

## Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중 해석

Free Vibrations and Buckling Loads of Beam-Columns on  
Winkler-Type Foundations

정진섭\* · 이병구\* · 오상진\*\*

Jeong, Jin Seob · Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin

## Abstract

The main purpose of this paper is to present both the natural frequencies and the buckling loads of beam-columns on Winkler-type foundations. The ordinary differential equations governing the free vibrations and the buckling loads of beam-columns on Winkler-type foundation are derived as nondimensional forms. The Runge-Kutta method and Determinant Search method are used to perform the integration of the differential equations and to determine the eigenvalues(natural frequencies and buckling loads), respectively. Hinged-hinged and clamped-clamped end constraints are applied in numerical examples. The relation between frequency parameter and elastic foundation parameter is presented in figure. The effects of axial loads on the natural frequencies of beam-columns on elastic foundations are investigated and the relation between buckling load parameter and elastic foundation parameter is also analyzed. The relation between foundation rested ratio and frequency parameter, buckling load parameter are investigated. The beam-columns on non-homogeneous elastic foundation are analyzed and typical mode shapes are also presented.

## 요 지

이 논문은 Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중 해석에 관한 연구이다. 축하중을 받는 탄성지반위에 놓인 보-기둥이 자유진동할 때 보-기둥 미소요소에 작용하는 힘들의 동적평형방정식으로 부터 지배 미분방정식을 유도하였으며, 물리적인 특성관계를 이용하여 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 좌굴을 지배하는 미분방정식을 직접 유도하였다. 유도된 미분방정식은 수치해석기법인 Runge-Kutta method와 행렬값 탐사법을 이용하여 해석하였다. 실제의 수치예에서는 양단회전 및 양단고정의 단부조건에 대하여 수치해석하였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 지반탄성계수 관계, 무차원 좌굴하중과 지반탄성계수 관계 및 축하중과 무차원 고유진동수 관계를 그림에 나타내었으며, 탄성지 지구간의 변화에 따른 고유진동수 및 좌굴하중 변화를 고찰하였다. 또한 3구간으로 나누어지는 비균질 지반위에 놓인 보-기둥의 축하중과 고유진동수 관계를 고찰하였으며 이에 대한 진동형을 그림에 나타내었다.

\* 정회원 : 원광대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\* 정회원 : 원광대학교 대학원 박사과정

## 1. 서론

여러 구조단위 중 보-기둥은 평판 등과 함께 지반 위에서 구조물을 직접 지지하거나 지중구조물과의 연결을 위한 구조로서 이용되고 있어 지반 위에 놓인 보-기둥요소의 정적, 동적해석에 관한 연구는 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상이 되고 있다. 또한 지반위에 놓인 보요소에는 상부구조의 거동에 따라 고려되지 않은 축방향하중이 발생하는 경우가 있으며, 저장탱크 등과 같은 거대한 구조물을 지지하는 지중말뚝에는 내부저장물의 양에 따라 다양한 축하중이 작용하게 된다. 이러한 축하중은 지반위에 놓인 보-기둥요소의 동적거동에 현저한 영향을 미칠 것으로 사료되며 이에 대한 연구가 함께 병행되어야 한다.

자연계의 지반이나 기타 구조물과 접하는 면은 성질이 다양하고 복잡하여 수학적으로 정확하게 모델링하기 어려우므로 지반과 구조물의 상호거동을 규명하는 것은 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도로써 Kerr<sup>(1)</sup>는 지반을 일반적으로 표현할 수 있는 수학적 모델을 제시하였으며, 여기서 그는 Winkler, Hentenyi, Pasternak, Vlazov 모델 등<sup>(2)</sup>은 일반화된 모델의 특별한 경우임을 보여주었다. 그러나 일반적으로 공학에서 지반위에 놓인 구조물은 지반이 무한개의 스프링으로 구성되었다고 가정하는 Winkler 모델로 정의함으로써 주로 해석된다.

탄성지반위에 놓인 보-기둥요소의 정적, 동적거동에 대한 연구는 많은 문헌들에서 찾아 볼 수 있으며 본 연구와 관련된 문헌들의 내용을 고찰하면 다음과 같다.

1978년 Abbas 등<sup>(3)</sup>은 탄성지반위에 놓인 Timoshenko보의 동적안정성에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 에너지이론을 이용하여 Timoshenko보의 안정성 해석을 위한 유한요소모델을 개발하였으며, 회전-회전 및 고정-자유의 단부조건을 적용하여 자유진동 특성을 고찰하였다. 1982년 Nielsen<sup>(4)</sup>은 원형단면을 갖는 말뚝의 진동에 대한 매립 토층의 저항성에 관한 연구를 수행하였다. 이 논문에서는 토층을 이력감쇠물질로 구성된 연속체로 가정하였으며, 말뚝의 진동에 대한 저항성이 excitation frequency, 말뚝의 세장비 및 토질매개변수에 의존

함을 고찰하였다.

1983년 Pavlovic 등<sup>(5)</sup>은 지반계수가 보의 지반에 따라 선형적으로 변화하는 지반에 놓인 보의 자유진동에 관한 논문을 발표하였다. 1986년 Yankelevsky 등<sup>(6)</sup>은 탄성지반위에 놓인 보의 정적해석에 관한 논문에서 Bernoulli-Euler보 이론을 적용하여 횡방향하중과 축하중을 받는 보의 정적해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 개발하였다. 1987년 Shastry 등<sup>(7)</sup>은 탄성지반위에 놓인 캔틸레버 보의 동적안정성에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 유한요소법을 이용하여 지반계수 변화에 따른 캔틸레버 보의 동적안정영역을 결정하였다.

1987년 Matsuda 등<sup>(8)</sup>은 비균질 지반위에 놓인 보의 해석에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 처짐곡선의 미분방정식을 적분식으로 변환시키고 이를 수치적분함으로써 비균질 지반위에 놓인 보의 정적거동 해석을 수행할 수 있는 근사해법을 제시하였다. 1988년 Valsangkar 등<sup>(9)</sup>은 축하중을 받는 부분매립된 말뚝의 자유진동에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 Bernoulli-Euler보 이론을 이용하여 구간별 지배미분방정식을 유도하였으며 다양한 지반조건에 대한 해석결과를 고찰하였다.

본 연구는 축하중을 받는 탄성지반위에 놓인 보-기둥요소의 자유진동 특성을 규명하고 좌굴하중을 해석하는데 연구목적이 있다. 이를 위해 기존문헌과는 달리 축하중효과와 탄성지반효과를 동시에 고려한 보-기둥요소의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 유도된 미분방정식으로 부터 물리적인 특성관계(작용하중이 좌굴하중에 도달했을 때 대상구조의 고유진동수는 "0"이다)를 이용하여 좌굴을 지배하는 미분방정식을 유도한다.

본 연구에서 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 보-기둥요소는 선형탄성체이다.
- 2) 미분방정식의 유도는 미소처짐이론에 의한다.
- 3) 진동변위는 횡방향변위만을 고려한다.
- 4) 보-기둥요소는 비감쇠 조화진동을 한다.

## 2. 수학적 모델

그림 1은 축하중을 받는 Winkler 지반 위에 놓인 보-기둥요소의 진동모드를 나타낸 것이다. 본 연구

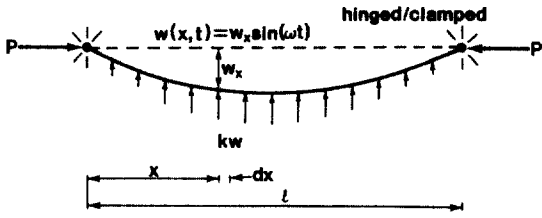


그림 1. 축하중을 받는 지반 위에 놓인 보-기둥의 진동형

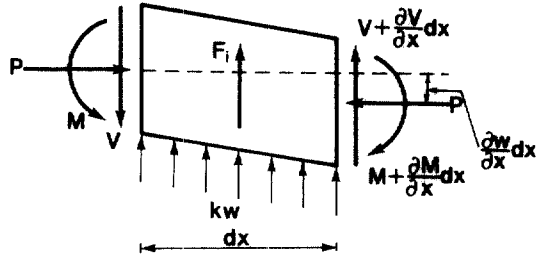


그림 2. 보-기둥 미소요소에 작용하는 힘

에서 보-기둥요소가 조화진동을 한다고 가정하면 보-기둥요소에 발생하는 변위  $w$ , 합응력  $V$ ,  $M$  및 관성력  $F_i$ 의 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$V(x,t) = V_x \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$M(x,t) = M_x \sin(\omega t) \quad (3)$$

$$F_i(x,t) = F_{ix} \sin(\omega t) \quad (4)$$

식 (1)-(4)에서  $w_x$ ,  $V_x$ ,  $M_x$ ,  $F_{ix}$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega$ 는 고유진동수(rad/sec),  $t$ 는 시간이다.

축하중을 받는 보-기둥이 면내에서 자유진동하게 되면 그림 2에서와 같이 보-기둥 미소요소에는 단부축하중에 의한  $P$ 가 작용하며, 시간에 따라 변화하는 진동변위에 의해 전단력  $V$ , 휨모멘트  $M$  및 지반반력  $kw$ 가 발생하고, 질량을 가지고 있는 부재 미소요소가 진동함으로써 관성력  $F_i$ 가 작용하게 된다. 그림 2에서 부재 미소요소에 작용하는 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$V - \frac{\partial M}{\partial x} - P \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + F_i + kw = 0 \quad (6)$$

식 (6)에서  $k$ 는 지반탄성계수이며, 그림 2에서 부재 미소요소에 작용하는 힘들은 화살표방향을 (+)로 한다.

보-기둥의 모멘트-곡률관계는 다음 식 (7)과 같으며, 관성력  $F_i$ 는 다음 식 (8)과 같다.

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$F_i = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8)$$

식 (7), (8)에서  $I$ ,  $A$ 는 각각 보-기둥 단면의 단면2차모멘트 및 단면적이며,  $E$ 와  $\rho$ 는 보-기둥 재료의 탄성계수 및 단위체적당 질량을 나타낸다.

식 (7)로부터  $\partial M / \partial x$ 를 구하여 식 (5)에 대입하고 이로부터  $\partial V / \partial x$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

식 (6)에 식 (8), (9)를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있으며, 이는 축하중을 받는 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식이다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw = 0 \quad (10)$$

상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (11)$$

식 (1)로부터  $\partial^2 w / \partial x^2$ ,  $\partial^3 w / \partial x^3$ ,  $\partial^4 w / \partial x^4$ ,  $\partial^2 w / \partial t^2$ 을 각각 구하여 식 (10)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음 식 (12)의 축하중을 받는 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 유도된다.

$$\eta'''' = -\pi^2 p \eta'' + (C_1^2 - \pi^4 \lambda) \eta \quad (12)$$

식 (12)에서  $(\cdot) = d/d\xi$ 이고,  $p$ 는 무차원 축하중으로

식 (13)과 같으며,  $\lambda$ 는 무차원 지반계수로 그 내용은 식 (14)와 같다. 또한  $C_i$ 는 무차원 고유진동수로 식 (15)와 같으며  $i$ 는 모드번호(mode number)이다.

$$p = \frac{P l^2}{\pi^2 EI} \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{k l^4}{\pi^4 EI} \quad (14)$$

$$C_i = \omega_i^2 (\rho A / EI)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

이상에서 식 (12)는 축하중을 받는 Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며, 본 연구에서 채택하고자 하는 단부 조건에 대한 경계 조건식은 다음과 같다.

먼저 회전단인 경우 보-기둥의 좌단( $x=0$ ) 또는 우단( $x=l$ )에서 변위 및 휨모멘트가 "0"이므로 식 (7), (11)을 이용하면 다음과 같이 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (16.1)$$

$$\eta'' = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (16.2)$$

고정단인 경우에는 보-기둥의 좌단( $x=0$ ) 또는 우단( $x=l$ )에서 변위 및 단면회전각( $dw_x/dx$ )이 "0"이므로 식 (11)을 이용하면 다음과 같이 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (17.1)$$

$$\eta' = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (17.2)$$

이상에서 식 (16.1), (16.2) 및 식 (17.1), (17.2)는 각각 회전단 및 고정단에 대한 경계조건식이며 이를 이용하여 식 (12)의 미분방정식을 해석하면 대상 보-기둥의 고유진동수를 구할 수 있다.

보-기둥요소에 축하중력이 작용할 때 축하중력과 고유진동수의 관계는 그림 3에 나타낸 바와 같이 축하중력이 증가함에 따라 고유진동수는 감소하게 되며, 축하중력이 좌굴하중에 도달하면 보-기둥은 불안정상태로 되어 고유진동수는 "0"이 된다. 이 때 고유진동수가 "0"이 되는 즉 그림 3에서 □표로 표시된 하중이 대상 보-기둥의 좌굴하중이 된다.<sup>(10)(11)</sup>

따라서 식 (12)에  $C_i = 0$ 를 대입하고  $p = b$ 를 대입

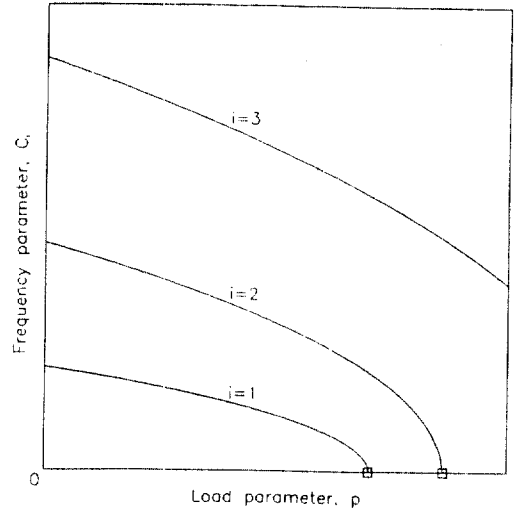


그림 3. 축하중력과 고유진동수의 일반적인 관계

하면 다음 식 (18)과 같이 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 좌굴을 지배하는 상미분방정식이 유도된다.

$$\delta'''' = -\pi^2 b_j \delta'' - \pi^4 \lambda \delta \quad (18)$$

식 (18)에서  $\delta$ 는 무차원 정적변위를 나타내고 식 (12)에서의 진동변위  $\eta$ 와 구분하기 위한 변수이며,  $b_j$ 는 무차원 좌굴하중으로 그 내용은 식 (19)와 같고,  $j$ 는 모드번호이다.

$$b_j = \frac{P_{critj} l^2}{\pi^2 EI}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

좌굴하중을 결정하기 위한 각 단부조건별 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 회전단인 경우 정적변위와 휨모멘트가 "0"이므로 다음의 경계조건식을 사용할 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (20.1)$$

$$\delta'' = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (20.2)$$

고정단인 경우에는 정적변위와 단면회전각이 "0"이므로 다음의 경계조건식을 유도할 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (21.1)$$

$$\delta' = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{또는} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (21.2)$$

이상에서 식 (20.1), (20.2) 및 식 (21.1), (21.2)는

각각 회전단 및 고정단에 대한 경계조건식이며 이를 이용하여 식 (18)의 미분방정식을 해석하면 대상 보-기둥의 무차원 좌굴하중을 결정할 수 있다.

### 3. 수치해석방법

본 연구에서 유도된 식 (12), (18)을 수치해석법에 의하여 수치해를 구하기 위한 과정은 다음과 같다. 식 (12), (18)을 해석하는 문제는 고유치문제를 푸는 문제로 이하에서 고유진동수를 구하는 과정을 설명하고자 하며, 좌굴하중을 구하는 문제 역시 동일한 과정으로 해석하였다.

식 (12)의 미분방정식에는 미지의 불확정량인 무차원 고유진동수  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저  $C_i$ 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 보-기둥 좌단( $\xi=0$ )의 경계조건을 이용하여 미분방정식의 수치적분을 시행한다. 가정한  $C_i$ 값이 대상구조의 자유진동에 대한 고유치인지는 우단( $\xi=1$ )에서의 경계조건을 만족여부로 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용한다.<sup>(12)</sup> 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학문제에 많이 이용되는 Runge-Kutta method<sup>(13)</sup>를 이용하였으며, 행렬값 탐사법의 적용과정에서 고유치  $C_i$ 값을 찾기 위해서는 Regula-Falsi method<sup>(14)</sup>를 이용하였다.

이상의 수치해석 과정을 단부조건과  $\lambda$ ,  $n$ ,  $p$ 를 입력하면  $C_i$  및  $\eta$ 가 출력되도록, 단부조건과  $\lambda$ ,  $n$ 을 입력하면  $b_j$ 가 출력되도록 2개의 프로그램을 작성하였다.

### 4. 수치해석 예제 및 고찰

표 1, 2는 본 연구결과를 비교 검증하기 위해 타 문헌의 결과들과 비교한 것이다. 표에서 볼 수 있듯이 본 연구의 결과와 문헌들의 결과는 아주 우수하게 접근하고 있어 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

보-기둥을 기계구조 등의 기조로 사용하는 경우에 기계구조물과의 공진을 피하기 위하여 보-기둥의 진동을 제어할 필요가 있다. 이 경우에 보-기둥에 축방향력을 가하거나 보-기둥의 지반탄성계수를 적절히 선택함으로써 이를 실현할 수 있다. 또한 지

표 1. 본 연구와 문헌[3,15]의 무차원 고유진동수 비교

조 건	비교문헌	무차원 고유진동수, $C_i$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
회전-회전 $p=0, \lambda=3$	본 연구	19.74	43.02	90.46
	문헌[3]	19.75	43.02	90.45
회전-회전 $p=0.5, \lambda=0$	본 연구	6.979	36.93	86.32
	문헌[15]	6.989	36.95	86.33
고정-고정 $p=0, \lambda=4.5$	본 연구	30.64	65.13	122.7
	문헌[3]	30.64	65.24	-
고정-고정 $p=2, \lambda=0$	본 연구	15.95	53.76	112.5
	문헌[15]	15.97	53.97	113.0

표 2. 본 연구와 문헌[3]의 무차원 좌굴하중 비교

조 건	비교문헌	무차원 좌굴하중, $b_j$		
		$j=1$	$j=2$	$j=3$
회전-회전 $\lambda=2$	본 연구	3.000	4.500	9.222
	문헌[3]	3.000	4.500	9.222
회전-회전 $\lambda=3$	본 연구	4.000	4.750	9.333
	문헌[3]	4.000	4.750	9.333
고정-고정 $\lambda=4.5$	본 연구	7.217	9.096	16.96
	문헌[3]	7.236	9.175	-

중에 매립된 말뚝은 탄성지반위에 놓인 기둥으로 모형화하여 해석할 수 있다. 이러한 관점에서 본 수치해석예에서는 각종의 무차원 변수가 고유진동수 및 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다.

그림 4는 그림 1에서 축하중이 작용하지 않는 경우 ( $p=0$ )에 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 Winkler지반계수  $\lambda$ 의 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 지반계수  $\lambda$ 가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있으며 저차모드 일수록 그 증가율이 크고, 고차모드로 갈수록 증가율이 감소함을 알 수 있다. 이는 지반강성이 증가하더라도 고차모드의 고유진동수에 미치는 영향은 크지 않음을 의미한다. 또한 제1모드에서 양단회전인 경우는 양단고정인 경우에 비해 그 증가율이 더 큼을 알 수 있다.

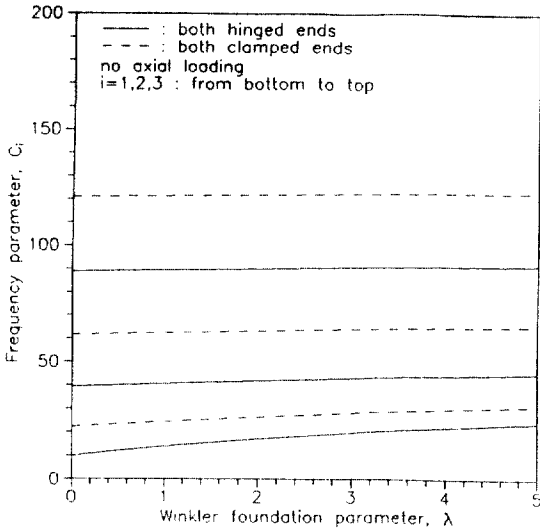


그림 4.  $C_i$ - $\lambda$ 의 관계

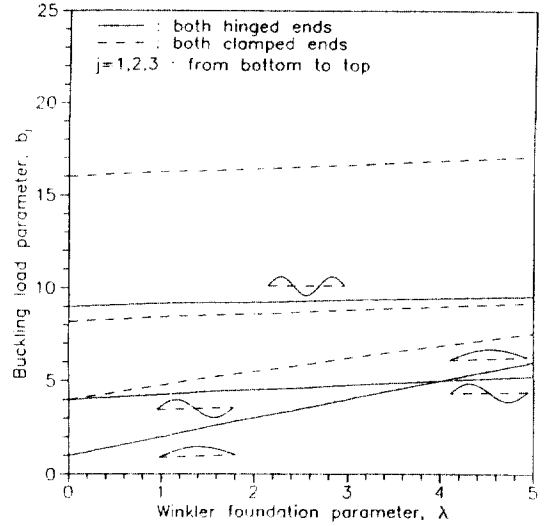


그림 6.  $b_j$ - $\lambda$ 의 관계

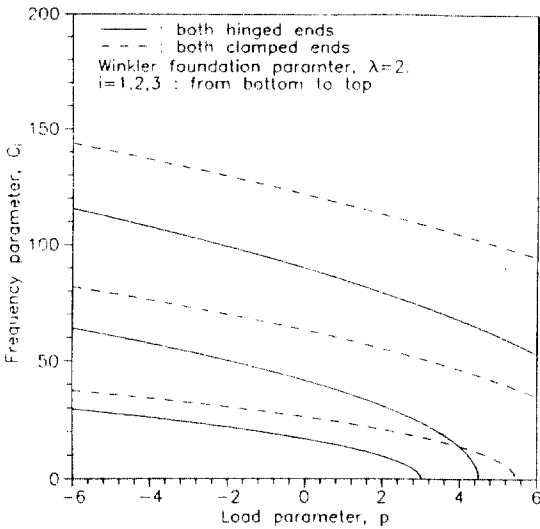


그림 5.  $C_i$ - $p$ 의 관계

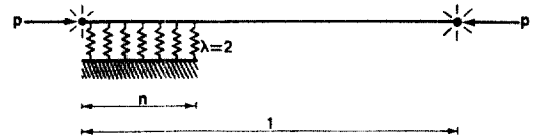


그림 7. 탄성지지구간이 변화하는 무차원화된 보-기둥

그림 5는 그림 1에서 축하중  $p$ 가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여  $\lambda=2$ 인 지반위에 놓인 보-기둥의 해석결과를 나타낸 것이다. 그림에서 “-”하중 즉 축인장력이 작용하는 경우 무차원 고유진동수는 증가하고, 축압축력이 작용하는 경우 무차원 고유진동수는 감소함을 알 수 있다. 또한 그림에서 곡선이 횡축과 만나는 점 즉 무차원 고유진동수가 “0”이 되는 곳의 하중이 대상 보-기둥의 좌굴하중이다.

그림 6은 Winkler지반계수 변화에 따른 양단회전과 양단고정 보-기둥의 좌굴하중 변화를 나타낸 것이며, 그림 안에 표시된 곡선형상들은 양단회전인 경우의 좌굴형을 나타내고 있다. 그림에서 지반계수가 증가함에 따라 좌굴하중은 직선적으로 크게 증가함을 알 수 있다. 또한 그림에서 양단회전인 경우 제1모드와 제2모드의 직선이 교차하는 지점 ( $b_j=5, \lambda=4$ )을 발견할 수 있는데 이는 지반강성의 증가에서 기인된 좌굴형의 변화를 의미하는 것으로 지반계수가  $\lambda=4$ 보다 큰 경우에는 그림에 나타낸 바와 같이 제1모드의 좌굴은 역대칭형으로 발생하게 된다.

그림 8, 9는 그림 7에 나타낸 바와 같이 보-기둥 좌단으로부터 탄성지지구간  $n$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 및 좌굴하중의 변화를 나타낸 것으로 탄성지지구간내에서 지반계수  $\lambda=2$ 에 대한 결과이다. 그림들에서 탄성지지구간이 증가함에 따라 무차원 고유진동수 및 좌굴하중은 증가함을 알 수

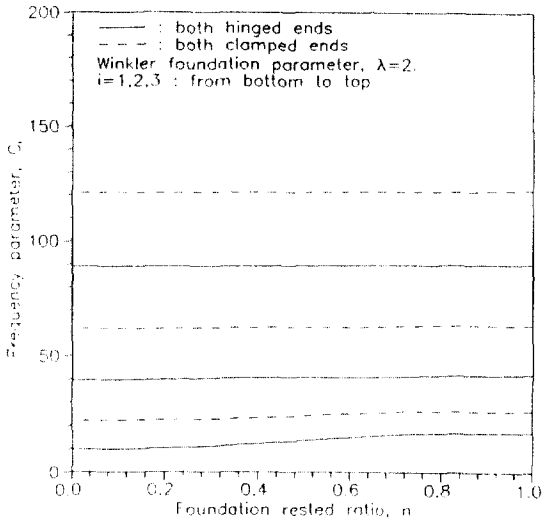


그림 8.  $C_1$ - $n$ 의 관계

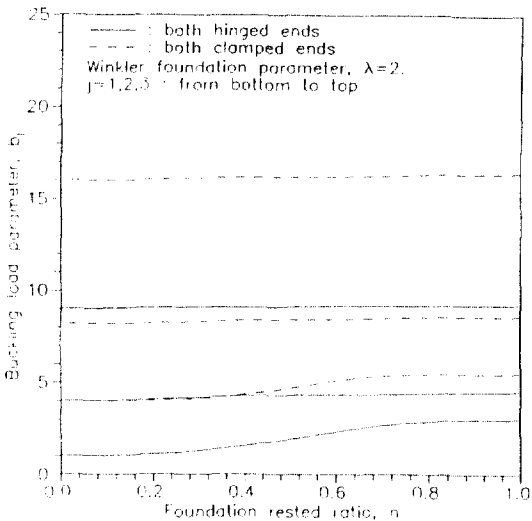


그림 9.  $b_1$ - $n$ 의 관계

있다. 또한 그림 9에서 물리적인 중요한 의미를 갖는 제1좌굴하중은 탄성지지구간  $n$ 이 0.3-0.7인 구간에서 현저하게 증가함을 알 수 있다.

그림 11은 그림 10에 나타난 바와 같이 비균질 지반위에 놓인 보-기둥의 축하중 변화에 따른 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 그림 5에서와 동일한 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 참고로 그림 10의 보-기둥에 축압축력  $p=2$ 가 작용할 때의 진동형을 그림 12에 나타내었다.

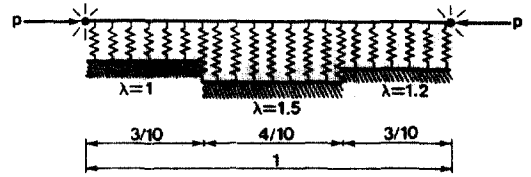


그림 10. 비균질 지반 위에 놓인 보-기둥

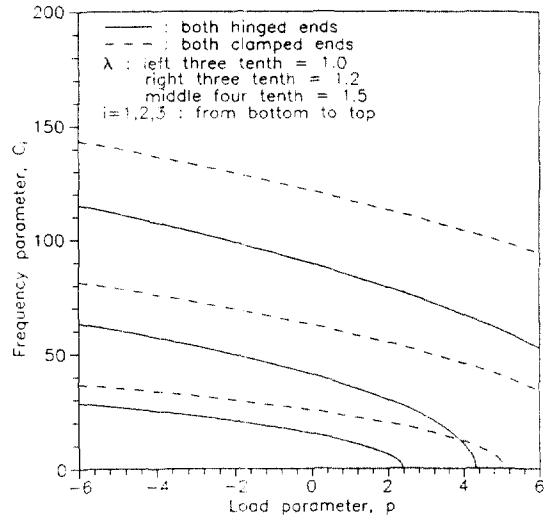


그림 11. 비균질 지반 위에 놓인 보-기둥의  $C_1$ - $p$ 의 관계

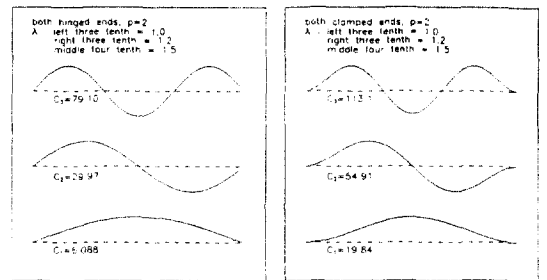


그림 12. 진동형의 예

## 5. 결 론

이 논문은 Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중 해석에 관한 연구이다. Winkler형 지반위에 놓인 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동과 좌굴된 보-기둥의 정적거동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 이 미분방정식들을 Ru-

nge-Kutta method와 행렬값 탐사법을 이용하여 수치해석하였다.

이 연구의 수치해석결과와 타문헌과의 결과가 아주 우수하게 접근하여 본 연구방법의 타당성을 검증할 수 있었으며 수치해석예를 통하여 각종의 무차원 변수가 고유진동수 및 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다. 이 연구에서 개발한 수치해석방법은 지중말뚝문제 및 균질 또는 비균질 지반위의 보-기둥요소 문제에 폭 넓게 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 참 고 문 헌

1. Kerr, A.D., "Elastic Viscoelastic Foundation Models", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, 1964, pp. 491-498.
2. Selvadurai, A.P.S., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier, 1979, pp. 13-42.
3. Abbas, B.A. and Thomas, J., "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, 1978, pp. 33-44.
4. Nielsen, M.T., "Resistance of a Soil Layer to Horizontal Vibration of a Pile", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 1982, pp. 497-510.
5. Pavlovic, M.V. and Wylie, G.B., "Vibration of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, 1983, pp. 797-808.
6. Yankelevsky, D.Z. and Eisenberger, M., "Analysis of a Beam Column on Elastic Foundation", *Computers & Structures*, Vol. 23, 1986, pp. 351-356.
7. Shastry, B.P. and Rao, G.V., "Dynamic Stability of Cantilever Columns resting on an Elastic Foundation", *Computers & Structures*, Vol. 25, 1987, pp. 157-158.
8. Matsuda, H. and Sakiyama, T., "Analysis of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundation", *Computers and Structures*, Vol. 25, 1987, pp. 941-946.
9. Valsangkar, A.J., and Pradhanang, R. B., "Free Vibration of Partially Supported Piles", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, 1987, pp. 1244-1247.
10. Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975, pp. 182-185.
11. Chen, W.F. and Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns(I)*, McGraw-Hill, 1976, pp. 110-115.
12. Leonard, J.W., *Tension Structures*, McGraw-Hill, 1988, pp. 300-304.
13. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, 1986, pp. 419-424.
14. Maron, M.J., *Numerical Analysis*, Macmillan Publishing Co., 1982, pp. 57-60.
15. Bokaian, A., "Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, 1988, pp. 49-65.

(接受: 1993. 6.2)