Journal of the KSQC
Vol.21, No.1, June 1993

1993년 6월 韓國品質管理學會誌 제21권 제1호

이차 변수 오차 모형의 예측분석
Prediction Analysis of the Quadratic Errors-in-Variables Model

변 재 현*
이 승 훈**

ABSTRACT

In developing a quadratic regression relationship, independent variable is frequently measured with error. In this paper the integrated mean square error of prediction is developed for a quadratic functional relationship model as a measure of the effect of measurement error of the independent variable on the predicted values. The amount of the effect of error is presented and illustrated with an example.

1. 서 론

공학이나 자연과학의 여러분야에서 변수들간의 상호관련성을 파악하기 위하여 회귀분석을 자주 하게 되는데, 이 때 독립변수에 오차가 포함되어 측정될 경우가 많다. 특히, 환경의 변

* 경상대학교 산업공학과
** 동의대학교 산업공학과

화, 취급의 부주의, 노후등으로 인하여 측정계기가 부정확하거나 생산현장에서 완벽한 제어상태로 정확한 측정을 할 수 없을 때에는 독립변수의 측정에 오차가 수반된다.

위와 같이 독립변수에 측정오차가 있을때 회귀모형을 변수오차모형(Errors-in-Variables Model, EVM)이라고 하는데, 변수오차모형은 독립변수의 참값이 고정되어 있을 때의 함수적 관계(functional relationship)와 참값이 확률변수일 때의 구조적 관계(structural relationship)로 분류된다. 본 연구는 이차함수적 관계(quadratic functional relationship)의 예측문제를 다룬다. 이차함수적 관계에 대해서는 Fuller [1], Kendall과 Stuart [2], 그리고 Wolter와 Fuller [6]가 모수추정에 관한 연구를 하였다. 하지만 이차함수적 관계의 예측에 관한 문제는 그 중요성에도 불구하고 연구가 되어 있지않다.

선형변수오차모형의 예측에 관한 기존의 연구를 살펴보면, 우선 Yum과 Neuhardt [8]는 반복이 있는 단순 변수 오차 모형(Simple EVM)에 대하여 예측의 통합 평균제곱오차(Integrated Mean Square Error of Prediction, IMSE)를 개발하고 *IMSE*의 관점에서 보통 최소제곱 추정(Ordinary Least Square Estimation) 방법과 그룹 최소제곱 추정(Grouping Least Square Estimation) 방법을 비교하였다. Yum과 Byun [7]은 다중변수오차모형(Multiple EVM)에 대한 *IMSE*를 개발하여 각 독립변수의 측정오차에 따른 *IMSE*의 상대적 크기를 예제를 통하여 비교하였으나 예측시 각각의 측정오차가 예측의 정확성에 미치는 기준은 개발하지 못했다. 최근에 변재현 [9]은 다중변수오차모형에서 예측시 각 독립변수의 오차가 예측의 정확성에 미치는 영향을 평가하기 위한 기준을 개발하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 2절에서는 이차변수오차모형의 추정과 예측을 위한 모형을 소개하였고, 3절에서는 평균제곱오차로 부터 통합평균제곱오차의 형태 및 이것의 추정치를 구하는 방법이 제시되었다. 예측시에 독립변수의 측정오차가 예측의 정확성에 미치는 영향의 정도는 4절에서 예제와 함께 밝혀진다.

2. 추정과 예측에 관한 모형

이차회귀모형에서 얻은 n개의 표본은 다음과 같이 표현된다.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t^2 + q_t, \quad t = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.1)$$

여기서 Y_t는 종속변수, β_0, β_1, β_2는 미지의 모수, h_t는 독립변수, 그리고 q_t는 실험에 고유한 변동이다. 그런데 독립변수가 오차를 수반하는 경우에 우리가 관측하는 값은 h_t가 아니고

$$H_t = h_t + r_t \quad t = 1, 2, \cdots, n \quad \cdots (2.2)$$

이다. 여기서 r_t는 독립변수의 측정오차이다. q_t와 r_t는 다음과 같은 분포를 따른다고 가정한다.

$$\begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} \sim NID\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} \end{bmatrix}\right\} \qquad (2.3)$$

여기서 NID는 정규분포를 따르며 서로 독립임 (distributed normally and independently)을 뜻한다. 그리고 h_t는 고정된 값이기 때문에 임의의 j, t에 대해서 (q_j, r_j)는 h_t와 서로 독립이다. 그런데

$$H_t^2 - h_2^t = 2h_t r_t + r_2^t$$

이고 h_t는 고정된 값이므로

$$E\{2h_t r_t + r_t^2\} = \sigma_{rr}$$

$$V\{2h_t r_t + r_t^2\} = 4h_t^2\sigma_{rr} + 2\sigma_{rr}^2$$

가 된다. 이제

$$X_t = (1, H_t, H_t^2 - \sigma_{rr}) = x_t + u_t,$$

$$x_t = (1, h_t, h_t^2)$$

$$u_t = (0, r_t, 2h_t r_t + r_t^2 - \sigma_{rr})$$

이라고 하면 식(2.1)과 (2.2)는 다음과 같이 익숙한 식으로 표현된다.

$$Y_t = x_t\beta + q_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

$$X_t = x_t + u_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

여기서 $E(r_t) = 0$, $Var(r_t) = \sigma_{rr}$ 이므로 $E(u_t) = 0$,

$$\Omega_{u(t)} = Cov(u_t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} & 2h_t\sigma_{rr} \\ 0 & 2h_t\sigma_{rr} & 4h_t^2\sigma_{rr} + 2\sigma_{rr}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

모수 β의 추정을 위하여 σ_{rr}은 안다고 (known) 가정하고, 다음과 같은 벡터와 행렬을 우선 정의한다.

$$Z_t = (Y_t, X_t)$$

$$M = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Z_t' Z_t = \begin{bmatrix} M_{YY} & M_{YX} \\ M_{XY} & M_{XX} \end{bmatrix}$$

$$M_{XX} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t$$

$$M_{XY} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t' Y_t$$

$$m_{xx} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} x_t' x_t$$

$$\varepsilon_t = (q_t, u_t)$$

$$\Omega_t = E(\varepsilon_t' \varepsilon_t) = \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \Omega_{u(t)} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_u = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \Omega_{u(t)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} & 2\bar{h}\sigma_{rr} \\ 0 & 2\bar{h}\sigma_{rr} & 4\bar{h}^2\sigma_{rr} + 2\sigma_{rr}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \Omega_t = \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \Omega_u \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_{u(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} & 2H_t\sigma_{rr} \\ 0 & 2H_t\sigma_{rr} & 4H_t^2\sigma_{rr} - 2\sigma_{rr}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \hat{\Omega}_{u(t)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Omega} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \hat{\Omega}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \hat{\Omega}_u \end{bmatrix}$$

여기서

$$\hat{\Omega}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{rr} & 2\bar{H}\sigma_{rr} \\ 0 & 2\bar{H}\sigma_{rr} & 4M_{HH}\sigma_{rr} - 2\sigma_{rr}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} H_t$$

$$M_{HH} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} H_t^2$$

이와 같은 벡터와 행렬을 이용하면 β에 대한 추정치 b는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$b = (M_{XX} - \alpha\hat{\Omega}_u)^{-1} M_{XY} \quad \cdots\cdots\cdots (2.6)$$

여기서 α는 행렬식 (determinantal equation)

$$|M - \alpha\hat{\Omega}|$$

의 근(root) 중 최소값이다(Wolter와 Fuller [6]). 식(2.6)의 추정치 b는 β에 대한 불편추정량(unbiased estimator)이다.

지금까지 모형과 모수의 추정방법에 대해 살펴 보았는데, 이제 예측을 위한 모형에 관하여 살펴보자. 미래의 종속변수와 독립변수의 참값 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다고 하자. (식(2.1) 참조)

$$Y_f = \beta_0 + \beta_1 h_f + \beta_2 h_f^2 + q_f \quad \cdots (2.7)$$

그리고 h_f를 측정함에 있어서 추정실험에서와 마찬가지로 다음과 같이 측정오차 r_f가 수반되어 H_f가 얻어진다고 가정한다.

$$H_f = h_f + r_f \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.8)$$

q_f와 r_f는 다음과 같은 분포를 따른다고 가정한다.

$$\begin{pmatrix} q_f \\ r_f \end{pmatrix} \sim NID \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{qq} & 0 \\ 0 & \sigma_{ff} \end{bmatrix} \right\}$$

여기서 r_f의 분산 σ_{ff}는 추정실험에서의 분산 σ_{rr}과는 일반적으로 다르다는 것에 주의할 필요가 있다. 식(2.7)과 (2.8)을 익숙한 식으로 표현하면

$$Y_f = x_f\beta + q_f \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

$$X_f = x_f + u_f \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

여기서

$$X_f = (1, H_f, H_f^2 - \sigma_{ff}) = x_f + u_f,$$
$$x_f = (1, h_f, h_f^2)$$
$$u_f = (0, r_f, 2h_f r_f + r_f^2 - \sigma_{ff})$$

이고, $E(r_f) = 0$, $Var(r_f) = \sigma_{ff}$ 이므로 $E(u_f) = 0$,

$$\Omega_{u(f)} = Cov(u_f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ff} & 2h_f\sigma_{ff} \\ 0 & 2h_f\sigma_{ff} & 4h_f^2\sigma_{ff} + 2\sigma_{ff}^2 \end{bmatrix}$$

이다.

식(2.9)로 부터 Y_f의 최선의 예측시는 $x_f\beta$ 이나 x_f와 β는 알 수 없으므로

$$\hat{Y}_f = X_f b \quad \cdots\cdots (2.11)$$

를 Y_f의 예측치로 삼는다.

3. 예측의 통합평균제곱오차

식(2.11)의 $\hat{Y}_f$가 Y_f에 얼마나 가까운가를 나타내는 척도로서 평균제곱오차(mean square error, MSE)를 고려한다. 또한, 미래의 예측치들이 여러개 있을 때 그들의 평균적 행태를 나타내는 척도로서 소위 통합평균제곱오차 $IMSE$를 채택하고자 한다.

$IMSE$를 구하기 전에 우선 x_f에 대한 $\hat{Y}_f$의 조건부 MSE를 구해보면

$$MSE(\hat{Y}_f \mid x_f) = E\{(\hat{Y}_f - Y_f)^2 \mid x_f\} \quad \cdots\cdots (3.1)$$

가 된다. x_f에 대한 조건부 MSE의 기대값을 취하면 $\hat{Y}_f$의 평균제곱오차를 얻을 수 있는데, 그 전에 식(2.6)으로 구한 β의 추정량 b의 공분산행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$V = Cov(b)$$

Seber [5]의 Theorem 1.7을 이용하여 수식을 정리하면, $\hat{Y}_f$의 평균제곱오차는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{Y}_f) &= E[MSE(\hat{Y}_f \mid x_f)] \\ &= tr[(V + \beta\beta')\Omega_{u(f)}] \\ &\quad + x_f' V x_f + \sigma_{qq} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (3.2)$$

예측이 어떤 R이라는 흥미영역(Region of Interest)에서 이루어진다면, 우리는 예측치들의 "평균적" 행태에 관심을 갖게 된다. 독립변수의 측정오차가 예측에 미치는 영향에 대한 척도로서 $IMSE$를 다음과 같이 정의한다.

$$IMSE = \int_{+R} MSE(\hat{Y}_f) w(x_f) dx_f . \quad \cdots\cdots (3.3)$$

여기서 가중함수(weight function) $w(x_f)$는 x_f들의 상대적 중요성(예를 들어, 각 x_f값을 갖는 점들이 출현할 빈도)를 나타내며 다음을 만족한다.

$$\int_R w(x_f) dx_f = 1. \quad \cdots\cdots (3.4)$$

그리고 다음과 같이 x_f의 2차 모멘트가 존재한다고 가정한다.

$$\int_R x_f' x_f w(x_f) dx_f = m_{ff} . \quad \cdots\cdots (3.5)$$

식(3.2)에서 x_f외에도 $\Omega_{u(f)}$가 x_f의 요소인 h_f를 포함하므로 식(3.2)-(3.5)를 조합하면 다음과 같이 $IMSE$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} IMSE &= tr[(V + \beta\beta')\bar{\Omega}_{u(f)}] \\ &\quad + tr(V \cdot m_{ff}) + \sigma_{qq} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (3.6)$$

여기서

$$\bar{\Omega}_{u(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ff} & 2\bar{h}_f\sigma_{ff} \\ 0 & 2\bar{h}_f\sigma_{ff} & 4\bar{h}_f^2\sigma_{ff} + 2\sigma_{ff}^2 \end{bmatrix}$$

이고, $\bar{h}_f$는 m_{ff}의 (1, 2)번째 요소이며, $\bar{h}_f^2$는 m_{ff}의 (2, 2)번째 요소로서 각각 다음과 같다.

$$\bar{h}_f = \int_R h_f w(x_f)dx_f.$$

$$\overline{h_f^2} = \int_R h_f^2 w(x_f)dx_f.$$

만약에 예측시에 독립변수의 측정오차가 없다면, 식(3.6)에서 $\Omega_{u(f)}$는 0행렬이므로 *IMSE*는 다음과 같이 표현된다.

$$IMSE_0 = tr(V \cdot m_{ff}) + \sigma_{qq} \quad \cdots\cdots (3.7)$$

IMSE의 추정을 위해서는 식(3.6)의 미지의 값들을 추정해야 하는데, 우선 식(2.6)으로 주어진 b의 공분산 행렬을 구하기 위하여 몇 개의 벡터와 행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_0 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3.8)$$

$$\psi_t = X_t'(q_t - u_t\beta) + (\theta'\Omega\theta)^{-1}\{(q_t - u_t\beta)^2 - (\theta'\hat{\Omega}_t\theta)\}\,\Omega_u\beta + \hat{\Omega}_{u(t)}\beta \quad \cdots\cdots (3.9)$$

$$G = \lim_{n\to\infty} n^{-1}E(\sum_{t=1}^{n}\Psi_t\Psi_t') \quad \cdots\cdots (3.10)$$

$$\bar{m}_{xx} = \lim_{n\to\infty} m_{xx} \quad \cdots\cdots (3.11)$$

b의 공분산행렬 V는 Wolter와 Fuller [6]의 결과를 수정, 정리하면 다음과 같이 근사적으로 구해진다.

$$V \simeq n^{-1}\bar{m}_{xx}^{-1}G\bar{m}_{xx}^{-1} \quad \cdots\cdots (3.12)$$

식 (3.8)−(3.12)의 모수의 추정을 위해서, 우선 β는 b, θ는 $\hat{\theta} = (1, -b')'$, Ω_u는 $\hat{\Omega}_u$, Ω는 $\hat{\Omega}$로 추정되고, $x_t = X_t - u_t$이며 식(2.3)으로 부터

$$Y_t = (X_t - u_t)\beta + q_t$$

이므로 $q_t - u_t\beta$는 $Y_t - X_t b$로 추정된다. 이러한 추정치를 이용하면 식(3.9)의 Ψ_t는 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{\Psi}_t = X_t'(Y_t - X_t b) + (\hat{\theta}'\hat{\Omega}\hat{\theta})^{-1}\{(Y_t - X_t b)^2 - (\hat{\theta}'\hat{\Omega}_t\hat{\theta})\}\hat{\Omega}_u b + \hat{\Omega}_{u(t)} b$$

그리고 G는 다음식의 $\hat{G}$로 추정된다 (Wolter와 Fuller [6]).

$$\hat{G} = (n-3)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\Psi}_t\hat{\Psi}_t'$$

$\bar{m}_{xx}$는 다음과 같이 $\hat{m}_{xx}$로 추정된다.

$$\hat{m}_{xx} = (M_{xx} - \alpha\hat{\Omega}_u)^{-1}$$

결국 V의 추정치는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{V} = n^{-1}\hat{m}_{xx}^{-1}\hat{G}\hat{m}_{xx}^{-1}$$

식(3.6)의 $\bar{\Omega}_{u(f)}$가 알려지지 않은 경우에는 실험을 통하여 이를 추정하여야 하며, m_{ff}는 미래에 관심있는 영역에서 식(3.5)를 이용하여 추정되어야 한다.

4. 예측시 측정오차의 영향

3절에서 구한 *IMSE*는 독립변수의 오차가 예측의 정확성에 전체적으로 어느 만큼 영향을 미치는가를 나타낸다. 이제 예측시 독립변수의 측정오차가 *IMSE*의 증가에 어느 만큼 영향을 주는지 알아보기로 한다. 식(3.6)과 (3.7)로 부터 예측시 독립변수의 측정오차는 IMSE를 다음의 양만큼 증가시킨다.

$$IMSE - IMSE_0 = tr[(V+\beta\beta')\bar{\Omega}_{u(f)}] \quad \cdots\cdots (4.1)$$

이제 V_{ij}를 V의 (i, j)번째 요소라고 하면,

$$(V+\beta\beta')\bar{\Omega}_{u(f)} = \begin{bmatrix} V_{00}+\beta_0^2 & V_{01}+\beta_0\beta_1 & V_{02}+\beta_0\beta_1 \\ V_{01}+\beta_0\beta_1 & V_{11}+\beta_1^2 & V_{12}+\beta_1\beta_2 \\ V_{02}+\beta_0\beta_2 & V_{12}+\beta_1\beta_2 & V_{22}+\beta_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ff} & 2\bar{h}_f\sigma_{ff} \\ 0 & 2\bar{h}_f\sigma_{ff} & 4\bar{h}_f^2\sigma_{ff}+2\sigma_{ff}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (4.2)$$

식(4.2)의 결과로 나온 행렬의 trace를 구하여 정리하면 다음과 같다.

$$\{(V_{11}+\beta_1^2)+4(V_{12}+\beta_1\beta_2)\bar{h}_f+4(V_{22}+\beta_2^2)\bar{h}_f^2\}\sigma_{ff}+2(V_{22}+\beta_2^2)\sigma_{ff}^2 \quad \cdots\cdots (4.3)$$

즉, 예측시 독립변수 측정오차는 식(4.3)의 양만큼 *IMSE*를 증가시킨다. 식(4.3)에서 V는 $\hat{V}$, β는 $\hat{\beta}$으로 추정된다.

이제 예측시 독립변수의 측정오차가 *IMSE*에 미치는 영향의 정도를 예를 통하여 알아보고, 전산실험을 하여 예측시 측정오차 크기 σ_{ff}의 여러가지 값에 대한 *IMSE*의 변화를 관찰한다. 본 예에서는 모수의 값이 주어진 상태에서 *IMSE*가 σ_{ff}에 어느 만큼 민감한가를 보이는데 관심이 있다. 종이를 만드는데 있어서 목재(hardwood)의 함량이 종이의 인장강도(tensile strength)에 미치는 영향이 이차 관계로 나타나고, 추정을 위한 실험에 선택된 값은 표 1과 같다고 하자 (Montgomery와 Peck [3]). 모수의 값은 $\beta_0 = -6.696$, $\beta_1 = 11.770$, $\beta_2 = -0.635$, 그리고 $\sigma_{qq} = 20.00$이라고 한다 (Montgomery와 Peck [3], pp. 185-186). 추정시 측정오차의 크기 $\sigma_{rr} = 1.0$으로 가정한다.

미래의 예측을 위한 흥미영역이 표 2와 같고 각 점에서 $w(x_f)$가 일정하다면, 독립변수의 참값의 2차 모멘트행렬 M은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 105.25 \\ 10 & 105.25 & 1157.5 \\ 105.25 & 1157.5 & 13198 \end{bmatrix}$$

이와같은 모수 및 데이터를 이용하여 *SAS*/*IML* 프로그램을 작성하여 예측시 측정오차 σ_{ff}의 여러가지 값에 대한 전산실험을 수행하였다. 표 3에는 σ_{ff}값의 변화에 따른

$$\Delta = 100 \cdot (IMSE - IMSE_0) / IMSE_0 \quad \cdots\cdots (4.4)$$

의 값을 나타내었다.

표 1. 목재의 함량과 종이의 인장강도에 대한 데이터

h_i, 목재의 함량(%)	y_i, 인장강도(Psi)
1	6.3
1.5	11.1
2	20.0
3	24.0
4	26.1
4.5	30.0
5	33.8
5.5	34.0
6	38.1
6.5	39.9
7	42.0
8	46.1
9	53.1
10	52.0
11	52.5
12	48.0
13	42.8
14	27.8
15	21.9

5. 결 론

본 연구는 이차 회귀 분석(quadratic regression analysis)에서 독립변수에 측정오차가 있을 때, 추정된 회귀관계식을 이용한 예측시 독립변수의 측정오차가 예측치들의 정확성에 미치는 영향을 분석 평가하는데에 목적이 있다. 이차적 함수관계(quadratic functional relationship)인 경우에 예측시 측정오차가 예측치들의 정확성에 미치는 영향을 나타내는 척도인 통합평균제곱오차 *IMSE*를 개발하였고, 측정오차가 예측치의 정확성에 미치는 영향의 크기를 식(4.3)으로 제시하였다.

표 2. 예측을 위한 흥미영역

1	h_f	h_f^2
1	6.5	42.25
1	7.5	56.25
1	8.5	72.25
1	9.5	90.25
1	10.5	110.25
1	11.5	132.25
1	12.5	156.25
1	13.5	182.25

표 3. 종이의 인장강도 예제에 대한 *IMSE*의 증가 퍼센트

σ_{ff}	*IMSE* 증가퍼센트
1.0	31.25
0.9	28.87
0.8	26.36
0.7	23.71
0.6	20.90
0.5	17.93
0.4	14.77
0.3	11.42
0.2	7.85
0.1	4.06
0	0

參 考 文 獻

1. Fuller,W. A. (1987), Measurement Error Models, John Wiley & Sons, New York.
2. Kendall, M. G. and Stuart, A. (1979), The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, 4th Ed., ch. 29, Griffin, New York.
3. Montgomery, D. C. and Pack, E. A. (1982), Introduction to Linear Regression Analysis, John Wiley & Sons, New York.
4. SAS Institute Inc. (1988), SAS/IML User's Guide, Release 6.03 Ed., Cary, NC.
5. Seber, G. A. F. (1977), Linear Regression Analysis, Wiley, New York.
6. Wolter, K. M. and Fuller, W. A. (1982), "*Estimation of the Quadratic Errors-in-Variables Model*", Biometrika, Vol. 69, 175−182.
7. Yum, B. J. and Byun, J. H. (1990), "*Analysis of the Prediction Problem with Errors in the Variables*" IIE Trans., Vol. 22, 73−83.
8. Yum, B. J. and Neuhardt, J. B. (1984), "*Analysis of the Prediction Problem in a Simple Functional Relationship Model*", IIE Trans., Vol. 16, 177−184.
9. 변재현(1993), "독립변수의 측정오차가 예측에 미치는 영향을 평가하기 위한 기준개발", 대한산업공학회지, 제19권, 제1호, 33−40.