大韓土木學會論文集
第13卷 第3號 · 1993年 7月
pp. 45~57

連續보의 影響線 作圖에 관한 한 便法

A Simplified Method of Drawing Influence Lines for Continuous Beams

梁 昌 鉉*
Yang, Chang Hyun

Abstract

In case of the analysis of continuous beams, the complexity increases greatly as the number of spans becomes large, and even the slope-deflection method or the moment distribution method is subject to restriction in its utilization. In this study, a revised exact method is developed for the analysis of continuous beams up to four spans, and a new approximate method is proposed for the multi-span continuous beams. This approximate procedure is very simple in its application and provides very satisfactory results which converge closely on the exact ones. These methods can also be used conveniently especially for drawing influence lines for the support moments of continuous beams, and their value is fully appreciated because of notable simpleness as compared with the conventional method which is mainly based on the Müller-Breslau principle.

요 지

在來式 構造解析技法으로 連續보를 解析할 때 多徑間일수록 그 복잡성이 加重된다. 처짐角法이나 모멘트分配法 마저도 그 實用性이 制限的이 된다. 本 硏究에서는 四徑間까지의 연속보에서 支點 모멘트를 구하는 더 改善된 正解法을 개발화였고, 또한 모든 多徑間의 連續보의 해석에 적용되는 전혀 새로운 近似解法을 제시하고 잇다. 이 근사해법은 適用이 아주 간편하고 正確度가 아주 높아서 거의 正解에 가까운 結果를 보여준다. 이들 解法은 특히 連續보의 影響線의 作圖에 아주 편리하게 이용할 수 있으며, 지금까지 주로 많이 사용하는 Müller-Breslau의 原理와 비교할 때 월등하게 容易하다는 長點을 지니고 있다.

1. 序 論

連續보는 徑間의 수가 많아질수록 그 解析이 복잡하다. 이 경우에 在來式 構造解析방법 등에서 20世紀 初期의 걸작이라고 일컬어지는 Moment 分配法 마저도 實用上의 限界가 있게 된다. 參考文獻 1에서는 2, 3, 4徑間의 連續보에 대해서 그 모멘트 分配過程을 等比無限級數로 전개하고 간단한 單一公式으로 변환시킴으로써 支點모멘트의 正解를 얻을 수 있었다. 參考文獻 2에서는 五徑間 이상의 多徑間 연속보에서 近似解를 유도했는데 거의 正解와 一致함을 立證하였으며, 參考文獻 3에서는 橫荷重을 받아 節點의 水平移動을 수반하는 高層라멘의 解法을 數式化하여 그 正確度와 實用性을 제시한 바 있다. 本

* 정회원 · 인하대학교 토목공학과 교수

研究는 四徑間까지의 연속보의 해석에 적용되는 보다 더 改善된 正解法과 모든 徑間의 연속보의 解法에 적용되는 近似解法을 제시하고 있다. 5徑間 이상의 多徑間연속보에 대해서는 엄밀한 의미의 正解法의 展開가 곤란할뿐만 아니라 四徑間 이하의 연속보에서는 數式이 직접利用할 수 없는 경우가 많다. 이 경우에 實用上 간편하면서도 가급적 正解에 근접하는 近似解法이 필요하게 된다. 일반적으로 不靜定의 次數가 높을수록 그 解法은 幾何級數的으로 어려움이 따르게 마련이다. 따라서 高次不靜定인 구조물의 해석에도 비교적 쉬운 解法, 즉, 그 어려움 정도가 算術級數的인 解法이 있어야 한다. 連續보에서 支點모멘트에 관한 影響線의 작성은 實務에서도 대단히 必要한 것이며, 지금까지는 Müller-Breslau의 原理를 이용하는 方法이 사용되어 왔다. 이 方法은 連續보의 徑間의 수효가 많아질수록 非實用的이다. n次 부정정인 연속보에서 支點모멘트에 대한 影響線의 作圖에 Müller-Breslau의 原理를 적용할 경우에 n개의 支點反力에 관한 影響線을 그린 다음에라야 支點모멘트의 影響線을 그릴 수 있다. 또한 n개의 支點反力을 구하기 위하여 n×(n+1)개의 처짐要素의 값을 계산하여야 하고 이들로 구성된 n元聯立方程式을 풀어야하는 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 이 研究에서는 4徑間까지 연속보의 해석에 적용되는 正解法, 또는 모든徑間에 적용되는 正解에 가까운 近似解法으로 영향선을 作圖하는 전혀 새로운 과정을 제시하고 있다. 이 과정은 종래의 Müller-Breslau의 原理 등과 비교해 볼 때 월등하게 容易하다는 長點이 있다.

2. 支點모멘트의 定式化

連續보의 支點모멘트에 관한 一般式을 유도하기 위하여 그림 1과 같은 四徑間연속보를 고려하기로 한다.

그림 1에서 d_{ij}는 부재 ij의 i端의 分配率이고 부재 ab, de에서는 支點 a와 e의 모멘트를 알고 있기 때문에 分配率 계산시에는 修正剛度係數

$$K^R=\frac{3}{4}K=\frac{3}{4}\left(\frac{I}{L}\right)$$

를 사용하고 있다.

또한 ef부분에 荷重이 作用하는 경우에 e점의 모멘트

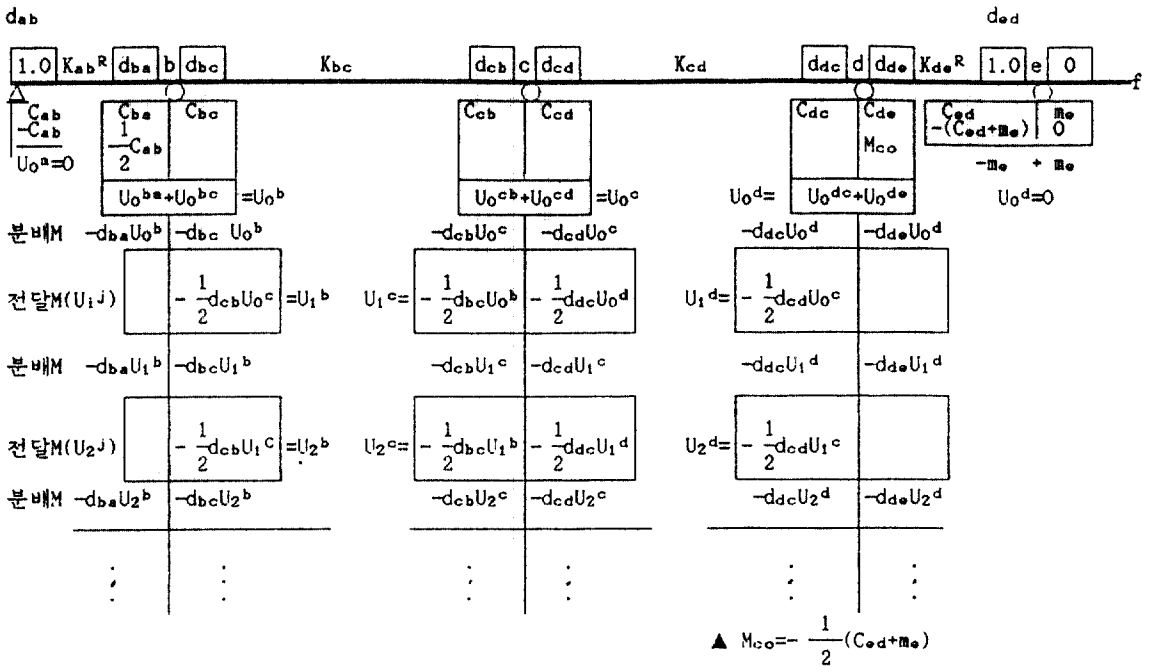


그림 1. 모멘트 分配過程

m_e가 있게 된다. C_{ij}는 부재 ij에서 i端의 固定端모멘트이다.

2.1 支點모멘트

그림 1의 모멘트 分配過程으로부터 連續보의 連續된 支點 i, j, k에서 支點 j의 모멘트는 一般的으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_j = M_{jk} = U_0^{jk} - d_{jk}\left(\sum_{p=0}^{\infty} U_p^j\right) - \frac{1}{2} d_{kj}\left(\sum_{p=0}^{\infty} U_p^k\right) \quad (1)$$

여기서 支點 j의 右端의 材端모멘트 M_{jk}가 在來式 符號規約에 의한 支點모멘트 M_j와 일치함을 알 수 있다. 最右端이 固定端인 경우와 같이 $M_j = -M_{ji}$로 表示하여야 할 경우도 있다. 첫째項은 一般的으로 부재 jk에서 j端의 固定端모멘트, 둘째項은 jk에서 j端의 分配모멘트의 代數合, 셋째항은 원단 k로부터 j단으로 넘어온 전달모멘트의 대수합니다. 만일 遠端 k에서 모멘트가 零이거나 旣知인 경우, 즉, 분배율을 계산할 때 K_{jk}^R을 使用한 경우에는 材端모멘트 계산시에 식 (1)의 마지막項은 포함되지 않는다. 그림 1에서 M_{ba}, M_{de}가 그러한 경우이다. 또한 k가 고정단이면 $d_{kj}=0$, j가 고정단이면 $d_{jk}=0$이다. 그리고 M_{ij}, C_{ij}, m_e 등은 부재의 端에서 時計方向으로 作用하면 正(+)이다. 連續보에서 각 支點의 모멘트가 알려지면 나머지문제는 靜定보의 해석에 불과하게 된다.

2.2 初期 不均衡모멘트

連續보에서 連續된 支點 i, j, k에서 支點 j의 初期의 不均衡모멘트 U_0^j는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_0^j = U_0^{ji} + U_0^{jk} = (C_{ji}) + [C_{jk} - \frac{1}{2}(C_{kj} + m_k)] \quad (2)$$

그림 1의 支點 a나 e와 같이 m_a가 零이거나 m_e가 旣知이면 支點 b와 d에서의 分配率계산시에 修正剛度係數를 사용한다. 이 경우 식 (2)에서 마지막項 $\frac{1}{2}C_{ab}(m_a=0)$, 또는 $\frac{1}{2}(C_{ed}+m_e)$이 포함되며 이는 $U_0^a = U_0^d = 0$임을 의미한다.

2.3 p번째 不均衡모멘트

U_p^j는 p번째로 j端으로 傳達된 傳達모멘트로서 다음 分配를 위한 不均衡모멘트가 된다. 左遠端 i와 右遠端 k로부터 전달받기 때문에 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U_p^j = \sum_{(j)} \text{전달모멘트}$$

$$= -\frac{1}{2} d_{ij} U_{p-1}^i - \frac{1}{2} d_{kj} U_{p-1}^k \quad (p \geq 1) \quad (3)$$

그림 1의 四徑間 연속보에서는 $U_0^a = U_0^e = 0$이므로 支點 b와 d에서는 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_p^b = -\frac{1}{2} d_{cb} U_{p-1}^c$$

$$U_p^d = -\frac{1}{2} d_{cd} U_{p-1}^c \quad (3a)$$

따라서 支點 j에서의 불균형 모멘트의 合은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^j = U_0^j + U_1^j + U_2^j + \cdots\cdots$$

$$= U_0^j - \frac{1}{2} d_{ij}(U_0^i + U_1^i + U_2^i + \cdots)$$

$$-\frac{1}{2} d_{kj}(U_0^k + U_1^k + U_2^k + \cdots)$$

또는,

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^j = U_0^j - \frac{1}{2} d_{ij}\left(\sum_{p=0}^{\infty} U_p^i\right) - \frac{1}{2} d_{kj}\left(\sum_{p=0}^{\infty} U_p^k\right) \quad (4)$$

식 (4)는 식 (1)의 근사값을 구할 경우에 적절하게 이용된다.

3. 改善된 正解法

앞 節에서 전개된 連續보의 解法에 관한 理論은 參考文獻 1, 2에서 제시된 解法보다 더 改善된 것이다. 이 理論을 3, 4경간의 연속보에 적용시키는 과정을 구체적으로 전개하기로 한다.

3.1 三徑間 連續보

그림 2의 三徑間 連續보에서 不均衡모멘트의 合은 그림 1의 분배과정을 이용하면 다음과 같이 展開할 수 있다.

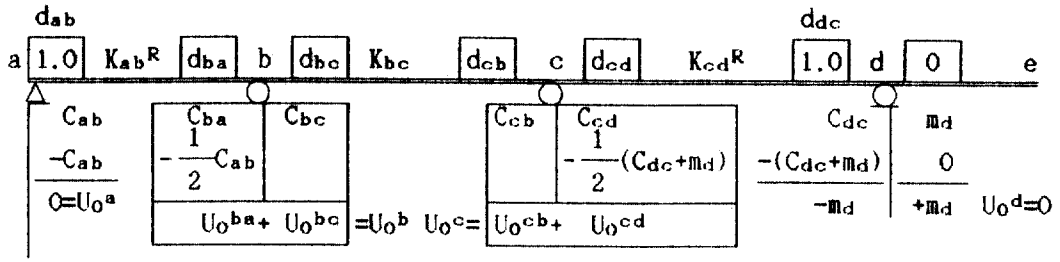


그림 2. 三徑間 연속보

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^b = U_0^b + U_1^b + {}_2^b + \cdots$$

$$= U_0^b + (U_2^b + U_4^b + \cdots) + (U_1^b + U_3^b + \cdots)$$

$$= U_0^b + \left(\frac{1}{4} d_{bc}\, d_{cb}\, U_0^b + \frac{1}{16} d_{bc}^2\, d_{cb}^2\, U_0^b + \cdots\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} d_{cb}\, U_0^c - \frac{1}{8} d_{cd}^2\, d_{bc}\, U_0^c + \cdots\right)$$

$$= U_0^b + \frac{1}{4} d_{bc}\, d_{cb}\, U_0^b \left[1 + \left(\frac{d_{bc}\, d_{cb}}{4}\right) + \left(\frac{d_{bc}\, d_{cb}}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$- \frac{1}{2} d_{cb}\, U_0^c \left[1 + \left(\frac{d_{bc}\, d_{cb}}{4}\right) + \left(\frac{d_{bc}\, d_{cb}}{4}\right)^2 + \cdots\right] \quad (5a)$$

그런데 $\frac{1}{4} d_{bc}\, d_{cb} < 1$이므로 식 (5a)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Sigma U_p^b = U_0^b + \frac{1}{4} d_{bc} d_{cb} \left(\frac{4}{4 - d_{cb} d_{bc}}\right) U_0^b$$

$$- \frac{1}{2} d_{cb} U_0^c \left(\frac{4}{4 - d_{cb} d_{bc}}\right) U_0^c$$

$$= \left(\frac{4}{4 - d_{bc} d_{cb}}\right) U_0^b - \frac{1}{2} d_{cb} \left(\frac{4}{4 - d_{bc} d_{cb}}\right) U_0^c$$

또는,

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^c = \frac{4}{4 - d_{bc} d_{cb}} \left(U_0^b - \frac{1}{2} d_{cb} U_0^c\right) \quad (5)$$

마찬가지로,

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^b = \frac{4}{4 - d_{bc} d_{cb}} \left(U_0^c - \frac{1}{2} d_{bc} U_0^b\right) \quad (6)$$

식 (5), (6)에서 計算된 값을 다음 式에 代入하면 三徑間 連續보에서 支點 b 또는 c의 모멘트를 얻게 된다.

$$M_b = -M_{ba} = -U_0^{ba} + d_{ba}(\Sigma U_p^b)$$

$$= -\left(C_{ba} - \frac{1}{2} C_{ab}\right) + d_{ba}(\Sigma U_p^b) \quad (7)$$

$$M_c = -M_{cd} = U_0^{cd} - d_{cd}(\Sigma U_p^c)$$

$$= \left(C_{cd} - \frac{1}{2} C_{dc}\right) - d_{cd}(\Sigma U_p^c) \quad (8)$$

3.2 四徑間 連續보

四徑間 연속보의 경우에 그림 1의 모멘트 분배 과정을 면밀하게 관찰하면 不均衡모멘트의 合은 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^b = U_0^b + U_1^b + U_2^b + \cdots$$

$$= U_0^b + \left(-\frac{1}{2}\right) d_{cb} U_0^c \left[1 + \left(\frac{A_0}{4}\right) + \left(\frac{A_0}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 d_{cb} d_{bc} U_0^b \left[1 + \left(\frac{A_0}{4}\right) + \left(\frac{A_0}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 d_{cb} d_{dc} U_0^d \left[1 + \left(\frac{A_0}{4}\right) + \left(\frac{A_0}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

또는,

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^b = U_0^b - \frac{1}{2} d_{cb} \left(\frac{4}{4 - A_0}\right) \left[U_0^c - \frac{1}{2} (d_{bc} U_0^b + d_{dc} U_0^d)\right] \quad (9)$$

마찬가지로,

$$\sum_{p=0}^{\infty} U_p^b = U_0^c + (U_1^c + U_3^c + \cdots) + (U_2^c + U_4^c + \cdots)$$

$$= U_0^c + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)(d_{bc} U_0^b + d_{dc} U_0^d)\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (d_{bc} U_0^b + d_{dc} U_0^d) A_0\right.$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)^5(d_{bc}U_0^b+d_{dc}U_0^d)A_0^2+\cdots]$$

$$+[\left(-\frac{1}{2}\right)U_0^cA_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^4U_0^cA_0^2+\cdots]$$

또는,

$$\sum_{p=0}^{\infty}U_p^c=U_0^c-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{4-A_0}\right)[(d_{bc}U_0^b+d_{dc}U_0^d)$$

$$-\frac{1}{2}A_0U_0^c] \tag{10}$$

마찬가지로,

$$\sum_{p=0}^{\infty}U_p^d=U_0^d-\frac{1}{2}d_{cd}\left(\frac{4}{4-A_0}\right)[U_0^c$$

$$-\frac{1}{2}(d_{bc}U_0^b+d_{dc}U_0^d)] \tag{11}$$

여기서

$$A_0=(d_{bc}d_{cb}+d_{cd}d_{dc}) \tag{12}$$

식 (1)을 四徑間 連續보에 適用시킨 다음식에 식 (9), (10), (11)의 ΣU_p^j값을 대입하면 四徑間 連續보의 支點모멘트의 값이 계산된다.

$$M_b=M_{bc}=-M_{ba}$$

$$=-[U_0^{ba}-d_{ba}(\Sigma U_p^d)] \tag{13}$$

$$M_c=M_{cd}=U_0^{cd}-d_{cd}(\Sigma U_p^c)-\frac{1}{2}d_{dc}(\Sigma U_p^d) \tag{14}$$

$$M_d=M_{de}=U_0^{de}-d_{de}(\Sigma U_p^d) \tag{15}$$

4. 多徑間 連續보의 近似解法

正解法에 관한 公式이 쉽게 可用하지 않을 경우, 또는 五徑間 이상의 연속보에서와 같이 엄밀한 의미의 正解가 存在하지 않을 경우에 近似解法이 사용될 수 있다. 五徑間 이상의 연속보에서는 $\sum_{p=0}^{\infty}U_p^j$의 계산에서 엄밀한 의미에서의 等比無限係數가 성립되지 않고 약간의 편기가 생긴다. 이는 고려하는 支點에서 멀리 떨어진 徑間의 영향때문이다. 여기서 전개하는 近似解도 거의 正解에 수렴하는 解가 된다는 것을 알 수 있다. 近似解이라고 하는 것은 식 (1)에 포함되어 있는 ΣU_p^j와 ΣU_p^k項은 近似的으로 구하고 이를 一種의 反復法으로 改善시켜 나간다는 것을 의미한다. 예를들어 四徑間 連續보에 대하여 식 (4)는 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\sum_{p=0}^{\infty}U_p^b=U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}\left(\sum_{p=0}^{\infty}U_p^c\right) \tag{16a}$$

$$\Sigma U_p^c=U_0^c-\frac{1}{2}d_{bc}\left(\Sigma U_p^b\right)-\frac{1}{2}d_{dc}(\Sigma U_p^d) \tag{16b}$$

$$\Sigma U_p^d=U_0^d-\frac{1}{2}d_{cd}(\Sigma U_p^c) \tag{16c}$$

식 (16a)계산시의 ΣU_p^c는 可用한 값이 없으므로 그 첫項인 U_0^c값을 대입하고 식 (16b)계산시는 可用한 최신의 값들, 즉, ΣU_p^b는 식 (16a)에서 구한 값을 대입하고 ΣU_p^d는 아직 可用한 값이없으므로 그 첫項인 U_0^d의 값을 대입하면 된다. 식 (16c)계산시의 ΣU_p^c는 바로전에 식 (16b)에서 계산한 값을 대입한다. 식 (16a), (16b), (16c)에서 계산된 최신의 ΣU_p^j 값들을 다시 식 (16a), (16b), (16c)에 Feed Back시키면 훨씬 改善된 ΣU_p^b, ΣU_p^c, ΣU_p^d값을 얻게 된다. 이들 改善된 값을 식 (13), (14), (15)에 대입하면 4경간 연속보의 支點모멘트 M_b, M_c, M_d의 값을 구하게 된다.

5. 影響線의 最大縱距

主要 活荷重은 일반적으로 영향선에서 최대종거에 위치시키게 되므로 영향선에서 최대종거의 위치와 그 값은 매우 중요한 것이다. 어떤 徑間에 移動單位荷重 P=1이 놓여 있을 때 각 지점 모멘트 M_j의 표현식을 구하면 최대 M_j의 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dM_j}{dx}=0 \tag{17}$$

特定한 徑間에 단위하중이 놓여 있을 때 최대 M_j가 되는 단위하중의 위치, 즉, M_j의 영향선의 최대종거의 위치는 식 (17)로부터 결정된다. 고정단 모멘트 C_{ij}는 x의 함수이며 M_j는 C_{ij}의 함수이므로 결국 M_j는 x의 함수가 된다. 三徑間 連續보와 四徑間 연속보에서 支點모멘트 M_j의 최대종거르 구하는 과정을 전개하기로 한다.

5.1 三徑間 連續보(그림 2)

1) ab(길이 L_1)간에 P=1이 놓이는 경우

$$C_{ba}=\frac{x^2(L_1-x)}{L_1^2},\quad C_{ab}=-\frac{x(L_1-x)^2}{L_1^2}$$이므로

$$U_0^b=C_{ba}-\frac{1}{2}C_{ab}=\frac{1}{2L_1^2}x(L_1^2-x^2)$$

(x는 지점 a로부터),

$$U_0^c=0$$

따라서,

식 (7);

$$M_b=(d_{ba}\alpha-1)U_0^b=(d_{ba}\alpha-1)\frac{1}{2L_1^2}x(L_1^2-x^2)\qquad(a)$$

여기서,

$$\alpha=\frac{4}{4-d_{bc}d_{cb}}\qquad(b)$$

$\frac{dM_b}{dx}=0$으로부터 徑間 ab에서 M_b의 영향선의 최대 종거의 위치는

$$x=\frac{L_1}{\sqrt{3}}=0.5774\,L_1\quad(\text{지점 a로부터})\qquad(18)$$

식 (8); $M_c=\frac{1}{2}d_{cd}\,d_{bc}\,\alpha\frac{1}{2L_1^2}x(L_1^2-x^2)$ (c)

$\frac{dM_c}{dx}=0$으로부터 M_c의 영향선의 최대종거의 위치는 식 (18)과 同一하다는 것을 알 수 있다.

2) bc(길이 L_2) 간에 P=1이 놓인 경우

$$U_0^b=C_{bc}=-\frac{1}{L_2^2}x(L_2-x)^2,\quad U_0^c=C_{cb}=\frac{1}{L_2^2}x^2(L_2-x)$$

따라서,

$$M_b=d_{ba}\alpha\left(U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}\,U_0^c\right)$$

$$=-\frac{d_{ba}}{L_2^2}\alpha[x(L_2-x)^2+\frac{1}{2}d_{cb}\,x^2(L_2-x)]\qquad(d)$$

$\frac{dM_b}{dx}=0$으로부터 徑間 bc에서 M_b의 영향선의 최대 종거의 위치는

$$x=\frac{(4-d_{cb})-\sqrt{4-2d_{cb}+d_{cb}^2}}{6\left(1-\frac{1}{2}d_{cb}\right)}L_2$$

(지점 b로부터)　(19)

$$M_c=-d_{cd}\,\alpha\,(U_0^c-\frac{1}{2}d_{bc}\,U_0^b)$$

$$=-\frac{d_{cd}}{L_2^2}\alpha\,[x^2(L_2-x)+\frac{1}{2}d_{bc}\,x(L_2-x)^2]\qquad(e)$$

$\frac{dM_c}{dx}=0$으로부터 M_c의 영향선의 최대종거의 위치는

$$x=\frac{2(1-d_{bc})+\sqrt{4-2d_{bc}+d_{bc}^2}}{6\left(1-\frac{1}{2}d_{bc}\right)}L_2$$

(지점 b로부터)　(20)

3) dc(길이 L_3) 간에 P=1이 놓인 경우

x를 지점 d로부터 P=1까지의 거리라고 하면, 이 경우의 支點모멘트의 표현은 ab간에 P=1이 놓인 경우와 대칭적이므로 M_b, M_c의 표현은 각각 ab간에 P=1이 놓인 경우의 M_c, M_b의 표현과 類似하게 된다. 그러므로 dc간에 단위하중이 놓여 있을 때 M_b와 M_c의 최대 종거의 위치는,

$$x=\frac{L_3}{\sqrt{3}}\quad(\text{지점 d로부터})\qquad(21)$$

5.2 四徑間 連續보(그림 1)

1) 最外側徑間인 ab(길이 L_1)와 ed(길이 L_4)에 단위하중 P=1이 놓이는 경우 支點모멘트 M_b, M_c, M_d의 영향선의 최대 종거의 위치는 三徑間 連續보의 경우와 마찬가지로 다음과 같이 쓸 수 있다.

ab간에 단위 하중이 놓이는 경우;

$$x=\frac{L_1}{\sqrt{3}}\quad(\text{지점 a로부터})\qquad(22)$$

ed간에 단위 하중이 놓이는 경우;

$$x=\frac{L_4}{\sqrt{3}}\quad(\text{지점 e로부터})\qquad(23)$$

2) bc(길이 L_2)간에 P=1이 놓이는 경우

$$U_0^b = C_{bc} = -\frac{x(L_2-x)^2}{L_2^2}\ ,$$

$$U_0^c = C_{cb} = -\frac{x^2(L_2-x)}{L_2^2}\ ,\ U_0^d = 0$$

따라서,

$$M_b = d_{ba}[U_0^b - \frac{1}{2}d_{cb}\,\alpha_0(U_0^c - \frac{1}{2}\,d_{bc}\,U_0^b)]$$

$$= d_{ba}(1+\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}\,\alpha_0)U_0^b - \frac{1}{2}\,d_{ba}d_{cb}\,\alpha_0 U_0^c \qquad (a)$$

$\frac{dM_b}{dx}=0$으로부터 徑間 bc에서 M_b의 최대 종거의 위치는,

$$x = \frac{(2m-1)-\sqrt{m^2-m+1}}{3(m-1)}\ L_2 \text{ (지점 b로부터)} \qquad (24)$$

여기서,

$$A_0 = d_{bc}d_{cb} + d_{cd}d_{dc} \qquad (b)$$

$$\alpha_0 = \frac{4}{4-A_0} \qquad (c)$$

$$x = \frac{4+d_{cb}d_{bc}\alpha_0}{2d_{cb}\alpha_0} \qquad (d)$$

$$M_c = \frac{1}{2}d_{cd}d_{bc}\alpha_0\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)U_0^b - d_{cd}[1+\frac{\alpha_0}{4}(A_0-d_{dc})]U_0^c \qquad (e)$$

$\frac{dM_c}{dx}=0$으로부터 徑間 bc에서 M_c의 최대 종거의 위치는 식 (24)로부터 구할 수 있으며 m의 값만 다음과 같이 된다.

$$m = \frac{2\,d_{bc}\,\alpha_0\left(1-\frac{1}{4}\,d_{dc}\right)}{4+\alpha_0(A_0-d_{dc})} \qquad (f)$$

$$M_d = \frac{1}{2}\,d_{cd}d_{de}\alpha_0\left(U_0^c - \frac{1}{2}\,d_{bc}U_0^b\right) \qquad (g)$$

$\frac{dM_d}{dx}=0$으로부터 M_d의 영향선의 최대 종거의 위치는,

$$x = \frac{2(1-d_{bc})+\sqrt{4-2\,d_{bc}+d_{bc}^2}}{3(2-d_{bc})}\,L_2$$

(지점 b로부터) (25)

3) dc(길이 L_3)간에 P=1이 놓인 경우

dc간에 P=1이 놓여 있을 때 支點모멘트 M_b, M_c, M_d에 관한 표현은 그 대칭성으로 인하여 bc간에 P=1이 놓여 있는 경우의 M_d, M_c, M_b와 類似하다. 따라서 최대 종거의 위치도 그 표현이 대칭적임을 알 수 있다.

M_b의 영향선의 최대 종거의 위치;

$$x = \frac{2(1-d_{dc})+\sqrt{4-2\,d_{dc}+d_{dc}^2}}{3(2-d_{dc})}\,L_3 \qquad (26)$$

M_c의 영향선의 최대 종거의 위치;

$$x = \frac{(2m-1)-\sqrt{m^2-m+1}}{3(m-1)}\ L_3$$

(지점 d로부터) (26)

여기서 $m = \dfrac{2\,d_{dc}\,\alpha_0\left(-\frac{1}{2}\,d_{bc}\right)}{4+\alpha_0(A_0-d_{bc})}$ (h)

M_d의 영향선의 최대 종거의 위치는 식 (27)로부터 구할 수 있으며, 이 경우의 m의 값은 다음과 같다.

$$m = \frac{4+d_{cd}d_{dc}\alpha_0}{2d_{cd}\,\alpha_0} \qquad (i)$$

5.3 最大 M_j의 값

영향선에서 그 종거 (y좌표)의 값은 단위하중의 위치에 표시한다. 식 (18)에서 식 (27)까지의 x의 값을 해당 M_j의 표현식에 대입하면 그 경간내에서의 最大 M_j값을 얻게 된다.

6. 連續보의 數値例

6.1 數値例 1.

그림 3과 같은 三徑間 連續보에서 支點모멘트 M_b의 影響線을 그리기로 한다.

식 (7); $M_b = -U_0^{ba} + d_{ba}(\Sigma U_p^b)$

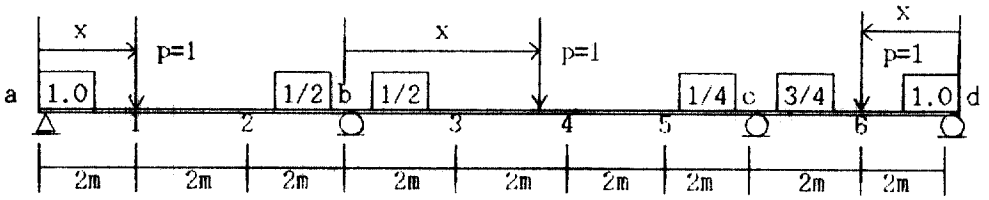


그림 3. 三徑間 連續보의 例

$$=-\left(C_a-\frac{1}{2}C_{ab}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)(\Sigma U_p^b)$$

6.1.1 正解法

(a) ab간에 p=1이 작용하는 경우

고정단모멘트; $C_{ab}=-\dfrac{(1)x(L_{ab}-x)^2}{L_{ab}^2}$

$$=-\frac{x(6-x)^2}{36},\quad C_{ba}=\frac{x^2(6-x)}{36} \qquad (a)$$

$$U_0^b=U_0^{ba}+U_0^{bc}=U_0^{ba}+0=C_{ba}-\frac{1}{2}C_{ab}$$

$$=\frac{x^2(6-x)}{36}+\frac{x(6-x)^2}{72}+0=\frac{x}{72}(36-x^2) \qquad (b)$$

$$U_0^c=0$$

$$\frac{4}{4-d_{bc}d_{cb}}=\frac{4}{4-(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})}=\frac{32}{31} \qquad (c)$$

식 (5); $\Sigma U_p^b=\dfrac{4}{4-d_{bc}d_{cb}}(U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}U_0^c)$

$$=\left(\frac{32}{31}\right)\left[\frac{x}{72}(36-x^2)\right]=\frac{4}{279}x(36-x^2) \qquad (d)$$

식 (7); $M_b=-\dfrac{x(36-x^2}{72}+\left(\frac{1}{2}\right)[\frac{4}{279}x(36-x^2)]$

$$=-\frac{5}{744}x(36-x^2) \qquad (e)$$

식 (e)에서

x=2 m이면 $\Sigma U_p^b=0.9176$ $M_b=-0.4301$(점1)

x=4 m이면 $\Sigma U_p^b=1.147$ $M_b=-0.5376$(점2)

최대 M_b, 즉, M_b의 최대종거의 위치;

$$x=\frac{L_1}{\sqrt{3}}=0.5774(6\text{ m})=3.464\text{ m(a점으로부터)}$$

최대 $M_b=-\dfrac{5}{744}\approx(36-x^2)=0.5587$

(b) bc간에 p=1이 作用하는 경우

고정단모멘트; $C_{bc}=-\dfrac{x(8-x)^2}{64}$, $C_{cb}=\dfrac{x^2(8-x)}{64}$ (f)

$$U_0^b=U_0^{bc}+U_0^{ba}=C_{bc}+0,\quad U_0^c=U_0^{cb}=C_{cb} \qquad (g)$$

식 (5); $\Sigma U_p^b=\dfrac{4}{4-d_{bc}d_{cb}}\left(U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}U_0^c\right)$

$$=\left(\frac{32}{31}\right)\left[-\frac{x(8-x)^2}{64}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x^2(8-x)}{64}\right]$$

$$=-\frac{1}{62}x(8-x)\left(8-\frac{7}{8}x\right) \qquad (h)$$

식 (7); $M_b=-0+d_{ba}(\Sigma U_p^b)$

$$=-\frac{x}{124}(8-x)\left(8-\frac{7}{8}x\right) \qquad (i)$$

식 (i)에서 x=2이면 $M_b=-0.6048$ (점 3)

x=4이면 $M_b=-0.5806$ (점 4)

x=6이면 $M_b=-0.2661$ (점 5)

M_b의 최대종거의 위치; $d_{cb}=\dfrac{1}{4}=0.25$, $L_2=8$ m

식 (19);

$$x=\frac{(4-d_{cb})-\sqrt{4-2d_{cb}+d_{cb}^2}}{6\left(1-\frac{1}{2}d_{cb}\right)}L_2=2.838\text{ m}$$

(점 b로부터)

最大 $M_b=-\dfrac{x}{124}(8-x)\left(8-\frac{7}{8}x\right)=-0.6518$

(c) dc간에 p=1이 作用하는 경우

고정단모멘트;

$$C_{cd}=-\frac{x^2(4-x)}{16},\quad C_{dc}=+\frac{x(4-x)^2}{16} \qquad (j)$$

여기서 x는 부재 dc에서 d로부터 p=1의 작용점까지의 거리이다.

$$U_0^b=U_0^{ba}+U_0^{bc}=0$$

$$U_0^c=U_0^{cb}+U_0^{cd}=0+(C_{cd}-\frac{1}{2}C_{dc})$$

$$=-\frac{x^2(4-x)}{16}-(\frac{1}{2})\frac{x(4-x)^2}{16}=-\frac{x}{32}(16-x^2) \qquad (k)$$

식 (5); $\Sigma U_p^b=\frac{4}{4-d_{bc}d_{cb}}\left(U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}U_0^c\right)$

$$=\left(\frac{32}{31}\right)\left[0-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{x}{32}\right)(16-x^2)\right]$$

$$=\frac{x}{248}(16-x^2) \qquad (l)$$

식 (7); $M_b=-0+\frac{1}{2}(\Sigma U_p^b)=\frac{x}{496}(16-x^2)$ (m)

식 (m)에서 x=2이면 $M_b=+0.0484$(점 6)

M_b의 최대종거의 위치;

$$x=\frac{L_3}{\sqrt{3}}=0.5774(4)=2.31\ \text{m(지점 d로부터)}$$

최대 $M_b=\frac{x}{496}(16-x^2)=0.0497$

그림 4는 위에서 계산된 결과를 작도한 것이다.

6.1.2 近似解法

近似解法의 과정은 다음과 같다.

6.1.2.1 ΣU_p^j의 1次 改善

3경간 연속보에 대하여 식 (4)를 적용하면

$$\Sigma U_p^b=U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}(\Sigma U_p^c) \qquad (A)$$

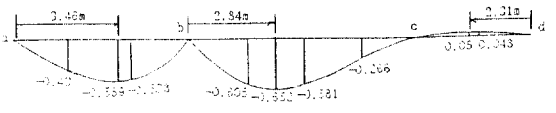


그림 4. 三徑間 連續보의 M_b의 影響線

이 계산에서 ΣU_p^c는 아직 可用한 값이없으므로 그 첫項인 U_0^c의 값을 사용한다.

$$\Sigma U_p^c=U_0^c-\frac{1}{2}d_{bc}(\Sigma U_p^b) \qquad (B)$$

이 계산에서 up-to-date한 ΣU_p^b는 식 (A)로부터 얻은 값이다.

6.1.2.2 ΣU_p^j의 2次 改善

식 (A)와 (B)에서 얻은 ΣU_p^b와 ΣU_p^c의 값을 개량하는 과정이다. 식 (B)에서 계산된 ΣU_p^c의 값을 식 (A)에 대입하면 개량된 ΣU_p^b값을 얻게 되고, 이를 식 (B)에 대입하면 훨씬 개선된 ΣU_p^c값이 나온다. 그러나 2, 3次 改善 정도로도 충분한 경우가 많다. 이 數値例에 대하여 近似解法을 적용하면 다음과 같다.

(a) ab간에 p=1이 작용하는 경우

x=2인 경우(점 1)의 초기불균형 모멘트의 값;

$$U_0^b=\frac{x}{72}(36-x^2)=\frac{8}{9}=0.8889$$

$$U_0^c=0$$

여기서 x는 地點 a로부터 p=1 작용점까지의 거리이다.

ΣU_p^j의 1次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b=U_0^b-\frac{1}{2}d_{cb}(\Sigma U_p^c)$

$$=0.8889-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(0)=0.8889$$

여기서 ΣU_p^c는 우선 $U_0^c=0$을 대입하였다.

식 (B); $\Sigma U_p^c=U_0^c-\frac{1}{2}d_{bc}(\Sigma U_p^b)$

$$=(0)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(0.8889)=-0.2222$$

ΣU_p^j의 2次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b=0.8889-\frac{1}{8}(-0.2222)=0.9167$

식 (A); $\Sigma U_p^c=-\frac{1}{4}(0.9167)=-0.2292$

ΣU_p^j의 3次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = 0.8889 - \frac{1}{8}(-0.2292) = 0.9175$

따라서 단위하중 P=1이 점 1(x=2 m)에 놓여 있을 때 M_b의 값은 다음과 같이 된다.

식 (7); $M_b = -\left(C_{ba} - \frac{1}{2}C_{ab}\right) + d_{ba}(\Sigma U_p^b)$

$$= -\frac{2}{72}(36-2^2) + \frac{1}{2}(0.9175)$$

$$= -0.4301 \text{(정답 } -0.4301\text{)} \text{ (점 1)}$$

x=4 m(점 2)인 경우에 대해서도 $U_0^b = \frac{x}{72}(36-x^2)$에 x=4를 대입하고 똑같은 과정으로 계산을 수행하면 $\Sigma U_p^b = 1.147$을 얻게 되며, 이 경우 $M_b = -0.5376$ (정답 −0.5376)이 된다.

(b) bc간에 p=1이 작용하는 경우

初期의 불균형모멘트;

$$U_0^b = U_0^{bc} = C_{bc} = -\frac{x}{64}(8-x)^2$$

$$U_0^c = U_0^{cb} = C_{cb} = -\frac{x^2}{64}(8-x)$$

여기서 x는 지점 b로부터 p=1 작용점까지의 거리이다.

x=2인 경우(점 3)의 초기불균형 모멘트의 값;

$$U_0^b = -\frac{2}{64}(8-2)^2 = -1.125$$

$$U_0^c = -\frac{(2)^2}{64}(8-2) = 0.375$$

ΣU_p^j의 1次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = U_0^b - \frac{1}{2}d_{cb}(\Sigma U_p^b)$

$$= -1.125 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(0.375) = -1.172$$

여기서 ΣU_p^c는 미지이므로 우선 U_0^c의 값을 대입하였다.

식 (B); $\Sigma U_p^c = U_0^c - \frac{1}{2}d_{bc}(\Sigma U_p^b)$

$$= 0.375 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-1.172) = 0.668$$

ΣU_p^j의 2次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = -1.125 - \frac{1}{8}(0.668) = -1.209$

식 (B); $\Sigma U_p^c = 0.375 - \frac{1}{4}(-1.209) = 0.677$

ΣU_p^j의 3次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = -1.125 - \frac{1}{8}(0.677) = -1.210$

支點모멘트;

식 (7); $M_b = -\left(C_{ba} - \frac{1}{2}C_{ab}\right) + d_{ba}(\Sigma U_p^b)$

$$= -0 + \frac{1}{2}(-1.21) = -0.6048$$

(正答 −0.6048) (점 3)

점 4(x=4 m), 점 5(x=6 m)에 단위 하중 P=1이 위치했을 때의 M_b의 값도 똑같은 과정으로 구할 수 있다.

x=4 m일 때(점 4), $U_0^b = -\frac{x}{64}(8-x)^2 = -1$,

$U_0^c = 1$, $\Sigma U_p^b = -1.161$

따라서 $M_b = -0.5806$(정답 −0.5806)을 얻는다.

x=6 m일 때(점 5), $U_0^b = -\frac{x}{64}(8-x)^2 = -0.375$,

$U_0^c = 1.125$, $\Sigma U_p^b = -0.5322$

따라서 $M_b = -0.2661$(정답 −0.2661)가 된다.

(c) dc간에 p=1이 作用하는 경우

初期의 불균형모멘트;

$U_0^b = U_0^{ba} + U_0^{bc} = 0$

$$U_0^c = U_0^{cb} + U_0^{cd} = 0 + (C_{cd} - \frac{1}{2}C_{dc}) = -\frac{x}{32}(16-x^2)$$

여기서 x는 지점 d로부터 p=1까지의 거리이다.

x=2인 경우 (점 6)의 불균형 모멘트의 값;

$U_0^b = 0$, $U_0^c = -0.75$

ΣU_p^j의 1次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = U_0^b - \frac{1}{2}d_{cb}(\Sigma U_p^c)$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(-0.75) = 0.0938$$

여기서 ΣU_p^c는 可用한 값이 없으므로 그 첫項 U_0^c를 대입하였다.

식 (B); $\Sigma U_p^c = U_0^c - \frac{1}{2} d_{bc}(\Sigma U_p^b)$

$$= -0.75 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(0.0938) = -0.7734$$

ΣU_p^j의 2次 改善;

식 (A); $\Sigma U_p^b = -\frac{1}{8}(-0.7734) = 0.0967$

支點모멘트;

식 (7); $M_b = 0.0483$(정답 0.0484) (점 6)

6.2 數値例 2

그림 4(a)의 四徑間 연속보를 近似解法으로 해석하기로 한다. 이 보에서 모든 부재의 EI는 일정하다.

ΣU_p^j를 改善할 때는 式 (16)에 항상 可用한 '最新의 값'을 대입하여야 한다.

ΣU_p^j의 1次 改善;

$$\Sigma U_p^b = U_0^b - \frac{1}{2} d_{cb}(\Sigma U_p^c) = -12 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\right)(21)$$
$$= -16.5$$

여기서 ΣU_p^c는 아직 可用値가 없으므로 $U_0^c = 21$을 대입하였다.

$$\Sigma U_p^c = U_0^c = -\frac{1}{2} d_{bc}(\Sigma U_p^b) - \frac{1}{2} d_{dc}(\Sigma U_p^d)$$
$$= 21 - \frac{1}{2}(0.4)(-16.5) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-3) = 25.05$$

여기서 ΣU_p^b는 바로전에 계산한 값이고, ΣU_p^d는 우선 $U_0^d = -3$을 대입하고 있다.

$$\Sigma U_p^d = U_0^d - \frac{1}{2} d_{cd}(\Sigma U_p^c) = -3 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)(25.05)$$
$$= -10.16$$

ΣU_p^j의 2次 改善;

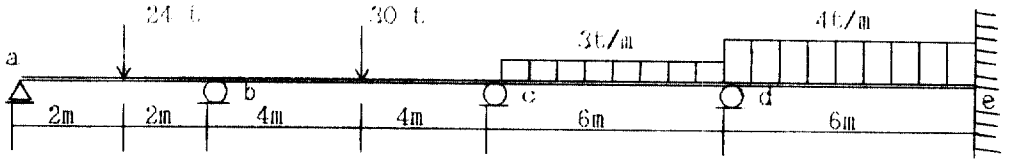
$$\Sigma U_p^b = -12 - \frac{3}{14}(25.05) = -17.37$$

$$\Sigma U_p^c = 21 - 0.2(-17.37) - \frac{1}{4}(-10.16) = 27.01$$

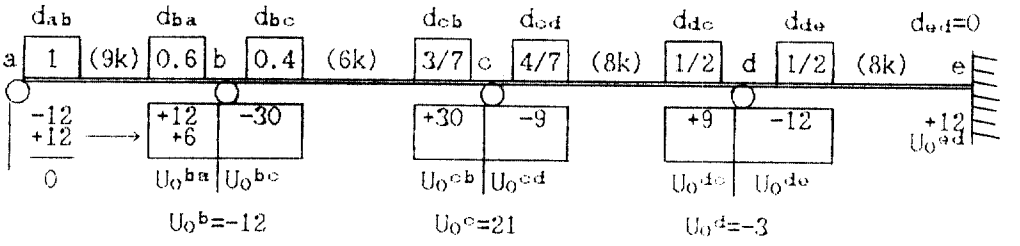
$$\Sigma U_p^d = -3 - \frac{2}{7}(27.01) = -10.72$$

ΣU_p^j의 3次 改善;

$$\Sigma U_p^b = -12 - \frac{3}{14}(27.01) = -17.79$$



(a) 주어진 연속보



(b) 四徑間 連續보의 解

그림 5. 四徑間 連續보의 例

$$\Sigma U_p^c = 21 - 0.2(-17.79) - \frac{1}{4}(-10.72) = 27.24$$

$$\Sigma U_p^d = -3 - \frac{2}{7}(27.24) = -10.78$$

支點모멘트

식 (1); $M_j = M_{jk} = U_0^{jk} - d_{jk}(\Sigma U_p^j) - \frac{1}{2} d_{kj}(\Sigma U_p^k)$

$$M_b = M_{bc} = U_0^{bc} - d_{bc}(\Sigma U_p^b) - \frac{1}{2} d_{cb}(\Sigma U_p^c)$$

$$= -30 - 0.4(-17.79) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\right)(27.24)$$

$$= -28.721$$

$$M_c = M_{cd} = U_0^{cd} - d_{cd}(\Sigma U_p^c) - \frac{1}{2} d_{dc}(\Sigma U_p^d)$$

$$= -9 - \frac{4}{7}(27.24) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-10.78) = -21.86$$

$$M_d = M_{de} = U_0^{de} - d_{de}(\Sigma U_p^d)$$

$$= -12 - \left(\frac{1}{2}\right)(-10.78) = -6.609$$

$$M_e = -M_{ed} = -U_0^{ed} + \frac{1}{2} d_{de}(\Sigma U_p^d)$$

$$= -12 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-10.782) = -14.696$$

ΣU_p^j의 近似값, 1次 改善된 값, 2次 改善된 값, 3次 改善된 값을 각각 식 (1)에 대입하여 얻은 支點 모멘트 M_j의 값을 비교한 결과는 다음 표와 같다.

1차 개선된 ΣU_p^i값을 식 (1)에 대입하면 94.9～104.8 %, 2次 改善된 ΣU_p^j값을 대입하면 99.4～100.5%라는 아주 정확한 支點모멘트를 얻게 되며 ΣU_p^j의 3次 改善값은 거의 불필요함을 나타내고 있다. ΣU_p^j 개선과정은 아주 간단하며 이 例題에서는 2차 개선만으로도 충분한 정확도를 나타내고 있다. 더욱 중요한 것은 五徑間 以上의 多徑間 連續보의 해석은 이 例題의 해석 과정과 같은 近似解法만이 적용가능하다는 사실이다.

7. 結 論

連續보는 그 徑間의 수가 증가할수록 解析이 복잡해지며 在來式 構造解析技法 중에서 탁월하다는 처짐角法이나 모멘트分配法 마저도 適用上의 限界가 있다. 本 研究는 四徑間까지의 連續보에서는 적용되는 正解法을 參考文獻보다 더 改善된 형태로 개발하였으며, 또한 모든 多徑間 連續보에서 그 支點 모멘트를 계산하는 전혀 새로운 近似解法을 제시하고 있다. 支點모멘트를 구하는 一般式을 개발하고 그 適用 과정을 數値例로 例示하여 正確性과 簡便性을 立證하였다. 얻어진 結果를 요약하면 다음과 같다.

1) 모멘트 分配과정을 이용하여 4경간까지의 연

표 1. 해석 결과의 比較 (단위 : t·m)

식 (1)	M_b	M_c	M_d	M_e	비 고
컴퓨터 解	−28.705 (100)	−21.883 (100)	−6.605 (100)	−14.698 (100)	
1次 改善값	−28.768 (100.2)	−20.774 (94.9)	−6.92 (104.8)	−14.54 (98.9)	식 (4) $\Sigma U_p^j = U_0^j - \frac{1}{2} d_{ji} \Sigma U_j^i - \frac{1}{2} d_{kj} \Sigma U_j^k$
2次 改善값	−28.84 (100.5)	−21.754 (99.4)	−6.64 (100.5)	−14.68 (99.9)	
3次 改善값	−28.721 (100.0)	−21.87 (99.9)	−6.609 (100.1)	−14.696 (100.0)	

속보에 적용되는 正解法을 개발하였으며 數値例에서 보는 바와같이 參考文獻 1의 方法보다 훨씬 便利하게 改善된 解法이다.

2) 一般的으로 多徑間일수록 連續보의 해석은 幾何級數的으로 어려워진다. 그러나 本 硏究에서 제시된 近似解法은 徑間수에 관계없이 모든 연속보의 각 支點모멘트를 算定하는데 아주 편리하게 적용될 수 있으며 多徑間일수록 算術級數的인 어려움이 있을 정도이다. 또한 이 近似解法의 정확도는 支點 j에서의 不均衡모멘트의 代數合인 ΣU_p^j값을 改善시킴에 따라 거의 正解에 접근하고 있다. ΣU_p^j의 개선은 아주 간단하며 2차 개선 정도로도 M_j의 값이 만족스러운 正確度를 나타내고 있음을 알 수 있다.

3) 本 硏究는 특히 多徑間連續보의 影響線의 作圖에 아주 便利하게 적용될 수 있다는 것을 例示하고 있다. 지금까지 주로 많이 이용하는 Müller-Breslau의 原理는 多徑間일수록 그 적용이 복잡하며 비실용적이다. 그러나 이 연구에서 제시된 정해법이나 近似解法 어느것도 쉽고도 편리하게 영향선의 作圖에 이용될 수 있음을 보여 주고 있다.

감사의 글

이 연구는 1992년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었으며 그 재정적 지원에 대하여 감사의 뜻을 표한다.

參考文獻

1. 梁昌鉉, "連續보의 解法에 관한 새로운 方法 - 모우멘트分配法의 定式化", **대한토목학회논문집**, 제10권 제4호, 1990. 12.
2. 梁昌鉉, "多徑間 連續보의 解法에 관한 새로운 方法" **대한토목학회논문집**, 제12권 제1호, 1992. 3.
3. 梁昌鉉, "節點移動이 있는 構造剛節뼈대의 直接解法", **대한토목학회논문집**, 제12권 제3호, 1992. 9.

(接受 : 1993. 4. 15)