Journal of the KSQC
Vol.21, No.2, Dec 1993

1993년 12월 韓國品質管理學會誌 제21권 제2호

순서대립가설에 대한 회귀직선 평행성 검정에 관한 연구+

A Study on Tests for the Parallelism of Regression Lines Against Ordered Alternatives

송 문 섭*
조 신 섭*
이 재 준**
신 봉 섭***

ABSTRACT

For the problem of testing the parallelism of several regression lines against ordered alternatives, two test statistics are proposed and examined. The proposed statistics are linear combinations of robust estimators of slope parameters, which are modifications of the Adichie (1976) test based on scores. The asymptotic null variances of the proposed statistics are estimated by the kernel density estimation methods. The proposed tests are compared with the Adichie's test in terms of asymptotic relative efficiency and small-sample powers.

+ 이 연구는 1992년도 교육부 기초과학 육성 연구비 (BSRI-92-108) 지원에 의한 것임
* 서울대학교 계산통계학과 교수
** 인하대학교 통계학과 교수
*** 서울대학교 대학원 계산통계학과 박사과정

1. 서 론

우리가 다루고자 하는 회귀직선 모형은 다음과 같다.

$$Y_{ij}=\alpha_i+\beta_i x_{ij}+\varepsilon_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,k\ ;\ j=1,2,\cdots\ n_i.$$

여기서 ε_{ij}는 오차항으로 서로 독립이고 연속인 분포함수 F를 갖는 확률변수이다. 그리고 x_{ij}는 기지의 상수이며, α_i와 β_i는 각각 절편과 기울기를 나타내는 미지의 모수이다.

본 논문에서는 다음과 같은 순서대립가설의 검정문제에 관심이 있다.

$$\text{귀무가설 } H_0: \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_k=\beta,$$
$$\text{대립가설 } H_1: \beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_k\,(\beta_1<\beta_k).$$

예를들어 여러 생산라인에서 생산되는 플라스틱 제품에 대하여 원료의 순도와 수율의 관계를 회귀모형으로 분석하고자 할 때, 최근에 설치된 라인에서의 제품일수록 수율의 증가율이 크다고 할 수 있는지를 검정하는 문제는 회귀모수의 순서대립가설로 설명할 수 있다.

이에 관한 검정법으로 Hollander (1970), Potthoff (1974), Adichie (1976), Rao and Gore (1984) 등이 제안한 방법들이 대표적이다. Hollander (1970)는 $k=2$이고 $n_1=n_2=2n$일때, 서로 다른 관측값의 쌍으로부터 n개의 독립적인 기울기 추정량을 얻어서 이를 이용한 분포무관 검정법을 제안하였다. 또한 Potthoff (1974)도 $k=2$인 경우에 각 직선에서 $\binom{n_1}{2}$개와 $\binom{n_2}{2}$개의 기울기 추정량을 만들고, 여기에 Mann-Whitney 형태의 통계량을 적용시키는 검정법을 제안하였다. 이는 자료로부터의 정보를 충분히 이용한다는 장점을 갖고 있는 반면에 통계량의 분산이 모집단의 분포에 의존하게 되어 H_0하에서의 정확한 분산을 알 수 없으며, 따라서 Potthoff는 분산의 상한을 이용하여 표준화 시킨 통계량을 사용하였고 결과적으로 매우 보수적(conservative)인 검정법이 된다. Adichie (1976)는 $k>2$인 경우에 모수적 검정인 우도비검정 (LRT)과 함께 최우추정량 (MLE)의 선형결합으로 정의된 점수통계량(scores statistics)에 기초한 검정법을 제안하고, 이들 모수적 검정법에 대응되는 비모수적 방법도 제안하였다. 한편 Rao and Gore (1984)는 각 직선에서의 표본수가 모두 같고 실험점이 모두 등간격인 특별한 경우에 분포무관인 검정법을 제안하였으나, 그 효율이 크게 떨어지는 단점이 있다.

본 논문에서는 특히 Adichie의 점수 통계량을 수정하고자 한다. 그 이유는 점수의 선택이나 기울기 추정량의 선택에 따라 좀더 보완된 검정법을 얻을 수 있기 때문이다. 따라서 다음 절에서는 Adichie의 점수 통계량에 대하여 살펴보고, 3절에서는 이를 수정한 통계량을 제안하고, 제안된 통계량의 극한분포와 점근성질을 알아보겠다. 마지막으로, 4절에서는 제안된 검정법과 기존의 검정법을 소표본에서 비교하였다. 즉, 컴퓨터 모의실험을 통하여 본 논문에서 논의된 검정법들의 경험적 유의수준과 검정력을 비교하였다.

2. Adichie의 점수 통계량

우선 편의를 위해 다음과 같은 몇가지 기호를 약속한다.

$$\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}/n_i,\qquad \bar{Y}_i=\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}/n_i,$$

$$w_i^2=\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2,\quad W^2=\sum_{i=1}^{k}w_i^2,$$
$$\gamma_i=w_i^2/W^2,\qquad N=\sum_{i=1}^{k}n_i.$$

오차항의 분포 F가 정규분포 $N(0,\ \sigma^2)$에 따를 때, Adichie가 제안한 점수 통계량은 다음과 같다.

$$S=\sum_{i=1}^{k}C_i\overline{\beta}_i,\ \ (\sum_{i=1}^{k}C_i=0),\ \cdots\cdots\cdots(2.1)$$

여기서 C_i는 점수로서 비감소이고, $\overline{\beta}_i$는 β_i의 MLE이다.

만약 σ^2이 기지이고 $\beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_k$가 주어진 상수라면, S의 검정력은 다음과 같다.

$$\Phi(\sum_{i=1}^{k}C_i\beta_i/\sigma\sqrt{\sum_i(C_i^2/w_i^2)}-z_\alpha)$$
$$=\Phi(\gamma\triangle/\sigma-z_\alpha),\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

여기서 $\triangle$와 γ는 다음과 같이 정의된다.

$$\triangle^2=\sum_{i=1}^{k}w_i^2(\beta_i-\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\beta_j)^2,$$
$$\gamma=\sum_{i=1}^{k}C_i\beta_i/\triangle\sqrt{\sum_i C_i^2/w_i^2}.$$

Adichie는 $\beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_k$가 주어졌을 때 (2.2)의 검정력을 최대로 하는 점수 C_i가 다음과 같음을 보였다.

$$C_i=w_i^2(\beta_i-\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\beta_j)\ .\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

그러나 순서대립가설 H_1의 β_i는 일반적으로 미지이므로, (2.3)의 최적점수를 이용할 수 없고 단지 β_i들의 순서만 사용이 가능하다. 따라서 Adichie는 다음과 같은 비감소열 B_i를 제안하였다.

$$B_i=w_1^2+w_2^2+\cdots+w_{i-1}^2+(w_i^2/2)\ .\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

(2.4)의 B_i를 (2.3)의 β_i대신 사용하면 (2.3)의 최적점수 C_i는 다음과 같다.

$$C_i=w_i^2(B_i-\sum_{j=1}^{k}\gamma_jB_j)\ .\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

만약 σ^2이 미지이면 (2.1)의 통계량 S대신 자유도 $(N-2k)$인 t-분포를 따르는 다음의 통계량 S_t가 이용된다.

$$S_t=S/\hat{\sigma}\sqrt{\sum_i(C_i^2/w_i^2)}\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

여기서 $\hat{\sigma}^2$은 σ^2의 추정치로 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\{Y_{ij}-\overline{Y}_i-\overline{\beta}_i(x_{ij}-\overline{x}_i)\}^2/(N-2k)$$

S에 대응되는 비모수적 검정으로 Adichie는 다음의 순위통계량을 제안하였다.

$$S_R=\sum_{i=1}^{k}C_i\hat{\beta}_i^*\quad(\sum_{i=1}^{k}C_i=0),\ \cdots\cdots\cdots(2.7)$$

여기서

$$\hat{\beta}_i^*=\left\{\sum_j(x_{ij}-\overline{x}_i)R_{ij}^*/(n_i+1)\right\}/w_i^2,$$
$$i=1,2,\cdots,\ k,$$

이고 R^*_{ij}는 i번째 직선에서 j번째 잔차 $Y_{ij} - \hat{\beta}(x_{ij} - \overline{x_i})$의 순위를 나타내며, $\hat{\beta}$는 H_0하의 공통 기울기 β의 Hodges-Lehmann (HL) 형태 추정량이다.

3. 제안된 통계량과 그 성질들

이 절에서는 (2.1)의 통계량 S에서 기울기의 최우추정량 $\overline{\beta_i}$ 대신에 로버스트 추정량을 사용하여 수정된 통계량을 제안하고자 한다. 기울기 β_i의 로버스트 추정량으로는 HL 형태인 Sievers (1978)의 추정량과 L_1-추정량을 들 수 있다. 전자는 직선 i, $(i=1,2\cdots,k)$에서의 기울기들 $S_{iuv}=(Y_{iv}-Y_{iu})/(x_{iv}-x_{iu})$, $(x_{iu}<x_{iv})$에 $a_{iuv}/\sum_{u<v} a_{iuv}$의 확률을 부여한 확률분포의 중앙값으로 표현되며, 후자는

$$\sum_{j=1}^{n_i} |Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_{ij}| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

를 최소로하는 α_i와 β_i의 값을 추정량으로 선택하는 것이다.

이제 우리는 Adichie (1976)의 점수에 기초한 검정법 (2.1)에서 β_i의 MLE $\overline{\beta_i}$대신 HL-추정량인 $\hat{\beta}_i$과 L_1-추정량인 $\tilde{\beta}_i$를 이용한 검정법을 제안하고자 한다. 즉 본 논문에서 제안된 검정통계량은 다음과 같다.

$$H = \sum_{i=1}^{k} C_i \hat{\beta}_i, \quad (\sum_{i=1}^{k} C_i = 0), \quad \cdots\cdots\cdots (3.2)$$

$$L = \sum_{i=1}^{k} C_i \tilde{\beta}_i, \quad (\sum_{i=1}^{k} C_i = 0). \quad \cdots\cdots\cdots (3.3)$$

순서대립가설 H_1하에서는 H나 L의 값이 클 것을 기대할 수 있으며, 따라서 검정통계량 H나 L의 값이 클 때 귀무가설 H_0를 기각한다. 이제 H와 L의 점근성질을 알아보자.

우선 H의 극한분포를 구하기 위해 $A_{ij} = \sum_{s=1}^{j-1} a_{isj} - \sum_{t=j+1}^{n_i} a_{ijt}$라 하고 다음을 가정하자.

$\min_{1\le i\le k} n_i \to \infty$일때

가정 1 : $\sum_j A_{ij}^2 / \max_{1\le j\le n_i} A_{ij}^2 \to \infty$,

가정 2 : $\sum_{s<t} a_{ist}^2 / \sum_j A_{ij}^2 \to 0$,

가정 3 : $\max_{1\le j\le n_i} (x_{ij} - \overline{x_i})^2 / n_i \to 0$,

가정 4 : $\sum_j (x_{ij} - \overline{x_i})^2 / n_i \to \sigma_{ix}^2$,

$$0 < \sigma_{ix}^2 < \infty,$$

가정 5 : $\sum_j A_{ij}(x_{ij} - \overline{x_i}) / \sqrt{\sum_j A_{ij}^2 \cdot \sum_j (x_{ij} - \overline{x_i})^2} \to \rho_i \neq 0$.

Sievers (1978)의 정리 5로부터 H의 점근분포에 관한 다음의 정리를 얻는다.

정리 3.1 f가 절대연속이고 $\int (f'/f)^2 f dx < \infty$이며, Y_{i1}, Y_{i2}, $\cdots$, Y_{in_i}의 결합 확률밀도함수가 $\prod_{j=1}^{ni} f(y_{ij} + \theta_i x_{ij} / \sqrt{n_i})$, $i=1,\cdots,k$라 하고 가정 1에서 가정 5까지가 성립하면, $H = \sum_{i=1}^{k} C_i \hat{\beta}_i$는 평균이 $\sum_i C_i \beta_i$이고 분산이

$$\sum_{i=1}^{k} C_i^2 \Big/ \left\{ 12 n_i \rho_i^2 \sigma_{ix}^2 (\int f^2 dx)^2 \right\} \quad \cdots\cdots (3.4)$$

인 점근정규분포를 따른다.

참고 ρ_i는 x_{ij}와 $A_{ij}(j=1,\cdots,n_i)$의 점근상관계수이다. (3.4)의 점근분산은 $\rho_i = \pm 1$일 때 최소가 되는데 이는 최적가중치 $a_{iuv} = x_{iv}$

$-x_{iu}$를 사용할 때 얻어진다.

다음의 정리 3.2는 L의 점근정규성에 관한 것으로 Bassett and Koenker (1978)의 결과로부터 얻을 수 있다.

정리 3.2 가정 4를 가정하고 $\tilde{\beta}_i(i=1,\cdots,k)$가 (3.1)을 최소화시키는 유일한 해들이고, F가 연속이며 0에서 양인 확률밀도함수 f를 갖는다고 하면, $L=\sum_{i=1}^{k}C_i\tilde{\beta}_i$는 평균이 $\sum_{i=1}^{k}C_i\beta_i$이고 분산이

$$\sum_{i=1}^{k}C_i^2/\{4f^2(0)\,n_i\sigma_{ix}^2\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.5)$$

인 점근정규분포를 따른다.

이제 Adichie의 통계량 S_t에 대하여 제안된 통계량 H나 L의 점근상대효율 (ARE)을 알아보자. 정리 3.1과 정리 3.2로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$ARE(H,\ S_t)=12\sigma^2\left(\int f^2dx\right)^2,\quad(3.6)$$

$$ARE(L,\ S_t)=4\sigma^2f^2(0).\ \cdots\cdots\cdots(3.7)$$

(3.6)은 Wilcoxon 검정의 t검정에 대한 점근상대효율과 같고, (3.7)은 부호검정의 t 검정에 대한 점근상대효율과 같다.

제안된 통계량 H나 L의 정규근사에 의한 기각역을 구하기 위해서는 (3.4)와 (3.5)에 있는 점근분산에서 $\theta_1=\int f^2dx$와 $\theta_2=f(0)$를 알아야만 한다. 그러나 이들이 미지이므로 혼합잔차를 이용하여 추정하는 방법을 고려해야 하는데, 잔차를 구하기 위해서는 β_i의 추정과 함께 α_i의 추정도 이루어지야 한다. L_1-추정량의 경우는 $\tilde{\alpha}_i$와 $\tilde{\beta}_i$가 동시에 구하여지며, 이를 구하는 알고리즘도 많이 개발되어 있다. (Lawrence and Arthur (1990)의 2장 참고). 특히 단순회귀의 경우는 SUBROUTINE DESL1을 사용하는 것이 바람직하다고 여겨지며, 이는 Josvanger and Sposito (1983)을 참고하면 된다. Song and Oh (1981)는 α_i의 HL-추정량으로 다음을 이용하였다.

$$\hat{\alpha}_i=\mathrm{med}_{u\le v}\frac{1}{2}\{Y_{iu}+Y_{iv}-\hat{\beta}_i(x_{iu}+x_{iv})\}.$$

이제 HL-추정량과 L_1-추정량을 이용한 혼합잔차를 각각 $\hat{e}_i$와 $\tilde{e}_i$, $(i=1,\cdots,N)$라 하고 이들을 이용하여 θ_1과 θ_2의 추정치 $\hat{\theta}_1$와 $\hat{\theta}_2$를 구하는 과정을 살펴보자. Sposito and Tveite (1986)는 잔차의 순서통계량을 이용하여 θ_2를 추정하는 방법을 제안하였으나, 모의실험을 해본 결과 표본의 수가 적은 경우는 불안정하여 실제로 사용하기에는 불가능하였다.

본 논문에서는 θ_1을 추정하기 위하여는 Hall and Marron (1987)이 제안한 커널추정법을, θ_2를 추정하기 위하여는 일반적인 커널밀도추정을 각각 이용하였다. 즉

$$\hat{\theta}_1=\sum_{i\neq j}^{N}K_h(\hat{e}_i-\hat{e}_j)/N(N-1),\quad(3.8)$$

$$\hat{\theta}_2=\sum_{i=1}^{N}K_h(-\tilde{e}_i)/N,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

여기서 K는 커널, h는 띠폭(bandwidth)을 나타내며 $K_h(\cdot)=(1/h)K(\cdot/h)$이다. 커널 추정법에서 K의 선택보다는 h의 선택이 더 중요하다고 알려져 있다. 따라서 K는 가우시안

커넬(표준정규 분포의 확률밀도함수)를 사용하고, h를 선택하는 판단기준에는 여러 가지가 있으나(Härdle (1991) 참고), 실제로 사용하기 편한 다음의 방법을 사용 하였다. (Härdle (1991)의 4장 참고)

$$h=1.06\cdot\min(\hat{\sigma},\ \frac{Q}{1.34})N^{-\frac{1}{5}},$$

여기서 $\hat{\sigma}$와 Q는 각각 혼합잔차들의 표본표준편차와 사분위수범위 (interquartile range)를 나타낸다.

다음 절에서 우리는 (3.8)과 (3.9)를 이용하여 추정된 점근분산 (3.4)와 (3.5)로 각각 H와 L을 표준화한 검정통계량을 사용한다.

4. 소표본 모의실험

이 절에서는 제안된 검정법과 Adichie (1976)의 점수 통계량에 기초한 모수적 방법과 비모수적 방법을 소표본에서의 모의 실험을 통하여 비교하였다.

직선의 수 $k=4$, 각 직선의 표본수 $n=n_1=\cdots=n_4=20$으로 하고 실험점은 $x_{ij}=j$, $(j=1,\cdots,n)$로 고정하였다. 오차들의 분포로는 균일분포, 정규분포, 이중지수분포, Cauchy 분포, ε-오염정규분포 등이 고려되었다. 여기서 ε-오염정규분포는

$$F(x)=(1-\varepsilon)\Phi(x)+\varepsilon\Phi(x/\sigma)$$

로 분포함수가 주어지며, ε은 오염의 정도를 나타낸다. 또한 순서대립가설 H_1을 설계하기 위하여 다음의 관계식을 이용하였다.

$$\beta_i=\beta_0+m\delta,$$
$$(i=1,\cdots,4,\ m=0,1,2,3)\quad\cdots(4.1)$$

(4.1)에서 $m=0$이면 귀무가설을 의미한다.

각 분포에서 주어진 크기의 오차 ε_{ij}들을 IMSL의 부프로그램을 사용하여 생성하고, 모형 $Y_{ij}=\alpha_i+\beta_i x_{ij}+\varepsilon_{ij}$에 의해 Y_{ij}를 계산하여 모든 검정통계량의 값을 계산한 후 검정통계량의 값과 유의수준 5%와 10%에서의 기각값과 비교한다. 이러한 실험을 1000번 반복한 결과가 표 4.1에 수록되어 있다. 표 4.1에서 S와 S_R은 Adichie (1976)의 점수 통계량에 기초한 모수적 방법과 비모수적 방법을 나타내며, H와 L은 제안된 검정법을 나타낸다.

표 4.1의 결과를 요약하면 다음과 같다. $m=0$일 때의 검정력은 경험적 유의수준을 나타낸다. 각 검정법들이 대체로 $\pm2\times$(표준편차)의 범위 내에서 경험적 유의수준을 나타낸다. 다만 Adichie의 비모수적 방법인 S_R이 $\alpha=0.10$일 때 Cauchy 분포에서 $2\times$(표준편차)의 범위를 벗어나고 있다.

모수적 방법인 S_I는 짧은 꼬리를 갖는 균일분포와 표준형인 정규분포에서 다른 비모수적 검정법보다 높은 검정력을 나타낸다. 그러나 이중지수분포 정도의 약간 두터운 꼬리를 갖는 분포에서도 검정력이 심각하게 떨어지고 있으며, 극단적으로 두터운 꼬리를 갖는 Cauchy 분포에서는 비모수적 방법과 비교가 안될 정도의 낮은 검정력을 갖는다.

비모수적 방법들은 대체로 비슷한 결과를 나타내고 있다. 균일분포에서는 제안된 H가 Adichie의 S_R보다 약간 높은 검정력을 나타내고, 정규분포, 이중지수분포, 오염정규분포에서는 H와 S_R이 비슷하고, Cauchy분포에서는 제안된 L의 검정력이 가장 우수한 것으로 나타났다.

표 4.1 경험적 유의수준과 검정력(반복수 1000번)
($k=4,\ n_1=n_2=n_3=n_4=20$)

분포	δ	m	$\alpha=0.05$ S_t	S_R	H	L	$\alpha=0.10$ S_t	S_R	H	L
균일분포	0.015	0	.048	.050	.048	.052	.094	.094	.090	.106
		1	.262	.211	.248	.221	.387	.340	.376	.338
		2	.641	.536	.582	.530	.800	.712	.724	.702
		3	.926	.850	.852	.829	.969	.919	.923	.899
정규분포	0.05	0	.046	.040	.047	.055	.098	.107	.107	.112
		1	.252	.203	.243	.241	.361	.325	.365	.345
		2	.661	.591	.592	.590	.742	.718	.717	.707
		3	.901	.860	.855	.851	.958	.937	.908	.903
이중지수 분포	0.06	0	.058	.050	.053	.046	.101	.104	.095	.092
		1	.181	.182	.217	.183	.320	.317	.368	.309
		2	.512	.534	.559	.527	.664	.696	.694	.683
		3	.770	.799	.802	.811	.876	.889	.885	.882
오염정규 분포 ($\varepsilon=0.1$, $\sigma=5$)	0.06	0	.056	.040	.044	.055	.100	.092	.097	.106
		1	.148	.202	.211	.207	.270	.322	.323	.320
		2	.366	.447	.471	.450	.481	.602	.619	.601
		3	.561	.744	.740	.736	.675	.874	.869	.855
Cauchy 분포	0.08	0	.056	.050	.050	.055	.100	.120	.098	.095
		1	.098	.179	.176	.182	.162	.276	.291	.298
		2	.131	.398	.403	.428	.210	.548	.534	.557
		3	.228	.620	.629	.647	.309	.773	.751	.783

S_t : Adichie의 모수적 검정법 ((2.6)식)
S_R : Adichie의 비모수적 검정법 ((2.7)식)
H : HL-추정량에 기초한 제안된 검정법 ((3.2)식)
L : L_1-추정량에 기초한 제안된 검정법 ((3.3)식)

검정력의 표준편차는 0.050 또는 0.950 근방에서는 0.007, 0.100 또는 0.900 근방에서는 0.009, 0.300 또는 0.700 근방에서는 0.015이다.

參 考 文 獻

[1] Adichie, J.N.(1976). "*Testing Parallelism of Regression Lines against Ordered Alternatives*", Communications in Statistics-Theory and Methods, A5(11), 985-997.

[2] Bassett, G.,Jr., and Koenker, R.(1978). "*Asymptotic Theory of Least Absolute Error Regression*", Journal of the American Statistical Associations, 73, 618-622.

[3] Hall, P. and Marron, J.S. (1987). "*Estimation of Integrated Squared Density Derivatives*", Statistics and Probability Letters, 6, 109-115.

[4] Härdle, Q.(1991). Smoothing techniques with implementation in S. Springer-Verlag, New York.

[5] Hollander, M.(1970). "*A Distribution-Free Test for Parallelism*", Journal of the American Statistical Association, 65, 1153-1162.

[6] Josvanger, L.A., and Sposito, V.A (1983). "*L_1 Norm Estimates for The Simple Regression Problem*", Communications in Statistics-Therory and Methods, 12, 215-221.

[7] Lawrence, K.D. and Arthur, J.L. (1990). Robust Regression : Analysis and Applications, Marcel Dekker, Inc, New York.

[8] Potthoff, R.F. (1974). "*A Nonparametric Test of Whether Two Simple Regression Lines are Parallel*", The Annals of Statistics, 2,295-305.

[9] Rao, K.S.M. and Gore, A.P.(1984). "*Testing Concurrence and Parallelism of Several Sample Regresion against Ordered Alternatives*", Mathematische Operationsforshung und Statistik, Series Statistics, 15,43-50.

[10] Sievers, G.L. (1978). "*Weighted Rank Statistics for Simple Linear Regression*", Journal of the American Statistical Association, 73, 628-631.

[11] Song, M.S. and Oh, C.H.(1981). "*On a Robust Subset Selection Procedure for The Slope of Regression Equations*", Journal of the Korean Statistical Society, 10, 105-121.

[12] Sposito, V.A., and Tveite, M.D. (1986). "*On the Estimation of the Variance of the Median Used in L_1 Linear Inference Procedures*", Communications in Statistics-Theory and Methods, 15 (4), 1367-1375.