log \sigma_t^2$ 에 대한 衝擊($g(z_t)$)의 效果는 영원히 지속된다.

실제 模型의 推定에 있어서는 式 (9)의 無限系列表現을 사용하지 않고 다음과 같은 ARMA 형태를 가정하게 된다.

$$\log \sigma_t^2 = b_0 + \frac{1 + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p}{1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p} \cdot g(z_t) \dots\dots\dots (11)$$

式 (11)의 模型은 EGARCH(p, q)라 불린다. 式 (11)과 같이 가정했을 때 $\sum a_i^2 < \infty$ 의 條件은 $x^p - \alpha_1 x^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0$ 의 根이 單位圓(unit circle) 안에 있다는 條件과 同一하다.

EGARCH 模型은 또 序論에서 언급한 바와 같이 條件附分散의 非對稱性을 포착할 수 있다. 만일 式 (10)에서 $\gamma=0$ 이라면 $g(z)$ 는 z 의 절대값으로부터만 영향을 받으며 非對稱性은 존재하지 않게 된다. 그러나 만일 $\gamma < 0$ 이라면 $g(z_{t-1})$ 는 $z_{t-1} > 0$ 일 때보다

5) Geweke(1986) 참조.

$z_{-1} < 0$ 일 때에 더 크다. 따라서 $\log \sigma_t^2$ 역시 $z_{-1} > 0$ 일 때보다 $z_{-1} < 0$ 일 때에 더 크다.

Nelson(1991)은 日別收益率로 模型을 추정하여 본 결과 $\gamma < 0$ 임을 발견하였으며, Pagan and Schwert(1990) 역시 1800년대의 月別收益率로 模型을 추정해 본 결과 $\gamma < 0$ 임을 발견하였다. ARCH와 GARCH 모형은 이러한 非對稱性을 模型 속에 포함할 수 없다.

EGARCH의 또 다른 長點으로는 式 (9)에서 係數 a_i 에 대하여 어떠한 制約도 두지 않는다는 것이다. 반면 ARCH 및 GARCH에서는 係數들이 0 이상이어야 한다. 따라서 EGARCH는 좀더 다양한 動態를 포착할 수 있다. 즉 ARCH 및 GARCH에서는 衝擊이 항상 條件附分散을 증가시키는 방향으로 작용하지만 EGARCH에서는 條件附分散을 증가시킬 수도 있고 감소시킬 수도 있다.

III. GE-ARCH

그러나 이러한 長點에도 불구하고 EGARCH는 限界를 갖고 있는데, 그것은 EGARCH에서는

$$g_1(z_t) \equiv \theta(|z_t| - E|z_t|) \dots\dots\dots(12)$$

로 표현되는 ‘規模效果’(magnitude effect)와

$$g_2(z_t) \equiv \gamma z_t \dots\dots\dots(13)$$

로 표현되는 ‘非對稱效果’(asymmetry effect)가 서로 다른 動態的 성질을 가질 수 없기 때문이다. 예를 들어 式 (9)에서 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 가 一定率 ρ 로 감소하는 경우를 생각해 보자.

$$a_1 = 1, a_2 = \rho, a_3 = \rho^2, a_4 = \rho^3, \dots, |\rho| < 1 \dots\dots\dots(14)$$

그러면 式 (9)와 (10)으로부터

$$\log \sigma_t^2 = a_0 + g_1(z_t) + \rho g_1(z_{t-1}) + \rho^2 g_1(z_{t-2}) + \dots + g_2(z_t) + \rho g_2(z_{t-1}) + \rho^2 g_2(z_{t-2}) + \dots \dots\dots(15)$$

이다. 따라서 시간이 지남에 따라 規模效果 $g_1(z_t)$ 는 非對稱效果 $g_2(z_t)$ 와 동일한 속도로 감소하게 된다. 그러나 선형적으로 이것이 그래야만 하는 이유를 찾기 어렵다. 이제 이러한 假定을 完化하여 規模效果는 ρ_1 의 속도로 감소하고 非對稱效果는 ρ_2 의 속도로 감소한다고 가정하자. 그러면

$$\log \sigma_t^2 = a_0 + g_1(z_t) + \rho_1 g_1(z_{t-1}) + \rho_1^2 g_1(z_{t-2}) + \dots + g_2(z_t) + \rho_2 g_2(z_{t-1}) + \rho_2^2 g_2(z_{t-2}) + \dots \dots\dots(16)$$

이다. 따라서 만일 $|\rho_1| > |\rho_2|$ 라면 規模效果가 非對稱效果에 비하여 더 오래 지속되며 반대로 $|\rho_1| < |\rho_2|$ 라면 非對稱效果가 規模效果보다 더 오래 지속된다.

이러한 論議를 확장하여 條件附分散을 다

음과 같은 방식으로 정의하자.

$$\begin{aligned} \log \sigma_t^2 &= b_0 + \theta \sum_{i=1}^{\infty} b_i (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|) \\ &+ \gamma \sum_{i=1}^{\infty} c_i z_{t-i}, \dots \dots \dots (17) \\ b_1 &\equiv 1, \quad c_1 \equiv 1, \end{aligned}$$

여기에서 $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ 와 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ 는 實數의 series이다. 만일 모든 i 에 대하여 $b_i = c_i$ 라면 式 (17)은 式 (9)와 같은 형태가 된다. 그러나 그렇지 않다면 規模效果和 非對稱效果는 서로 다른 長期의 動態를 보이게 된다. 우리는 式 (17)의 模型을 Generalized Exponential ARCH (GE-ARCH)로 부르기로 한다.

GE-ARCH 模型에서 $\log \sigma_t^2$ 의 stationarity와 ergodicity는 다음의 定理가 보여주는 바와 같이 b_i 와 c_i 의 自乘合可能性 (square summability)에 달려 있다.

<定理 1> 式 (17)과 같이 $\log \sigma_t^2$ 를 정의하고 $\{z_t\}$ 가 i. i. d.이며 對稱的인 分布를 가졌다고 가정하자. 또한 θ 와 γ 가운데 적어도 하나는 0이 아니라고 가정하자. 이때 σ_t^2 와 $\log \sigma_t^2$ 가 stationary하고 ergodic하며 $\log \sigma_t^2$ 가 covariance stationary하기 위한 必要充分條件은 $\sum b_i^2 < \infty$ 하고 $\sum c_i^2 < \infty$ 한 것이다. 또한 $\sum b_i^2 = \infty$ 이거나 $\sum c_i^2 = \infty$ 라면 確率 1로 (almost surely) $\log \sigma_t^2 = \infty$ 이다.

定理의 證明은 本 論文의 附錄에 실려 있다.

아래에서 실제로 模型을 추정하는 데 있

어서는 式 (17)의 無限系列表現을 사용하지 않고 다음과 같은 ARMA 형태를 가정하였다.

$$\begin{aligned} \log \sigma_t^2 &= b_0 + \frac{1 + \phi_1 L + \dots + \phi_n L^n}{1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p} \cdot \theta (|z_t| - E|z_t|) \\ &+ \frac{1 + \psi_1 L + \dots + \psi_m L^m}{1 - \beta_1 L - \dots - \beta_m L^m} \cdot \gamma z_t \dots (18) \end{aligned}$$

이때 自乘合可能條件 ($\sum b_i^2 < \infty, \sum c_i^2 < \infty$)은 $x^p - \alpha_1 x^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0$ 과 $x^m - \beta_1 x^{m-1} - \dots - \beta_m = 0$ 의 根이 單位圓 (unit circle) 안에 있어야 한다는 條件과 동일하다.

<定理 1>은 σ_t^2 이 strictly stationary하기 위한 必要充分條件은 $\{b_i\}$ 와 $\{c_i\}$ 의 自乘合可能性을 보여준다. 반면 <定理 1>은 σ_t^2 이 covariance stationary하기 위한 條件은 제시하지 않고 있다. 다음의 <定理 2>는 z_t 가 正規分布를 가진다고 가정할 때 $\{b_i\}, \{c_i\}$ 가 自乘合可能하면 σ_t^2 의 모든 moment가 존재함을 보여준다. 즉 이 경우 σ_t^2 는 covariance stationary하다.

<定理 2> 式 (17)에서와 같이 σ_t^2 를 정의하고 θ 와 γ 가운데 적어도 하나는 0이 아니라고 가정하자. 또한 z_t 가 i. i. d.이며 正規分布를 갖는다고 가정하고 $\sum b_i^2 < \infty$ 이고 $\sum c_i^2 < \infty$ 이라고 가정하자. 그러면 양 (+)의 實數 d 에 대하여

$$\begin{aligned} E \sigma_t^{2d} &= e^{ad} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \phi((b_i + c_i)d) \exp \left[\frac{1}{2} (b_i + c_i)^2 d^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_i d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \phi((b_i - c_i)d) \exp \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{2} (b_i - c_i)^2 d^2 - b_i d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right\} < \infty \dots (19) \end{aligned}$$

이다. 여기에서 $\phi(\cdot)$ 는 標準正規分布의 累積分布函數이다.

특히 $d=1$ 일 때 <定理 2>는 $\sum b_i^2 < \infty$ 이고 $\sum c_i^2 < \infty$ 이라면 $Ee_i^2 = E\sigma_i^2 < \infty$ 임을 보여준다. 즉 $\log\sigma_i^2$ 가 stationary하다면 e_i 의 無條件附分散은 有限(finite)하다.

IV. 規模效果와 非對稱效果의 長期的 動態

이제 1946년에서 1986년까지 美國 株式市場의 月別 超過收益率(excess return) 資料를 사용하여 式 (18)의 模型을 추정하기로 한다. 여기에서 超過收益率이란 株式收益率에서 無危險資產收益率을 뺀 값을 말하는데, 원래의 株式收益率 대신 超過收益率을 사용하는 것은 株式收益率 중 物價上昇率에 해당하는 부분의 영향을 없애기 위함이다. 株式收益率은 S&P500의 收益率(配當所得 포함)을 사용하였으며 無危險資產收益率로는 1個月滿期 財務省證券 收益率(one-month treasury bill rate)을 사용하였다. 전체 標本數는 492개이며 資料는 모두 Ibbotson and Sinquefeld(1989)에서 추출하였다.

模型推定에 있어서는 앞에서 언급한 바와 같이 z_i 가 i. i. d. 正規分布를 가진다고 가정했다. 이 가정하에서 $E|z_i| = \sqrt{2/\pi}$ 이다.

먼저 다음의 EGARCH(2,0) 模型을 추정하였다.

$$r_i = \mu + \lambda\sigma_i^2 + e_i \dots\dots\dots (20)$$

$$\log\sigma_i^2 = a_0 + \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} [\theta(|z_i| - \sqrt{2/\pi}) + \gamma z_i] \dots\dots\dots (21)$$

式 (20)에 따르면 期待收益率은 $E_{i-1}r_i = \mu + \lambda\sigma_i^2$ 이다. 여기에서 $\lambda\sigma_i^2$ 는 期待收益率의 한 決定要因으로서 危險프리미엄(risk premium)을 나타낸다. 序論에서 설명한 바와 같이 σ_i^2 는 市場參加者들이 예상하는 市場危險의 정도를 나타내며, 市場危險이 클수록 期待收益率이 커야 하므로 $\lambda > 0$ 일 것으로 예상된다.

式 (21)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\log\sigma_i^2 = a_0 + \alpha_1 \log\sigma_{i-1}^2 + \alpha_2 \log\sigma_{i-2}^2 + \theta(|z_i| - \sqrt{2/\pi}) + \gamma z_i \dots\dots (22)$$

여기에서 $a_0 = a_0(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$ 이다.

로그尤度函數는 다음과 같다.

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum \log\sigma_i^2 - \frac{1}{2} \sum \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \dots\dots (23)$$

e_i 의 값은 式 (20)과 (22)를 사용하여 反復的으로(recursively) 계산하였다. $\log\sigma_i^2$ 의 初期값으로는 超過收益率의 標本分散에 로그를 취한 값을 사용하였다. $(|z_i| - \sqrt{2/\pi})$ 와 z_i 의 초기값은 0으로 하였다. 이러한 초기값을 사용하여 e_i 와 σ_i^2 를 계산한 후에 첫 12개의 標本을 式 (23)의 尤度函數에 포함시키지 않고 버렸는데, 이는 초기값 選定에 따라 推定值가 달라질 수 있는 短點을 보완하기 위함이다. 따라서 式 (23)의 합계(Σ)

〈表 1〉 EGARCH 模型의 推定值 : 式 (20)과 (21)

$\mu \times 100$	λ	α_0	α_1	α_2	θ	γ
-1.099	-3.417	-1.313	0.238	0.560	0.066	-0.190
(-0.834)	(-0.380)	(-2.816)	(0.636)	(1.593)	(0.368)	(-3.160)
[-1.492]	[-0.686]	[-2.542]	[1.109]	[2.612]	[0.703]	[-3.774]

註 : () 안의 數는 보통의 t 값이며, [] 안의 數는 White(1982)의 robust t 값임.

는 실제로 480개 項의 乘을 의미한다. 式 (23)을 極大化하기 위해서 Gauss의 MAX LIK 루틴을 사용하였다.

推定結果는 〈表 1〉에 제시되어 있다. () 안의 數는 情報行列(information matrix)의 逆行列을 分散行列(covariance matrix)로 사용하였을 때의 t 값이며, [] 안의 數는 White(1982)의 misspecification-robust covariance matrix를 사용하였을 때의 t 값이다. 로그尤度값은 849.83이었으며, 더 많은 $\log\sigma_t^2$ 과 $\theta(|z_t| - \sqrt{2/\pi}) + \gamma z_t$ 의 래그(lag)項을 포함시키더라도 로그尤度값은 크게 증가하지 않았다.

〈表 1〉에서 $x^2 - \hat{\alpha}_1 x - \hat{\alpha}_2 = 0$ 의 根은 0.877과 -0.639이다. EGARCH 模型에서는 規模效果와 非對稱效果가 이러한 根을 가지는 동일한 AR(2) 過程을 거쳐 $\log\sigma_t^2$ 에 영향을 미친다. 각 效果의 長期的 動態를 살펴보기 위하여 다음과 같이 $G_1(z_t)$ 과 $G_2(z_t)$ 를 정의하자.

$$G_1(z_t) \equiv \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \cdot \theta(|z_t| - \sqrt{2/\pi})$$

$$G_2(z_t) \equiv \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \cdot \gamma z_t \dots\dots\dots(24)$$

그러면 式 (21)로부터

$$\log\sigma_t^2 = \alpha_0 + G_1(z_t) + G_2(z_t) \dots\dots\dots(25)$$

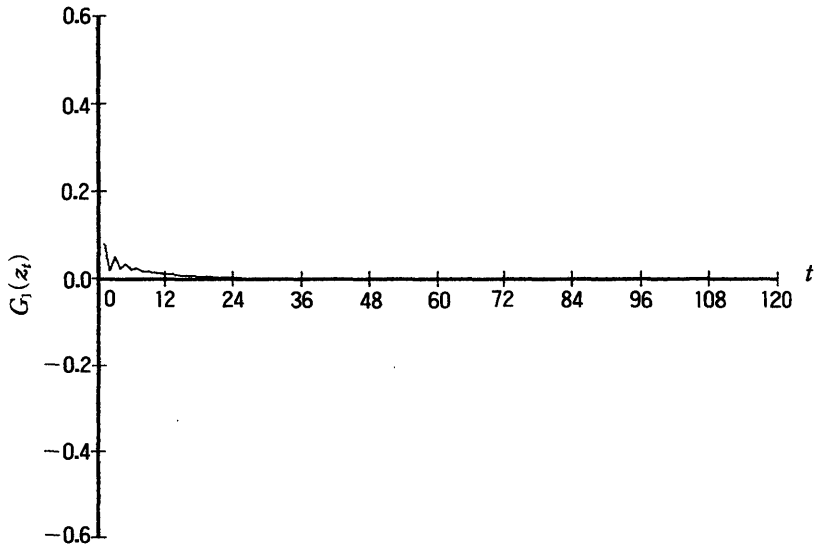
임을 알 수 있다. 따라서 $G_1(z_t)$ 는 $\log\sigma_t^2$ 가운데 規模效果에 기인한 부분을 의미하며, $G_2(z_t)$ 는 非對稱效果에 기인한 부분을 의미한다. 각각의 效果가 $\log\sigma_t^2$ 에 미치는 영향이 [圖 2]와 [圖 3]에 예시되어 있다. 이 그림들은

$$\begin{aligned} z_0 = \pm 2, g_1(z_1) = g_1(z_2) = \dots = 0, \\ g_2(z_1) = g_2(z_2) = \dots = 0 \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

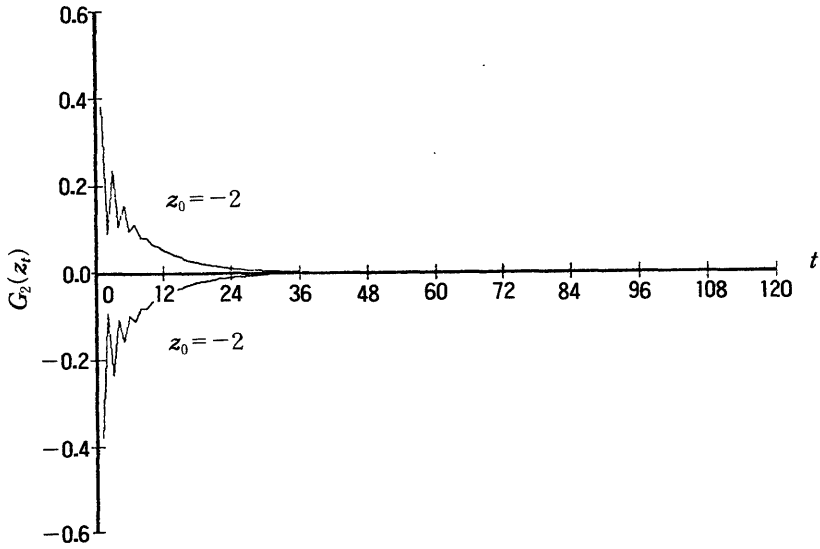
일 때 $G_1(z_t)$, $G_2(z_t)$ 의 움직임을 보여준다. z_t 는 標準正規分布를 가지므로 $z_0 = \pm 2$ 라는 것은 期待值로부터 標準偏差의 2배만큼 떨어져 있는 것을 의미한다.

먼저 [圖 2]는 $g_1(\pm 2) = \theta(|\pm 2| - \sqrt{2/\pi})$ 라는 衝擊이 가해졌을 때 $G_1(z_t)$ 가 처음에는 증가하였다가 차차 長期的 均衡值인 0으로 수렴하는 것을 보여준다. 또 [圖 3]은 $g_2(\pm 2) = \pm 2\gamma$ 라는 衝擊이 가해졌을 때에 $G_2(z_t)$ 가 처음에는 감소($z_0 = 2$ 일 때) 또는 증가($z_0 = -2$ 일 때)했다가 차차 長期的 均衡值인 0으로 수렴하는 것을 보여준다. $G_1(z_t)$

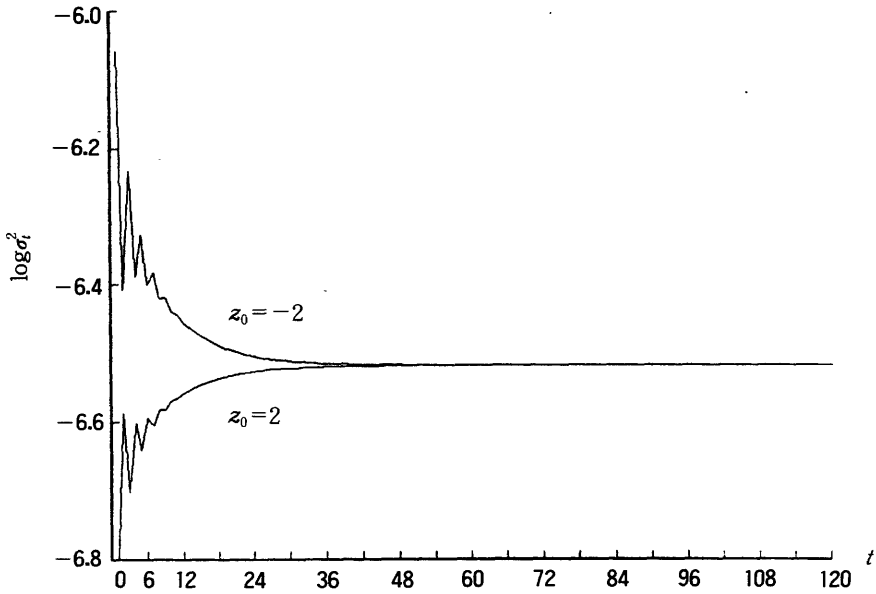
[圖 2] 規模效果의 長期的 動態



[圖 3] 非對稱效果의 長期的 動態



[圖 4] $\log\sigma_t^2$ 의 長期的 動態



과 $G_2(z_t)$ 는 동일한 AR(2) 過程의 지배를 받으므로 그 움직이는 형태가 동일하다. 단지 초기값 $g_1(\pm 2)$ 또는 $g_2(\pm 2)$ 의 차이로 인해 움직이는 크기가 다를 뿐이다. [圖 2]와 [圖 3]에 따르면 $G_1(z_t)$ 과 $G_2(z_t)$ 은 36개월 후에는 거의 0이 됨을 알 수 있다. 즉 規模效果와 非對稱效果는 3년 후에 거의 모두 사라진다. [圖 4]는 두 效果의 합으로서 $\log\sigma_t^2$ 의 움직임을 보여준다.

위의 그림들로부터 우리는 EGARCH 模型에서 $z_0 = \pm 2$ 라는 비교적 큰 衝擊의 效果가 3년 이내에 사라짐을 알 수 있다. 특히 規模效果는 그 크기가 매우 작은 것으로 나타났는데, 이는 $\hat{\theta}$ 가 작기 때문이다. 이와는 반대로 아래의 결과가 보여 주듯이 GE-ARCH 模型에서는 非對稱效果뿐 아니라

規模效果도 매우 유의하게 나타난다.

이제 式 (21)을 一般化하여 다음과 같은 GE-ARCH 模型을 추정하자.

$$\log\sigma_t^2 = b_0 + \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \cdot \theta(|z_t| - E|z_t|) + \frac{1}{1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2} \cdot \gamma z_t \dots\dots (27)$$

式 (27)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \log\sigma_t^2 = & \beta_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\log\sigma_{t-1}^2 \\ & + (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1\beta_1)\log\sigma_{t-2}^2 \\ & - (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\log\sigma_{t-3}^2 \\ & - \alpha_2\beta_2\log\sigma_{t-4}^2 \\ & + \theta(|z_t| - \sqrt{2/\pi}) - \theta\beta_1(|z_{t-1}| \\ & - \sqrt{2/\pi}) - \theta\beta_2(|z_{t-2}| - \sqrt{2/\pi}) \\ & + \gamma z_t - \gamma\alpha_1 z_{t-1} - \gamma\alpha_2 z_{t-2} \dots\dots (28) \end{aligned}$$

〈表 2〉 GE-ARCH 模型의 推定值 : 式 (20)과 (27)

$\mu \times 100$	λ	β_0	α_1	α_2	β_1	β_2	θ	γ
0.443	0.739	-0.198	1.893	-0.957	0.101	0.422	0.045	-0.287
(0.656)	(0.158)	(-2.073)	(21.446)	(-8.771)	(0.458)	(1.866)	(1.403)	(-3.240)
[0.952]	[0.231]	[-2.199]	[43.540]	[-18.217]	[0.577]	[2.083]	[2.341]	[-3.709]

註 : () 안의 數는 보통의 t 값이며, [] 안의 數는 White(1982)의 robust t 값임.

여기에서, $\beta_0 = b_0(1 - \alpha_1 - \alpha_2)(1 - \beta_1 - \beta_2)$ 이다.

GE-ARCH 模型의 推定值는 〈表 2〉에 제시되어 있다. $\alpha_1 = \beta_1$ 이고 $\alpha_2 = \beta_2$ 일 때 式 (27)은 式 (21)과 같아진다. 尤度比檢定 (likelihood ratio test)과 윌드檢定(Wald test) 모두 이 假說을 기각하는데, 이때 p 값은 각각 0.003 이하, 0.0001 이하였다.

〈表 2〉에서 $x^2 - \hat{\alpha}_1 x - \hat{\alpha}_2 = 0$ 의 根은 $0.947 \pm 0.246i$ 이며 절대값은 0.978이다. 또한 $x^2 - \hat{\beta}_1 x - \hat{\beta}_2 = 0$ 의 根은 0.702, -0.601이다. 따라서 規模效果가 非對稱效果보다 더 지속적임을 알 수 있다. 이와 같은 사실은 앞에서와 같이

$$G_1^*(z) \equiv \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \cdot \theta(|z| - \sqrt{2/\pi})$$

$$G_2^*(z) \equiv \frac{1}{1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2} \cdot \gamma z \dots \dots \dots (29)$$

를 정의하고, 式 (26)의 衝擊에 따른 $G_1^*(z)$ 와 $G_2^*(z)$ 의 반응을 살펴봄으로써 알 수 있다. [圖 5]와 [圖 6]은 $G_1^*(z)$ 과 $G_2^*(z)$ 의 움직임을 각각 圖示하고 있다.

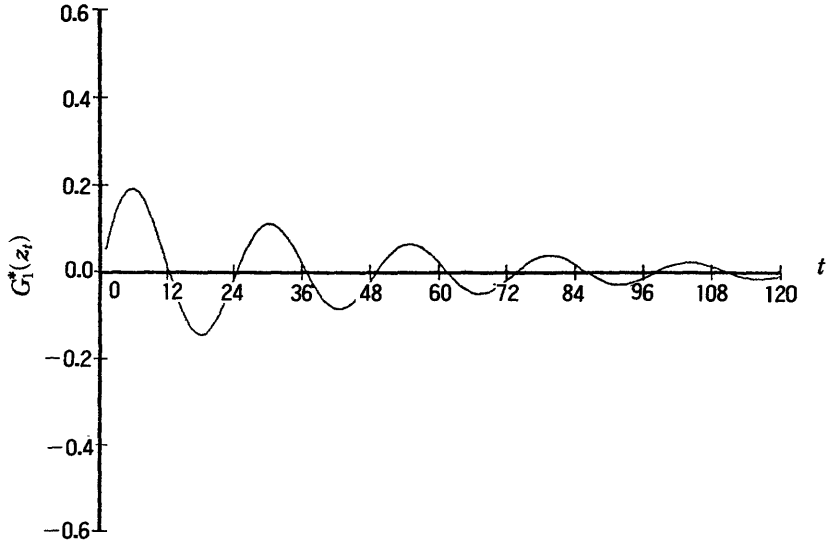
[圖 2]와는 달리 [圖 5]에서 規模效果는 10년이 지나도 지속된다. 반면 [圖 6]에서

알 수 있듯이 非對稱效果는 1년후에는 거의 사라지는데, 이는 [圖 3]의 EGARCH 模型에서 非對稱效果가 오래 지속되는 것과 대조된다. 따라서 EGARCH 模型에서 非對稱效果의 持續性은 過大推定된 반면 規模效果의 持續性은 過小推定되었음을 알 수 있다. [圖 7]은 GE-ARCH 模型에서 規模效果와 非對稱效果를 합했을 때 衝擊의 全般的效果를 보여준다.

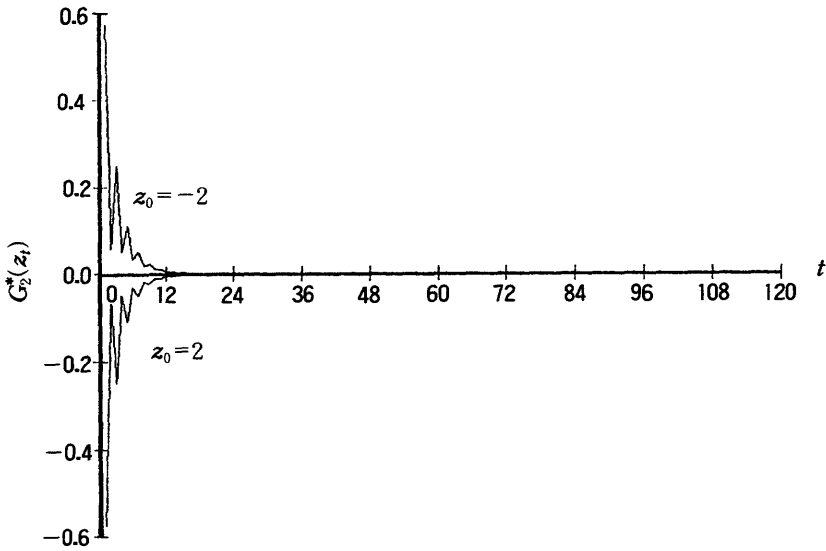
V. 結 論

여러 분야의 應用經濟學에서 지금까지 추정하였던 模型은 變數의 平均值(first moment)에 대한 算式이 대부분이었다. 그러나 1980년대에 들어와서 變數의 條件附分散(second moment)을 模型化하는 작업이 활발해졌는데, Engle(1982)의 ARCH 模型이 이러한 模型들의 嚆矢라 할 수 있다. 이러한 模型들은 財務分析理論에서 證券收益率의 變動幅을 模型化하는 데 가장 많이 사용되었다. 그러나 ARCH 유형의 模型에서

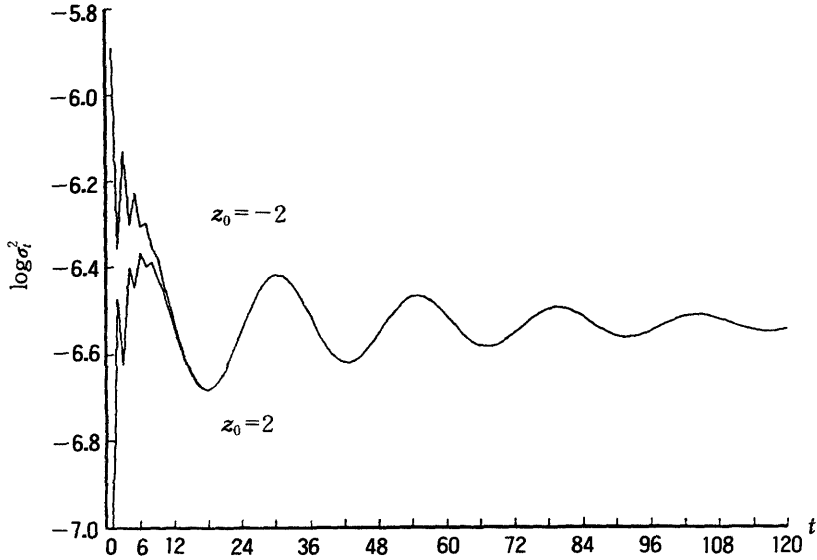
[圖 5] 規模效果의 長期的 動態



[圖 6] 非對稱效果의 長期的 動態



[圖 7] $\log\sigma_t^2$ 의 長期的 動態



는 條件附分散의 非對稱的 움직임을 模型 속에 포착할 수 없었다. Nelson(1991)의 EGARCH 模型은 이와 달리 條件附分散의 非對稱性을 포착할 수 있을 뿐 아니라 그 외의 여러가지 長點도 가진 模型으로 받아들여지고 있다.

本 論文에서는 EGARCH 模型을 발전시켜 非對稱效果와 規模效果가 상이한 長期的 動態를 보이는 現象을 模型化할 수 있는 방

법을 제시하였다. 또한 이 模型(GE-ARCH)의 현실적 重要度를 평가해 보고자 美國의 戰後 月別株式收益率 資料를 사용하여 이 模型을 추정해 보았다. 그 결과 規模效果는 EGARCH 模型에서보다 훨씬 더 긴 壽命을 가짐을 발견하였으며 반대로 非對稱效果는 壽命이 짧아짐을 발견하였다. 따라서 GE-ARCH 模型은 EGARCH 模型의 중요한 發展으로 받아들일 수 있다.

▷ 参 考 文 献 ◁

- Billingsley, Patrick, *Probability and Measure*, Second Edition, New York: John Wiley and Sons, 1986.
- Black, Fisher, "Studies of Stock Price Volatility," *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 1976, pp. 177~181.
- Bollerslev, Tim, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 1986, pp. 307~328.
- Christie, Andrew A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances," *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, pp. 407~432.
- Engle, Robert F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 987~1007.
- French, Kenneth R., G. William Schwert, and Robert F. Stambaugh, "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics*, 19, 1987, pp. 3~29.
- Geweke, John, "Comment," *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp.57~61.
- Haugen, A., Robert Eli Talmor, and Walter N. Torous, "The Effect of Volatility Changes on the Level of Stock Prices and Subsequent Expected Returns," *Journal of Finance*, 46, 1991, pp. 985~1007.
- Ibbotson, Roger G. and Rex A. Sinquefeld, *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation: Historical Returns (1926~1987)*, Chicago, 1989.
- Merton, Robert C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41, 1973, pp. 967~987.
- Merton, Robert C., "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation," *Journal of Financial Economics*, 8, 1980, pp. 323~361.
- Nelson, Daniel B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 1991, pp. 347~370.
- Pagan, Adrian R. and G. William Schwert, "Alternative Models for Con-

- ditional Stock Volatility," *Journal of Econometrics*, 45, 1990, pp. 267~290.
- Pindyck, Robert S., "Risk, Inflation, and the Stock Market," *American Economic Review*, 74, 1984, pp. 335~351.
- Poterba, James M. and Lawrence H. Summers, "The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations," *American Economic Review*, 76, 1986, pp. 1142~1151.
- White, Halbert, "Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 1~26.

附 錄

1. <定理 1>의 證明

<定理 1>은 Nelson(1991)의 <定理 2. 1>을 응용하여 證明한다. 먼저 $\sum b_i^2 < \infty$ 이고 $\sum c_i^2 < \infty$ 라고 가정하자. 그리고 $X_i = \theta b_i(|z_i| - E|z_i|) + \gamma c_i z_i$ 로 정의한다. 그러면 X_i 들은 相互獨立의이며, $EX_i = 0$ 이다. 또한 z_i 의 分布가 對稱的이고, $Var(z_i) = 1 < \infty$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{\infty} Var(X_i) = \theta^2 Var(|z_i|) \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 + \gamma^2 Var(z_i) \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty \quad (i)$$

이다. 그러면 Billingsley(1986)의 <定理 22.6>에 따라 $\log \sigma_t^2 (= \sum X_i)$ 이 確率 1로 有限하다(finite almost surely). 그러면 式 (12)에 의하여 정의된 $\{z_{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ 에서 $\log \sigma_t^2$ 로 의 mapping은 measurable하며, 따라서 Stout(1974)의 <定理 3. 5. 8>에 의하여 $\log \sigma_t^2$ 와 σ_t^2 는 stationary하고 ergodic하다.

이제 모든 t 에 대하여 $\log \sigma_t^2$ 의 分散은 式 (i)에 의하여 주어진 바와 같이 그 값이 有限하다. 따라서 $\log \sigma_t^2$ 는 covariance stationary하다.

A 를 $\log \sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty$ 인 事件(event)이라 정의하자. 그러면 A 는 tail event이므로 Kolmogorov의 0-1 定理(Billingsley(1986),

<定理 22.3>)에 의하여 $P(A) = 0$ 이거나 $P(A) = 1$ 이다. 만일 $\sum b_i^2 = \infty$ 이거나 $\sum c_i^2 = \infty$ 이라면 어떤 實數 c 가 存在하여 $\sum_i Var(X_i^{(c)}) = \infty$ 이 된다. 여기에서 $X_i^{(c)} = X_i I_{[|X_i| \leq c]}$ 이다. 그러면 Three Series Theorem (Billingsley (1986), <定理 22.8>)에 의하여 $P(A) > 0$ 이다. 따라서 $P(A) = 1$ 이다.

2. <定理 2>의 證明

式 (14)의 右邊을 구하기 위한 演算過程은 생략하고 有限性만을 證明하기로 한다. 이를 위해서, 無限數列 $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$ 가 수렴하기 위해서는 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - 1| < \infty$ 이면 된다는 사실을 이용하기로 한다. 이 사실은 다음과 같은 관계로부터 도출된다: $\log |x_i| \leq |x_i| - 1 \leq |x_i - 1|$.

이제 양(+)의 數 ϵ 을 固定시킨다. 그러면 $\sum b_i^2 < \infty$ 이고 $\sum c_i^2 < \infty$ 이므로 어떤 數 N 이 존재하여 모든 $i (\geq N)$ 에 대하여 $|b_i| < \epsilon$ 이고 $|c_i| < \epsilon$ 인 관계가 성립한다. 이제 x_i 를 式 (14)의 i 번째 項이라고 정의한 후에 아래에서는 $\sum_{i=N}^{\infty} |x_i - 1| < \infty$ 임을 보이고자 한다. 이것은 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - 1| < \infty$ 이라는 사실과 더불어 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - 1| < \infty$ 임을 의미한다. 먼저 다음과 같이 $S(b, c)$ 를 정의한다.

$$S(b, c) = \phi((b+c)d) \exp\left[\frac{1}{2}(b+c)^2 d^2 - bd\sqrt{2/\pi}\right] + \phi((b-c)d) \exp\left[\frac{1}{2}(b-c)^2 d^2 - bd\sqrt{2/\pi}\right] \dots\dots\dots (ii)$$

여기에서 $|b| < |\epsilon|$ 이고 $|c| < \epsilon$ 이다. 그러면

$$S(0,0) = 1, \quad \frac{\partial S(0,0)}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S(0,0)}{\partial c} = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

이다. 또한 만일 \bar{b} 가 0과 b 사이에 있고 \bar{c} 가 0과 c 사이에 있어서 $|\bar{b}| < \epsilon$ 이고 $|\bar{c}| < \epsilon$ 이라면, ϵ 과 d 에만 의존하는 常數 B, C, D 가 존재하여

$$\left| \frac{\partial^2 S(\bar{b}, \bar{c})}{\partial b^2} \right| \leq 2B, \quad \left| \frac{\partial^2 S(\bar{b}, \bar{c})}{\partial b \partial c} \right| \leq C, \quad \left| \frac{\partial^2 S(\bar{b}, \bar{c})}{\partial c^2} \right| \leq 2D \dots\dots\dots (iv)$$

가 된다. 이제 $S(b, c) - 1$ 를 Taylor series 에 따라 $(0, 0)$ 에서 擴張하고 절대값을 취하면

$$|S(b, c) - 1| = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(b, c)}{\partial b^2} b^2 + \frac{\partial^2 S(\bar{b}, \bar{c})}{\partial b \partial c} bc + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\bar{b}, \bar{c})}{\partial c^2} c^2 \right| \leq Bb^2 + C|bc| + Dc^2 \dots\dots\dots (v)$$

이다. 따라서

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i - 1| = \sum_{i=N}^{\infty} |S(b_i, c_i) - 1| \leq B \sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 + C \sum_{i=N}^{\infty} |b_i c_i| + D \sum_{i=N}^{\infty} c_i^2 \leq B \sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 + C \left(\sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2 \right)^{1/2} + D \sum_{i=N}^{\infty} c_i^2 < \infty \dots\dots\dots (vi)$$

이다. 式 (vi)에서 둘째 不等式은 「슈바르츠」不等式으로부터 도출된다.