

# 확률론에 의한 Single Surface 구성모델의 변형률 예측능력 평가

## Probabilistic Evaluation on Prediction of the Strains by Single Surface Constitutive Model

정진섭\* · 송용선\*\* · 김찬기\*\*\*  
Jeong, Jin Seob · Song, Young Sun · Kim, Chan Kee

### Abstract

A probabilistic approach for evaluation of prediction of the strains using Lade's single surface constitutive model was employed, based on first-order approximate mean and variance. Several experiments such as isotropic compression and drained triaxial compression tests were conducted to examine the variabilities of soil parameters for Lade's model. By taking into account the results of the experimental data such as mean values and standard deviations of soil parameter's, a new probabilistic approach, which explains the uncertainty of computed strains, is applied. The magnitude of the COV for each parameter and the correlation coefficient between the two parameters can be effectively used for reducing the number of the parameters for the model. It is concluded that Lade's single surface constitutive model is superior model for the prediction of the strain, because the COV of strains is under the "0.51".

### 요 지

본 문은 Lade의 Single surface 구성모델의 변형률 예측 능력을 평가하기 위해 백마강모래를 사용, 등방압축시험과 배수삼축시험을 반복 시행하여 모델에 필요한 각 토질매개변수값을 다수 구하여 통계처리 하였다. 그리고 1계근사법을 이용하여 이 구성모델의 변형률 예측능력을 확률론적으로 평가 하였다. 그 결과 변동계수와 상관계수를 효과적으로 이용하여 토질매개변수의 수를 줄일 수 있을 것으로 기대되며 변동계수가 0.51 이하로서 이 구성모델의 변형률 예측 능력은 확률론적으로 매우 안정된 구성모델임을 알았다.

### 1. 서 론

여러가지 응력과 변형조건 하에서 재료의 거동을 표현하는 구성모델의 신뢰성은 얼마나 정확히 응력-변형률 예측하느냐에 달려있다. 이와같은 구성방정

식에서 사용되는 여러 토질매개변수의 수치는 개발된 구성모델의 정확성을 나타내는 기본적인 사항이지만 각 토질매개변수의 결정에는 실제로 많은 주관적 판단과 실험적 오차가 포함되게 마련이다.

그러나 구성모델을 개발한 연구자는 개발된 모델의 타당성을 일부 시험을 통해 주관적으로 결정된 각 토질매개변수를 이용하여 구성모델의 예측능력을 검증하고 있다. 따라서 기존의 개발된 구성모델에

\* 원광대학교 공과대학 교수  
\*\* 천안공업전문대학 토목과 전임강사  
\*\*\* 원광대학교 대학원 박사과정

대하여 반복된 실내시험을 통해 얻어진 각 토질매개변수의 통계치를 분석하고 이를 이용하여 그 구성식의 확률론적 정확성을 논하는 것은 매우 의미 있는 일이라 하겠으나 지금까지는 구성모델에 대한 통계적 접근방식에 의한 연구는 거의 없는 실정이다.

따라서 본 논문에서는 우선 Lade의 Single surface 구성모델을 사용하여 응력-변형관계를 해석하는 전산프로그램을 개발하였으며 백마강모래를 사용하여 관련된 시험을 반복시행하여 이 구성모델에 필요한 각 토질매개변수값을 다수 구하여 통계처리하였다. 여기서 얻은 통계치를 이용하여 각 응력수준에 따른 축방향변형률 및 체적변형률의 분산정도를 일반함수의 분산을 추정하는 1계근사법을 이용하여 확률론적으로 이 구성모델의 변형률 예측능력을 평가하였다.

## 2. Single Surface 구성모델<sup>1-4)</sup>

과괴규준은 응력불변량을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\eta_1 = (I_1^3/I_3 - 27) (I_1/P_a)^m \quad (1)$$

여기서 매개변수  $\eta_1$ 과  $m$ 은 정해진 흙에 대하여 요구된 밀도에 따라 결정된 토질매개변수이며,  $P_a$ 는 이 방정식에 사용된 응력과 같은 단위를 사용한 대기압이다. 그리고  $I_1$ ,  $I_3$ 는 응력불변량으로 식 (2), (3)과 같이 표현된다.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2)$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} + \tau_{yx} \cdot \tau_{zy} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} + \sigma_y \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} + \sigma_z \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yx}) \quad (3)$$

소성변형률중분은 유동칙으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

$$g_p = (\psi_1 \cdot I_1^3/I_3 - I_1^2/I_2 + \psi_2) \cdot (I_1/P_a)^n \quad (5)$$

여기서  $g_p$ 는 소성포텐셜함수이고  $d\lambda_p$ 는 비례상수이며  $I_2$ 는 응력불변량으로 식 (6)과 같이 표현된다.

$$I_2 = \tau_{xy} \cdot \tau_{yx} + \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} + \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) \quad (6)$$

항복함수는 경화인 경우와 연화인 경우에 대하여 다음과 같이 각각 나타낸다.

$$f_p = fp'(\sigma) - fp''(W_p) = 0 \quad (7)$$

$$f_p' = (\psi_1 \cdot I_1^3/I_3 - I_1^2/I_2) \cdot (I_1/P_a)^n \cdot e^a \quad (8)$$

$$f_p'' = (1/D)^{1/\rho} \cdot (W_p/p_a)^{1/\rho} \quad (\text{for Hardening}) \quad (9)$$

$$f_p'' = A \cdot e^{-B \cdot (W_p/p_a)} \quad (\text{for Softening}) \quad (10)$$

여기서  $\rho = p/h$ 이고  $\psi_1$ 과  $W_p$ 는 식 (11), (12)로 표현된다.

$$\psi_1 = 0.00155 \text{ m}^{-1.27} \quad (11)$$

$$dW_p = D \cdot P_a \cdot F_p^{(p/h)} \quad (12)$$

여기서

$$D = C/(27 \cdot \psi_1 + 3)^{(p/h)} \quad (13)$$

## 3. 실험 및 토질매개변수결정

### 3.1 시료준비 및 시험방법

백마강유역에서 채취한 모래를 자연건조시킨 후 #60을 전부 통과하고 #200에 잔류하도록 시료를 체가름하고 이 시료의 최대간극비( $e_{max}$ ), 최소간극비( $e_{min}$ )을 측정하여 상대밀도( $Dr$ )를 60%가 되도록 시료의 초기간극비( $e_{spc}$ )값을 결정하여 시험에 이용할 수 있도록 준비하였다. 이 시료의 크기는 직경 50 mm, 높이 100 mm로 하였으며 물리적특성은 표 1과 같다.

이와 같이 준비된 시료를 이용하여 등방압밀시험과 배수삼축압축시험을 실시하였다. 이 때 탄성계수(Eur)를 결정하기 위하여 최대하중에 도달할 때 연속적으로 재하(載荷)-제하(除荷)-재재하(再載荷)를 수행하였으며 전단속도는 0.2 mm/min로 하였다. 이들 시험결과 중 토질매개변수를 결정할 수 있는 최소단위의 조합을 택하여 그림 1과 그림 2에 나타내었으며 등방압축시험 12회 및 구속압력을 1, 2, 4

표 1. Physical properties of Baekma river sand

비 중	$e_{max}$	$e_{min}$	$e_{spc}$	$Dr$
2.706	1.255	0.973	1.086	0.60

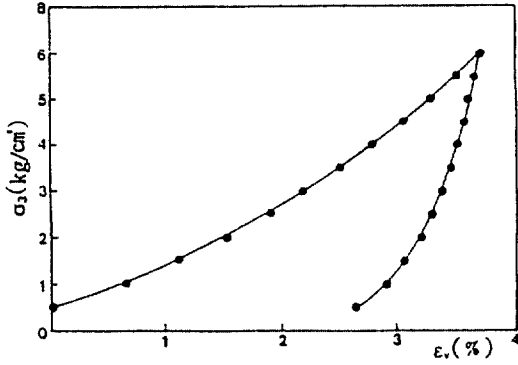


그림 1. Result of isotropic compression test on Baekma river sand

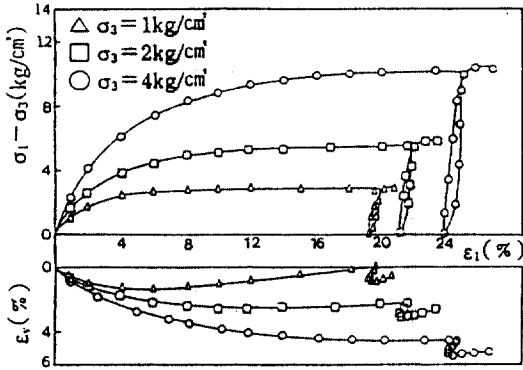


그림 2. Result of drain triaxial compression test on Baekma river sand

(kg/cm<sup>2</sup>)로 각각 달린 배수삼축압축시험 9회를 실시하였다.

### 3.2 토질매개변수 결정 및 통계치

실내 시험결과로부터 Single surface 구성모델<sup>1-4)</sup>에 필요한 토질매개변수를 얻는 과정은 매우 복잡하며, 수작업으로 수행할 때는 많은 시간이 소요되며 다소 오차가 유발될 우려가 있다. 따라서, 본 연구에서는 보다 신속하고 더 신뢰할 수 있도록 회귀분석(regression analysis)을 이용하여 개발한 토질매개변수 결정프로그램<sup>5,6)</sup>을 사용하였다.

이 구성모델의 토질매개변수는 탄성거동성분(Kur, n, v), 경화함수에 관련된 변수(a, c, p), 파괴규준에 관련된 변수(η<sub>1</sub>, m), 소성포텐셜(ψ<sub>2</sub>, μ) 및 항복함수에 관련된 변수(h, α) 등 총 12종이지만 사질토인 경우 a=0이므로 이를 제외한 11개의 토질매개변수만 검토의 대상이 된다. 그림 1의 등방압축시험 및 그림 2와 같은 3조의 배수삼축압축시험결과를 이용하여 여러개의 토질매개변수를 결정하기 위하여 구속응력이 다른 상태의 실험은 서로 통계적 독립이라 가정하고 조합을 이루어 가능한 한 많은 수의 토질매개변수를 구하였으며 이들의 통계치는 표 2와 같다<sup>5,7)</sup>.

## 4. 변형률의 분산

표 2. Statistic characteristics for soil parameters of single surface model

Parameter	No of tests	E[X]	S.D.[X]	Var[X]	C.O.V.	remarks
Kur	27	348.	16.	256	0.046	elastic behavior
n	27	0.741	0.086	0.0073	0.111	
v	27	0.28	0.116	0.0134	0.414	
c	12	0.00064	0.000087	.000000008	0.152	hardening function
p	12	1.865	0.054	0.0029	0.030	
η <sub>1</sub>	27	33.	2.620	6.841	0.079	failure criterion
m	27	0.130	0.035	0.0121	0.843	
ψ <sub>2</sub>	27	-3.353	0.149	0.0230	0.045	plastic potential
μ	27	2.22	0.072	0.0052	0.033	
h	27	0.676	0.018	0.0003	0.030	yield function
α	27	0.146	0.013	0.00017	0.082	

#### 4.1 일반함수의 평균과 분산

$n$ 개의 확률변수로 표현되는 일반함수  $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 평균과 분산은 각 변수의 확률밀도함수가 일반적으로 미지일 뿐 아니라 알고 있어도 다차원 적분 수행이 너무 어렵다. 따라서  $g(x)$ 의 개략적인 평균과 분산은 실용적으로 Taylor의 급수전개를 이용하여 다음식으로 구한다<sup>8)</sup>.

$$E[g(x)] = g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \quad (14)$$

$$\text{Var}[g(x)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} C_i C_j \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad (15)$$

여기서  $\rho_{ij}$ 는 임의의 두 변수  $x_i$ 와  $x_j$ 의 상관계수이고,  $C_i$ 는 함수의 편도함수인  $\partial g / \partial x_i$ 에 각 변수의 평균 값인  $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$ 을 대입하여 계산되는 항이며  $\sigma_{x_i}$ 는 임의 변수의 평균과 표준편차이다. 만일 임의의 두 확률변수  $x_i, x_j$ 가 통계적 독립인 경우 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Var}[g(x)] = \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (16)$$

#### 4.2 변형율함수의 편미분

Single Surface 구성모델의 변형율함수는 11개의 토질매개변수로서 식 (17)과 같이 탄성변형율증분과 소성변형율증분의 합으로 표현되며 각각의 변형율증분식은 식 (18), (19)와 같다. 변형율함수에 대한 분산성을 평가하려면 이 함수를 각 토질매개변수에 관하여 편미분하는 과정이 중요하며 각각의 편도함수는 다음과 같다.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (17)$$

$$d\varepsilon_v^e = d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_3^e \quad (18)$$

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p \quad (19)$$

##### 1) Kur, n, v의 편도함수

일반삼축시험인 경우  $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$ 이므로 탄성변형율증분식은 식 (20), (21), (22)와 같이 쓸 수 있으며 Kur, n, v 등은 탄성변형율증분만을 나타내는 토질매개변수이므로 이들에 대한 편도함수는 탄성변형율증분식만을 편미분하면 된다. 그리고  $d\varepsilon_2^e$ 와  $d\varepsilon_3^e$ 에 대한 편도함수는 생략하고 축방향탄성변형율증분

( $d\varepsilon_1^e$ )에 대한 편도함수만을 기술하면 식 (23), (24), (25)와 같이 각각 표현할 수 있다.

$$d\varepsilon_1^e = d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (20)$$

$$d\varepsilon_2^e = -v \cdot d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (21)$$

$$d\varepsilon_3^e = -v \cdot d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \text{Kur}} = \frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \text{Kur}} = -\sum \frac{1}{\text{Kur}} d\varepsilon_1^e \quad (23)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial n} = \sum d\varepsilon_1^e \cdot \ln(\text{pa} / \sigma_3) \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} = \frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial v} = -\sum \frac{1}{\text{Eur}} d\sigma_2 \quad (25)$$

여기서 Eur은 식 (26)과 같이 표현된다.

$$\text{Eur} = \text{Kur} \cdot p_a \cdot (\sigma_3 / \text{pa})^n \quad (26)$$

2) (c, p), ( $\eta_1, m$ ), ( $\psi_2, \mu$ ), (h,  $\alpha$ )의 편도함수  
위의 각 토질매개변수는 모두 소성변형율증분식만을 식 (27), (28), (29)와 같이 포함되어 있다. 따라서 Hardening function을 나타내는 변수 c, p에 관한 변형율함수의 편도함수를 축방향변형율( $d\varepsilon_1^p$ )에 대해서만 나타내면 식 (30), (31)과 같다.

$$d\varepsilon_1^p = \frac{\{C / (27 \cdot v + 3)^{\eta_1} \cdot \text{Pa} \cdot (P/h) \cdot \text{fp}^{\eta_1} \cdot \mu \cdot [G \cdot (I_1/I_2)^2 \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) - \psi_1^3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2] \}}{\mu \cdot \{(\psi_1 \cdot I_1^3 / I_3 - I_1^2 / I_2 + \psi_2) \cdot (I_1 / P_a)^m\}} \quad (27)$$

$$d\varepsilon_2^p = \frac{\{C / (27 \cdot v + 3)^{\eta_1} \cdot \text{Pa} \cdot (P/h) \cdot \text{fp}^{\eta_1} \cdot \mu \cdot [G \cdot (I_1/I_2)^2 \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) - \psi_1^3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2] \}}{\mu \cdot \{(\psi_1 \cdot I_1^3 / I_3 - I_1^2 / I_2 + \psi_2) \cdot (I_1 / P_a)^m\}} \quad (28)$$

$$d\varepsilon_3^p = \frac{\{C / (27 \cdot v + 3)^{\eta_1} \cdot \text{Pa} \cdot (P/h) \cdot \text{fp}^{\eta_1} \cdot \mu \cdot [G \cdot (I_1/I_2)^2 \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) - \psi_1^3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2] \}}{\mu \cdot \{(\psi_1 \cdot I_1^3 / I_3 - I_1^2 / I_2 + \psi_2) \cdot (I_1 / P_a)^m\}} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial C} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial C} = \sum d\varepsilon_1^p / C \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial P} = \sum d\varepsilon_1^p [1/p - \{\ln(27 \cdot \psi_1 + 3)\} / h + \ln(\text{fp}/h)] \quad (31)$$

여기서

$$G = \psi_1 \cdot (\mu + 3) \cdot I_1^2 / I_3 - (\mu + 2) \cdot I_1 / I_2 + \psi_1 \cdot \mu / I_1 \quad (32)$$

$$f_p' = (\psi_1 \cdot I_1^3 / I_3 - I_1^2 / I_2) \cdot (I_1 / P_a)^h \cdot e^{\alpha Q} \quad (\text{bis.8})$$

$$QQ = \alpha \cdot SS / (1 - (1 - \alpha) \cdot SS) \quad (33)$$

$$SS = (I_1^3/I_3 - 27) \cdot (I_1/P_a)^m / \eta_1 \quad (34)$$

마찬가지로 Failure criterion을 나타내는 변수  $\eta_1$ ,  $m$ 의 편도함수는 식 (35), (36)와 같고 Plastic potential을 나타내는 변수  $\psi_2$ ,  $\mu$ 에 대해서는 식 (52), (53)와 같으며, Yield function을 나타내는 변수  $h$ ,  $\alpha$ 에 대해서는 식 (54), (55)와 같다.

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial \eta_1} = \Sigma d\varepsilon_1^p \cdot \{[(p/h)(fp - fpa) + fpa] \cdot \{(1 - 1/\alpha) \cdot QQ - 1\} \cdot QQ - fpa \cdot \{(1 - 1/\alpha) \cdot Qa - 1\}] / [\eta_1 \cdot (fp - fpa)]\} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial m} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial m} = \Sigma PDLP \cdot d\varepsilon_1^p / DLP + DLP \cdot PPU \cdot \{(\mu + 3) \cdot I_1^2 / I_3 - (I_1^3 / I_3^2) \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3\} \quad (36)$$

여기서

$$Qa = QQ_{i-1} \quad (37)$$

$$fpa = fp_{i-1} \quad (38)$$

$$PDLP = PD \cdot DLP + D \cdot PDLP1 \quad (39)$$

$$PD = -27 \cdot (p/h) \cdot PPU / (27 \cdot \psi_1 + 3) \quad (40)$$

$$DLP = d\lambda_p \cdot (I_1/P_a)^\mu \quad (41)$$

$$PDLP1 = pa \cdot (p/h) \cdot PDLP2/\mu \quad (42)$$

$$PPU = -1.27 \cdot \psi_1/m \quad (43)$$

$$d\lambda_p = dW_p/\mu \cdot g_p \quad (44)$$

$$dW_p = D \cdot Pa \cdot P/h \cdot fp^{(p/h-1)} \cdot dfp \quad (45)$$

$$PDLP2 = 1/PGP^2 \cdot [PGP \cdot \{(fp-fpa) \cdot (p/h-1) \cdot fp^{(p/h-2)} \cdot PFP + fp^{(p/h-1)} \cdot (PFP-PFPA)\} - fp^{(p/h-1)} \cdot (fp-fpa) \cdot PPU \cdot I_1^3/I_3] \quad (46)$$

$$PGP = g_p / \{(I_1/pa)^\mu\} \quad (47)$$

$$PFP = PPU \cdot (I_1^3/I_3^2) \cdot (I_1/pa)^h \cdot (p/h)^{QQ} + fp \cdot \ln(I_1/pa) \cdot QQ \cdot \{1/\alpha + (1/\alpha - 1) \cdot QQ\} \quad (48)$$

$$PFPA = PPU \cdot AAI1 \cdot AAPI^h \cdot e^{QA} + fpa \cdot \ln(AAPI) \cdot QA \cdot \{1/\alpha + (1/\alpha - 1) \cdot QA\} \quad (49)$$

$$AAI1 = I_{1(n-1)^3} / I_{3(n-1)} \quad (50)$$

$$AAPI = I_{1(n-1)} / Pa \quad (51)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \psi_2} = \frac{\partial \varepsilon_2^p}{\partial \psi_2} = \Sigma -d\varepsilon_2^p / PGP + DLP \cdot \mu / I_1 \quad (52)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mu} = \frac{\partial \varepsilon_2^p}{\partial \mu} = \Sigma -d\varepsilon_2^p / \mu + DLP \cdot (\psi_1 \cdot I_1^2 / I_3 - I_1 / I_2 + \psi_2 / I_1) \quad (53)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial h} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial h} = \Sigma d\varepsilon_1^p \cdot [\ln(27 \cdot \psi_1 + 3) \cdot (p/h) / h - (1/h) - \ln(I_1/pa) + (p/h) \cdot \ln\{fp / (I_1/pa)^h\} / h + \{fp \cdot \ln(I_1/pa) - fpa \cdot \ln(I_1/pa)\} / (fp - fpa)] \quad (54)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varepsilon_1^p}{\partial \alpha} = \Sigma d\varepsilon_1^p \cdot [(p/h-1) \cdot QQ \cdot (1-QQ) + \{fp \cdot QQ \cdot (1-QQ) - fpa \cdot QA \cdot (1-QA)\} / (fp-fpa)] \alpha \quad (55)$$

### 4.3 토질매개변수간의 상관계수

구성모형을 나타내는 토질매개변수들은 일반적으로 통계적독립인 무상관변수가 아니며 어느 두 변수 사이에는 상당한 상관성을 갖는 것도 있다. 예를들면 기울기와 절편사이의 관계를 보이는 두 변수들은 물론 강한 음의 상관성을 갖는다. 따라서 실험자료를 근거로 임의의 두변수 사이의 상관계수를 구하고 이를 이용하여 변형율의 분산이 평가되어야 한다.

본 연구에서 각 토질매개변수의 자료를 선형회귀 분석을 이용하여 임의의 두 변수간 상관계수를 구한 결과 표 3과 같다.

## 5. 적용결과 및 분석

### 5.1 토질매개변수의 통계적 특성

백마강모래를 사용하여 일련의 실험을 통해 구한 각 토질매개변수의 평균과 변동계수는 표 2에서와 같이 파괴규준에 관한 한 변수인  $m$ 의 변동계수가 0.843으로 가장 큰 변동성을 보이며  $v$ 의 변동계수는 0.414를 나타낸다. 이를 제외한 토질매개변수의 변동계수는 전체적으로 작은 값을 보인다.

따라서 Single surface 구성모델의 이용에는  $m$ 과  $v$ 의 결정에 유의하여야 하며 특히  $v$ 의 경우 실험을

표 3. Correlation matrix of soil parameters

	Kur	n	v	c	p	$\eta_1$	m	$\psi_2$	$\mu$	h	$\alpha$
Kur	1	-0.71	0.41	0.42	-0.26	0.01	-0.06	-0.06	0.32	0.02	-0.15
n		1	0.13	-0.26	0.30	0.31	0.34	0.37	-0.30	-0.04	0.18
v			1	0.04	-0.02	-0.03	0.01	0.07	0.13	-0.16	-0.21
c				1	-0.83	0.17	0.14	0.11	0.26	-0.24	-0.39
p					1	-0.03	0.01	0.05	-0.24	0.19	0.31
$\eta_1$						1	0.99	0.93	-0.27	-0.64	-0.25
m			sym.				1	0.95	-0.34	-0.69	-0.25
$\psi_2$								1	-0.40	-0.70	-0.27
$\mu$									1	0.53	-0.05
h										1	0.56
$\alpha$											1

통하지 않고 관계대로  $v=0.2-0.25$ 의 상수로 취급하는 것은 상당한 불확실성의 원인이 될 것이다.

한편 상관계수행렬인 표 3에서는 두 토질매개변수의 관계가 기울기와 절편인  $\rho_{n,Kur}$ ,  $\rho_{p,c}$ 는 각각  $-0.71$ 과  $-0.83$ 의 값으로 비교적 강한 음의 상관성을 보이고 있으며  $\rho_m$ ,  $\eta_1$ 은  $0.99$ 로 거의 선형적인 관계로 나타나 회귀분석방법이 타당함을 알 수 있다. 그리고 기울기와 절편관계가 아닌 경우에서  $\rho_m$ ,  $\psi_2$ 는  $0.95$ ,  $\rho_{\eta_1, \psi_2}$ 는  $0.93$ 으로 강한 양의 상관성을 보이는데  $\rho_m$ ,  $\psi_2$ 는 소성포텐셜  $\psi_2$ 의 결정에 Failure Criterion인  $m$ 이 중요한 관련을 갖기 때문이며,  $\rho_{\eta_1, \psi_2}$ 에서는  $m$ 과  $\eta_1$ 이 기울기와 절편 관계를 이루고 있기 때문에  $\eta_1$ 과  $\psi_2$ 의 상관성이 더불어 크게 나타남을 알 수 있다.

또한 Yield function을 나타내는  $h$ 는  $\eta_1$ ,  $m$ ,  $\psi_2$ 와 각각  $-0.64$ ,  $-0.69$ ,  $-0.70$ 의 비교적 강한 음의 상관성을 공통적으로 보이는 중요한 변수임을 알 수 있다.

따라서 여러 종류의 흙을 대상으로 많은 실험을 수행하여 상관계수의 경향을 조사함으로써 궁극적으로 매개변수의 수를 간소화 시킬 수 있는 가능성을 보여주고 있다.

### 5.2 변형률의 분산

각 토질매개변수의 통계치를 이용하여 응력수준에 따른 임의의 축변형률 및 체적변형률의 변동성을 무상관 변수인 경우와 유상관변수인 경우로 각각

해석하여 표 4에 나타내었다.

이 표에 나타난 바와 같이 축방향변형률의 변동계수는 무상관변수로 가정하여 해석한 경우가 유상관변수로 해석한 경우보다 구속압력이  $1(\text{kg}/\text{cm}^2)$ 일 때는 4배정도,  $2(\text{kg}/\text{cm}^2)$ 일 때는 3배정도,  $4(\text{kg}/\text{cm}^2)$ 일 때는 2배정도 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 그리고 체적변형률의 변동계수도 구속압력의 증가에 따라 같은 경향을 나타내고 있으며 축방향변형률이 증가할 수록 구속압력에 무관하게 축방향변형률 및 체적변형률의 변동계수가 증가하는 것으로 나타나 구속압력이 작을 수록 변형률예측에 더 큰 불확정성이 포함됨을 알 수 있다.

또한 이 구성모델의 각 토질매개변수들은 기울기와 절편, 함수관계 등으로 표 3과 같이 서로 독립 관계에 있지 않으므로 무상관변수로 해석하는 것은 불합리하며 유상관변수로 해석함이 타당하다는 사실을 입증하였다. 그리고  $0.03-0.84$ 사이의 큰 변동성을 갖는 토질매개변수를 사용하여 응력-변형률을 해석한 결과 축방향변형률의 변동계수는  $0.35$ 이하이고 체적변형률의 변동계수는 구속압력이  $1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 일 때와 같이 체적변형률이 아주 작은 경우를 제외하고는  $0.5$ 이하로 그 폭이 작게 나타나고 있다. 따라서 이 구성모델에 의한 변형률 예측은 확률론적으로 안정된 값을 갖는다 할 수 있다.

그리고 표 4의 결과를 서로서로 관계지어 그림으로 나타낸 것이 그림 3~그림 7이다.

그림 3은 유상관변수인 경우 구속압력에 따른

#### Ⅱ 4. Mean, variance and C.O.V. of axial, volumetric strains

a.  $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		1.56	2.04	2.32	2.54	2.67	2.76	2.85
$E(\epsilon_1)$		1.516	2.508	3.540	5.140	7.119	9.654	14.922
S.D[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.5744	0.9640	1.4934	2.6651	4.7858	8.5376	19.431
	Corr.	0.1601	0.3089	0.5192	0.9373	1.5701	2.5226	4.8975
COV[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.3787	0.3844	0.4219	0.5185	0.6722	0.8843	1.3022
	Corr.	0.1055	0.1232	0.1467	0.1823	0.2205	0.2613	0.3282
$E(\epsilon_v)$		0.879	1.106	1.223	1.268	1.207	1.037	0.527
S.D[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.4449	0.7311	1.0176	1.4619	2.0407	2.8579	4.8903
	Corr.	0.1552	0.2243	0.2872	0.3806	0.5022	0.6757	1.1001
COV[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.5062	0.6608	0.8320	1.1530	1.6903	2.7555	9.2888
	Corr.	0.1766	0.2027	0.2349	0.3002	0.4160	0.6515	2.0902

b.  $\sigma_3=2 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		2.19	2.66	3.66	4.24	4.66	4.94	5.18
$E(\epsilon_1)$		1.506	2.002	3.107	5.083	7.174	9.862	14.972
S.D[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.7275	0.9473	1.6567	2.5691	4.1913	7.1039	15.227
	Corr.	0.2190	0.3039	0.6159	1.0256	1.6811	2.6772	4.9803
COV[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.4830	0.4731	0.4719	0.5055	0.5842	0.7203	1.0170
	Corr.	0.1454	0.1518	0.1754	0.2018	0.2343	0.2715	0.3326
$E(\epsilon_v)$		1.192	1.388	1.813	2.073	2.252	2.333	2.266
S.D[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.5362	0.6971	1.1652	1.6186	2.1985	2.9465	4.4572
	Corr.	0.2166	0.2660	0.3993	0.5180	0.6579	0.8244	1.1325
COV[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.4499	0.5022	0.6426	0.7810	0.9763	1.2629	1.9667
	Corr.	0.1818	0.1917	0.2202	0.2499	0.2922	0.3533	0.4997

c.  $\sigma_3=4 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		2.93	3.67	4.87	6.55	7.59	8.43	9.16
$E(\epsilon_1)$		1.500	2.007	3.018	5.023	7.054	9.811	14.576
S.D[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.8696	1.1622	1.7137	2.8356	4.1402	6.3384	11.646
	Corr.	0.2984	0.4131	0.6571	1.2158	1.8827	2.9472	5.2303
COV[ $\epsilon_1$ ]	Uncorr.	0.5796	0.5788	0.5679	0.5645	0.5870	0.6460	0.7989
	Corr.	0.1989	0.2057	0.2178	0.2420	0.2669	0.3004	0.3588
$E(\epsilon_v)$		1.638	1.908	2.353	3.000	3.451	3.863	4.277
S.D[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.7428	0.9191	1.2714	1.9368	2.5552	3.3362	4.6225
	Corr.	0.3766	0.4499	0.5845	0.8188	1.0235	1.2682	1.6405
COV[ $\epsilon_v$ ]	Uncorr.	0.4534	0.4817	0.5404	0.6454	0.7403	0.8637	1.0809
	Corr.	0.2298	0.2358	0.2484	0.2728	0.2965	0.3283	0.3836

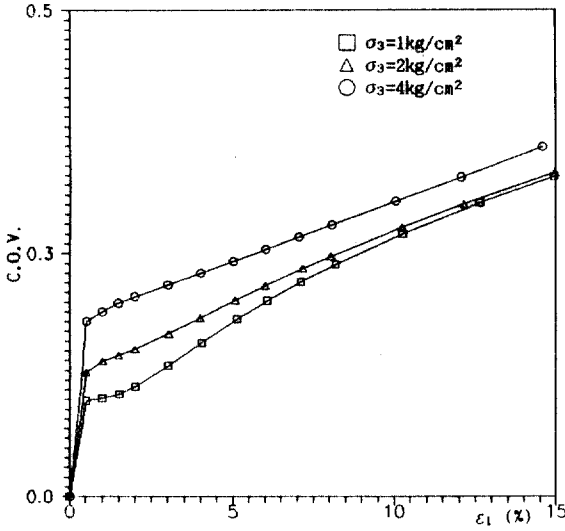


그림 3. C.O.V. of axial strain vs axial strain for correlated variate correlation

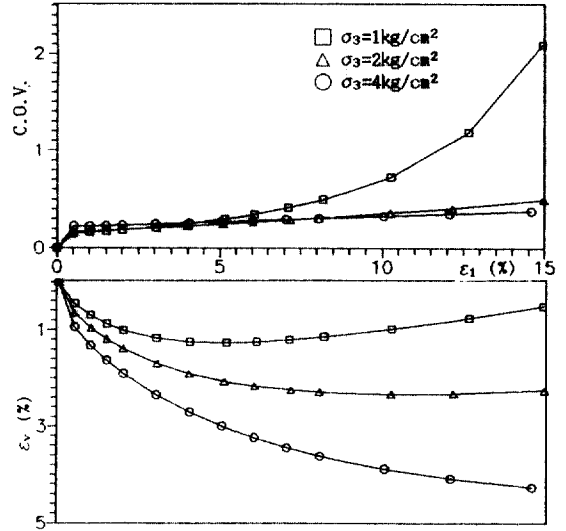


그림 5. C.O.V. of volumetric strain and volumetric strain vs axial strain for correlated variate correlation

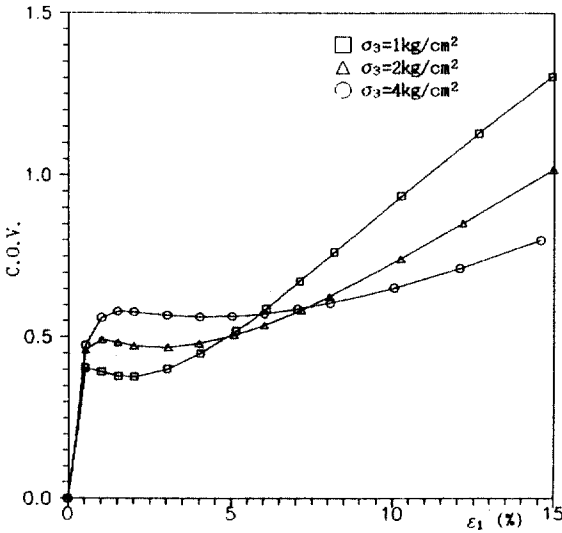


그림 4. C.O.V. of axial strain vs axial strain for uncorrelated variate correlation

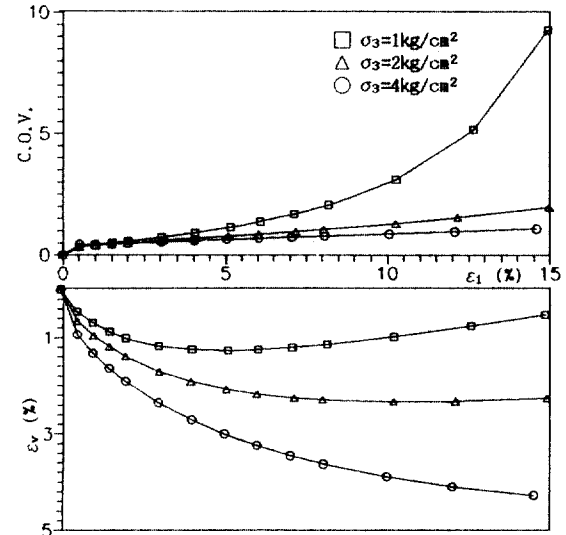


그림 6. C.O.V. of volumetric strain and volumetric strain vs axial strain for uncorrelated variate correlation

축방향변형률과 축방향변형률에 대한 변동계수의 관계를 나타낸 것이다. 그림에 나타난 바와 같이 축방향변형률의 변동계수는 구속압력에 관계없이 1% 내에서 급격히 증가한 후 축변형률의 증가와 함께 변동계수의 증가는 비교적 작은 증가를 나타내고 있다. 그러므로 이 구성모델의 변형률에측은 초기에 상당히 큰 불확정성이 포함됨을 알 수 있다.

그림 4는 각각의 토질매개변수를 통계적독립인 무상관확률변수로 가정하여 해석한 경우로서 축변형률이 5% 이내에서는 구속압력이 작은 경우가 큰 경우보다 변동계수가 작으며, 5% 이상에서는 반대 양상을 나타낸다. 그리고 변동계수의 크기는 유상



관변수로 해석한 경우보다 구속압력에 따라 약 2-4배 정도 크게 나타난다.

그림 5는 유상관변수인 경우 구속압력에 따라 축방향변형률에 대한 체적변형률과 체적변형률 변동계수의 관계를 나타낸 것이다. 그림에 나타난 바와 같이 체적변형률 변동계수는 구속압력에 관계없이 1% 내에서 급격히 증가한 후 축변형률의 증가와 더불어 체적변형률 변동계수의 증가가 비교적 작은 경향을 나타내고 있으며 전단에 의해 체적이 증가하는 현상이 나타나면 체적변형률 변동계수는 급격히 증가한다. 이는 체적변형률 평균( $E(\epsilon_v)$ )이 감소하기 때문이며 체적변형률이 "0"에 접근하면 이 값은 무한히 커진다. 그러므로 이와같은 방법으로는 전단시 체적이 증가하는 경우는 설명할 수 없으며 해석의 의미가 없어진다.

그림 6은 각각의 토질매개변수를 통계적독립인 무상관확률변수로 가정한 경우로서 유상관변수로 해석한 경우와 같은 경향을 나타내지만 변동계수의 크기는 유상관변수로 해석한 경우보다 구속압력에 따라 약 2.5-4.5배 정도 크게 나타남을 알 수 있다.

그림 7은 구속압력이 1, 2, 4 kg/cm<sup>2</sup>인 경우, 임의의 축차응력에서 축변형률 및 체적변형률의 평균 값에 1계근사법으로 산정한 각각의 변형률에 대한 표준편차 만큼을 가감하여 변형률 평균은 0로 변형률 평균에 표준편차를 가한 경우는 □로, 변형률 평균에 표준편차를 감한 경우는 △로 각각 나타내었다.

이 범위는 만일 변형률 분포를 정규분포로 가정하면 변형률이 그 속에 분포할 확률이 68.2%임을 나타낸 것으로서 구속압력이 클 수록 편차는 증가하지만 그 폭은 평균의 50%범위 내에 있으므로 확률론적으로 매우 안정되어 있다.

그러므로 Lade의 Single surface 구성모델은 임의의 축차응력에서 축변형률 및 체적변형률을 예측함에 능력이 매우 우수한 모델이라 할 수 있다.

## 6. 결 론

Lade의 Single surface 구성모델의 변형률 예측 정도를 평가하기 위하여 백마강모래에 대한 27조의 토질매개변수를 결정하여 이들의 평균과 분산 그

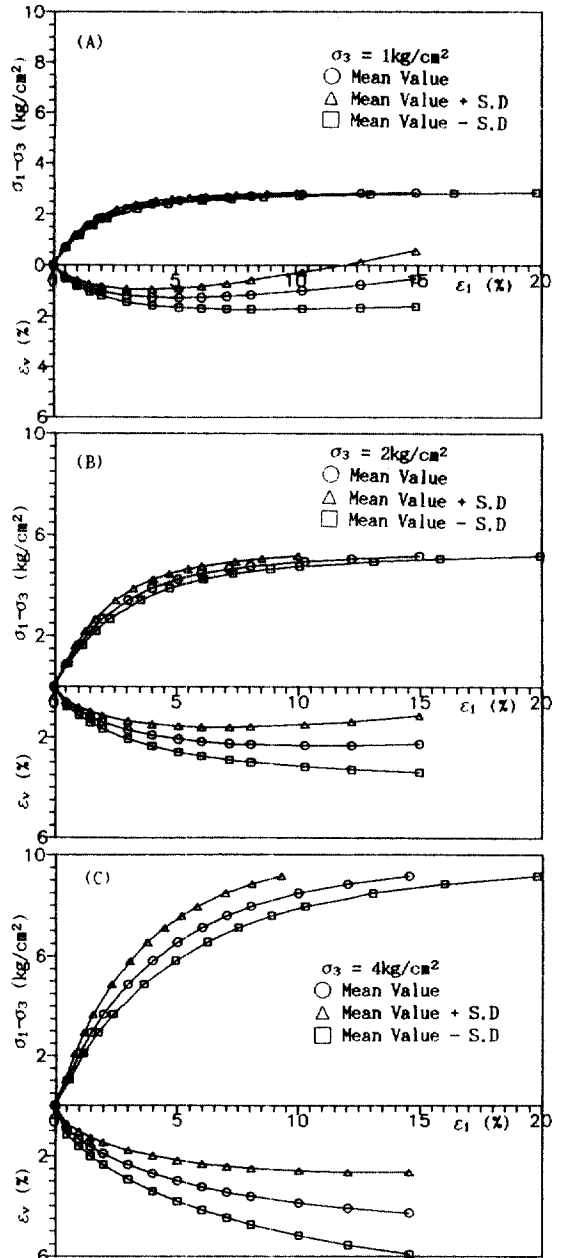


그림 7. Comparison of test data with degree of dispersion axial strain against constant deviator stress and volumetric strain for correlated variate correlation

리고 변동성을 밝히고 확률론을 도입하여 축방향변형률 및 체적변형률의 분산을 수치적으로 예시하였다. 이를 요약하면 다음과 같다.

1) 통계처리된 모든 토질매개변수 중에서 파괴규준에 관련된  $m$ 의 변동계수가 0.84로 가장 크므로 이의 결정에 신중해야 하며 실험결과 포아슨비( $\nu$ )의 변동계수도 0.414로 상당한 변동성을 보이므로 이 값을 실험에서 얻지않고 일정한 상수로 구성모델에 사용함은 곤란하다.

2)  $m$ ,  $\eta_1$ 과  $\psi_2$ 의 상관계수는 0.95, 0.93으로 양의 상관성을 보이고 있으며  $h$ 와  $\eta_1$ ,  $m$ ,  $\psi_2$ 간의 상관계수는 각각  $-0.64$ ,  $-0.69$ ,  $-0.70$ 으로 음의 상관성을 나타내고 있으므로 하나의 식으로 대체하여 토질매개변수의 수를 줄일 수 있는 가능성을 보이며 궁극적으로는 구성 모델의 개발에 확률론의 역할을 기대할 수 있다.

3) 토질매개변수의 변동계수가 0.03-0.84로 큰 변동성을 갖음에도 불구하고 이를 이용하여 변형율의 분산을 해석한결과 변형율의 변동계수가 0.51 이하이므로 확률론적으로 매우 안정된 구성모델이라 할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Kim, M.K. & Lade, P.V., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials I. Elastic

Potential Function" *Computers and Geotechnics*, 1988, pp. 307-324.

2. Lade, P.V. & Kim, M.K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials II. Yield Criterion and Plastic Work Contours", *Computers and Geotechnics*, 6(1), 1988, pp. 13-29.
3. Lade, P.V. & Kim, M.K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials III. Comparisons with Experimental Data", *Computers and Geotechnics*, 6(1), 1988, pp. 30-47.
4. Lade, P.V., "Single-Hardening Model with Application to NC Clay", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 3, 1990, pp. 394-414.
5. 정진섭, 송용선, 김찬기, 이문순, "Lade의 Single and Double Work-Hardening 구성모델의 정도비교," *대한토목학회 학술발표개요집*, 1991, PP. 553-556.
6. 김찬기, 이문순, 정진섭, "실내시험에 의한 Lade의 토질매개변수 결정" *원광대학교 대학원 논문집*, 제8호, 1990, pp. 163-181.
7. 정진섭, 김찬기, 이문순, "탄·소성구성모델의 토질매개변수 예민성" *대한지반공학회지* 제8권 제2호, 1992, PP. 81-94.
8. Alfredo. H-S. Ang and Wilson H. Tang, *Probability concepts in engineering planning and design*, John Wiley and sons Inc., 1975.

(接受 1993. 4. 6)