

사면안정해석에 대한 Constrained Simplex Method 적용

A Constrained Simplex Method for Slope Stability Analysis

黃材安* · 李相德** · 全夢角*** · 具滋甲****

Hwang, Jea An · Lee, Sang Duk · Jeon, Mong Gag · Koo, Ja Kap

Abstract

A stability analysis program(CSLOP) which can obtain the factor of safety and the critical failure surface at the same time is developed from this study. In order to improve existing slice methods, the general slice method of Gussmann is applied to compute the factor of safety, and the constrained simplex algorithm proposed by Box is applied to systematically locate the critical failure surface in slopes. The proposed method is applied to two examples of circular and noncircular slope stability and the results are compared to previously published solutions. Constrained simplex method is recommended to improve slope stability programs which provide for an automatic search of the critical failure mechanisms.

요 지

本 研究에서는 既存의 절편법의 短點을 補完하기 위하여 Gussmann의 일반절편법을 安全率로 정의하고, 또한 豫想破壞面을 구하기 위하여 Box가 提案한 Constrained simplex method를 最適化技法으로 이용함으로써 安全率과 限界破壞面을 동시에 구할 수 있는 斜面安定解析 프로그램 CSLOP을 開發하였다. 無限斜面과 一般斜面을 對象으로 사면해석을 한 결과 CSLOP에서 구한 安全率は Bishop의 簡便解와 별 차이가 없었으며, 한계 파괴면을 찾는 데 있어서 좋은 收斂결과를 보였다.

1. 序 論

1.1 研究 背景 및 目的

斜面解析에서는 가장 작은 安全率을 구하고, 그에 해당하는 破壞面을 찾는 것이 중요하다. 一般적으로 사면의 安定性 해석시 널리 사용되는 解析法들은 限界平衡理論에 근거하여 斜面 내부에 있는 切片(slice)의 측면에 작용하는 土壓과 활동파괴면의 기

하학적인 형상을 가정하는 방법에 따라 여러 방법이 發表되었다. 이러한 사면안정 해석법들은 安全率을 절편법(slice method)으로 정의하고, 파괴형상을 원호 또는 대수나선형으로 가정하여 시행착오법으로 斜面安定 解析을 하였다. 이들 대부분의 사면안정 해석법들은 절편법의 특성상 外力을 만족스럽게 고려하지 못하므로 어떤 가정(측면에서 측면력의 기울기나, 파괴조건 또는 작용점)을 해야 數學的인 解를 구할 수 있을 뿐만 아니라 岩盤이나 軟弱地層이 존재할 경우는 파괴형상을 가정하고 한계파괴면을 구해야 하므로 非現實의이다.⁽¹⁻³⁾ 따라서, 本 研究에

* 성균관대학교 토목공학과 대학원 석사과정 졸업

** 정회원 · 야주대학교 공과대학 토목공학과 조교수

*** 정회원 · 성균관대학교 공과대학 토목공학과 교수

**** 정회원 · 안성산업대학교 토목공학과 전임강사

서는 절편법의 短點을 보완하여, 어떠한 外力도 고려할 수 있고 특별한 假定도 없이 개개 절편의 평형조건을 만족시킬 수 있는 Gussmann의 일반절편법과, 파괴형상을 가정하지 않고 한계파괴면을 구하기 위한 最適化技法으로써 Box의 Constrained simplex method를 接合하여 最小安全率과 限界破壞面을 동시에 구할 수 있도록 사면안정해석 프로그램 CSLOP을 開發하였다. 또한, 그 適用性을 檢證하기 위하여 無限斜面과 一般斜面을 對象으로 安全率과 限界破壞面을 구하고, 그 結果에 대해 既存의 斜面安定解析 프로그램과 比較하였다.

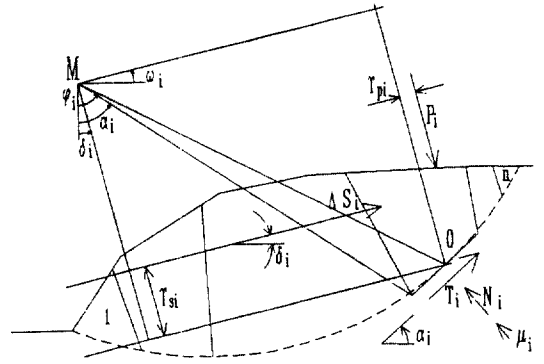


그림 1. 사면과 임의의 요소에 작용하는 힘

2. 基本理論

2.1 Gussmann의 일반절편법⁽⁴⁾

절편법으로 제시된 方法들은 어떤 特殊한 경우에 한하여 적용되는 것이 대부분이며, 개개의 절편은 물론 전체적(global)으로 힘과 모멘트의 平衡을 유지하기 위해서는 별도의 가정을 해야 하는 短點이 있다. 즉, n개의 절편에 대해서 未知數는 총 5n-2 (바닥면에서 2n, 측면에서 3(n-1), 안전율에서 1이며, 條件方程式은 총 4n(절편의 힘의 평형식에서 2n, 각 바닥면의 모멘트 조건에서 n, 파괴조건에서 n)이다. 여기서 未知數가 已知數보다 n-2가 많게 되므로, 數學적으로 解가 가능하기 위해서는 어떤조건(측면에서의 측면력의 기울기나, 파괴조건 또는 작용점)을 提示해야만 한다. 그러나, Gussmann(1978)의 일반절편법은 既存의 절편법들을 特殊解로 포함하고 있으므로 그 適用範圍가 매우 넓으며, 다음과 같은 가정으로부터 시작한다.

- 절편 및 파괴체의 경계면은 평면이고, 가능한 파괴면은 직선으로 대체되었다.
- 절편 및 파괴체의 自重(P)은 水平力(지진, 앵커 등)과 동시에 작용할 수 있다.
- 절편의 활동면(Geometry)은 임의의 극좌표계(r, φ)로 정해지며, 절편의 저면은 α만큼 기울어 있다.
- 각 절편의 총측면력의 차는 ΔS이고 ΔS의 팔의 길이는 r_s이며 기울기는 δ이다.

2.2 安全率의 定義^(4,5)

Coulomb의 파괴식으로부터 모든 절편의 바닥면

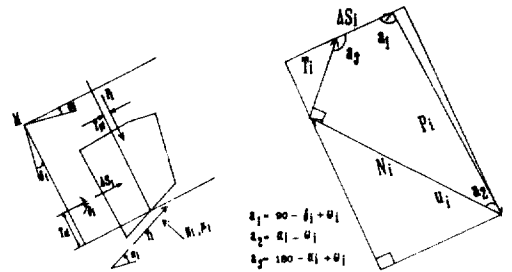


그림 2. 임의의 요소와 힘의 다각형

에서 安全率을 Fellenius식으로 假定하면 다음과 같다.

$$F = F_i = \frac{N_i \tan \phi_i + C_i L_i}{T_i} \quad (1)$$

힘의 다각형(그림 2)에서 힘을 ΔS_i의 방향과 ΔS_i의 법선방향으로 평형을 취한 후 ΔS_i의 방향 성분에서 N_i를 유도하고, 다시 N_i를 ΔS_i의 법선방향 성분에 代入하면

$$\Delta S_i = B_i - \frac{1}{F_i} A_i$$

$$A_i = \frac{\{P_i \cos(\alpha_i - \omega_i) - U_i L_i\} \tan \phi_i + C_i L_i}{\cos(\alpha_i - \delta_i) + \frac{1}{F} \tan \phi_i \sin(\alpha_i - \delta_i)} \quad (2)$$

$$B_i = \frac{P_i \sin(\alpha_i - \omega_i)}{\cos(\alpha_i - \delta_i) + \frac{1}{F} \tan \phi_i \sin(\alpha_i - \delta_i)} \quad (3)$$

滑動面상의 O점에 대하여, 모멘트평형을 취하면

$$r_{si}\Delta S_i + P_i r_{pi} = 0 \quad (4)$$

모든 절편에 대하여 ΔS_i 를 합하면 내부 단면에서의 수평, 수직성분과 모멘트효과는 없으므로 안전률은 다음과 같다.

$$F_H = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cos \delta_i}{\sum_{i=1}^n B_i \cos \delta_i} \quad (5)$$

$$F_V = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \delta_i}{\sum_{i=1}^n B_i \sin \delta_i} \quad (6)$$

$$F_M = \frac{\sum_{i=1}^n A_i r_i \cos(\psi_i - \delta_i)}{\sum_{i=1}^n \{B_i \cos(\psi_i - \delta_i) + P_i r_{pi}\}} \quad (7)$$

2.3 特殊解

既存의 절편법은 부정정이기 때문에 정역학적인 解를 구하기 위해서는 어떤 가정을 해야 한다. 따라서, 假定條件에 따라 Spencer, Janbu, Neuber, Gussmann, Krey, Bishop, Terzaghi와 Fellenius의 해법들이 파생되며, 이러한 해법들은 Gussmann의 일반절편법의 한 特殊解이기 때문에 (5), (6), (7)式으로부터 誘導된다.

2.4. 安定函數와 最適化 技法

一般的으로, 임의의 破壞面은 $n+1$ 개의 점들(points)로 정의되는 n 개의 선분들(segments)로 이루어지고, 각 절편의 폭은 점의 수평위치($X_i, i=1 \cdots n$)를 조절함으로써 임의적으로 조절할 수 있다. 이 때, 斜面의 上限境界(Upper Boundary) ($Y_i^{max}, i=1 \cdots n$)는 geometry에 의해 규정되고, 下限境界(Lower Boundary) ($Y_i^{min}, i=1 \cdots n$)는 임의의 岩盤(bedrock)面으로 정의된다. 한편, 안전률을 계산하기 위해 필요한 흙의 強度係數, 荷重, Geometry에 관한 情報가

표 1. 안전율의 정의

method	assum.	factor of safety
Spencer ⁽⁹⁾	$\delta_i = \delta$	$F = F_H(\delta) = F_V(\delta) = F_M(\delta)$
Janbu ⁽¹⁰⁾ Neuber ⁽¹¹⁾ Gussmann ⁽⁴⁾	$\delta_i = \phi_i$ $\omega_i = 0.0$ $\gamma_i = 0.0$	$F_H = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(P_i - U_i L_i \cos \alpha_i) \tan \phi_i + C_i L_i \cos \alpha_i}{\cos \alpha_i (\cos \alpha_i + \frac{1}{F} \tan \phi_i \sin \alpha_i)}}{\sum_{i=1}^n P_i \tan \alpha_i}$
Krey ⁽¹²⁾ Bishop ⁽¹³⁾	$\delta_i = 0.0$ $\omega_i = 0.0$ $\gamma_i = 0.0$	$F_M = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(P_i - U_i L_i \cos \alpha_i) \tan \phi_i + C_i L_i \cos \alpha_i}{(\cos \alpha_i + \frac{1}{F} \tan \phi_i \sin \alpha_i)}}{\sum_{i=1}^n P_i \sin \alpha_i}$
Fellenius ⁽¹⁴⁾ Terzaghi ⁽¹⁵⁾	$\delta_i = \alpha_i$ $\omega_i = 0.0$ $\gamma_i = 0.0$ $P_i = P$	$F_H = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i \cos \alpha_i - U_i L_i) \tan \phi_i + C_i L_i}{\sum_{i=1}^n P_i \sin \alpha_i}$

여기서, $i=1, \dots, n$

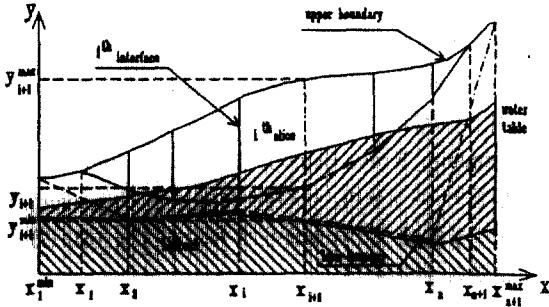


그림 3. Complex 해석을 위해 일반화된 선형과곡면

주어 지기 때문에, 안전율 F 는 $n+1$ 개의 假想滑動面の 좌표를 變數($X_1, Y_2, \dots, Y_n, X_{n+1}$)로 하는 安定函數로 置換된다.⁽⁵⁾

$$F(X_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n, X_{n+1})$$

여기서, $X_1 \in (X_1^{\min}, X_2)$

$$Y_2 \in (Y_2^{\min}, Y_2^{\max})$$

$$Y_n \in (Y_n^{\min}, Y_n^{\max})$$

$$X_{n+1} \in (X_n, X_{n+1}^{\max})$$

이 때, 安定函數를 最小化시키는 技法을 最適化技法이라 하며, 그 技法으로는 Box가 提案한 Constrained simplex method를 사용했다.⁽⁶⁾ 이 기법은 비선형 부등구간을 갖는 비선형 목적함수를 최소화 시키는데 효과적인 것으로 입증된 순차적 조사기법으로 초기 假想滑動面을 最小滑動面 方向으로 이동시키기 위해 몇가지 단계를 취하며, 초기 활동면이 全領域에 골고루 분포하기 때문에 安全率에 있어서 Global minimum을 찾는다. 이 때 상수 α, β, γ 를 통하여 Complex 수정의 範圍를 統制하며 斜面解析에서 각각 1.3, 0.001, 5를 사용할 때 좋은 결과를 얻을 수 있다.^(7,8)

각 단계에서 사용되는 함수와 알고리즘 과정은 다음과 같다.

1) 초기 $k(n-1)$ 개의 가상활동면을 전영역에 걸쳐서 무작위로 가정한다.

$$*1) X_{ij} = G_i + r_{ij}(H_i + G_i)$$

2) k 개의 가상활동면의 좌표를 나타내는 변수가 안정함수에서 정의한 구간내에 있는 가를 확인하고, 구간내에 없으면 새로운 지점으로($X_{ij}(\text{new})$)으로 이

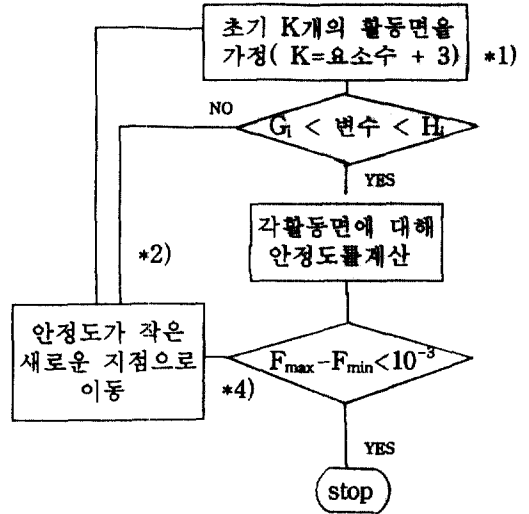


그림 4. Complex(Constrained simplex) 알고리즘

동시키고 구간내에 들어올 때까지 반복한다.

$$*2) X_{ij}(\text{new}) = \{X_{ij}(\text{old}) + X_{i,c}\} / 2$$

$$*3) X_{i,c} = \frac{1}{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^k X_{ij} - X_{ij}(\text{old}) \right\}$$

3) k 개의 가상활동면에 해당하는 안전율을 계산하고 가장 작은 안전율을 나타내는 활동면의 좌표를 새로운 지점으로 이동시킨다.

$$*4) X_{ij}(\text{new}) = \alpha \{X_{i,c} + X_{ij}(\text{old})\} + X_{i,c}$$

1), 2), 3)에서, $i=1 \dots n$

$$j=1 \dots k-1$$

$$0 < r_{ij} < 1$$

2.5. 프로그램의 構成

앞서 제시된 理論을 근거로, 일반 개인용 컴퓨터에서 수행 가능한 斜面安定解析 프로그램인 CSLOP을 開發하였다. 본 CSLOP에서는 지점과과의 의력(앵커력, 분포하중)을 고려할 수 있으며, 지하수의 영향 즉, 水壓과 浸透力을 선택적으로 고려할 수 있다. 초기 假想滑動面과 收斂後 活動면에 대해 Plotting이 가능하며 CSLOP의 흐름도(flow chart)는 그림 5와 같다.

3. 適用例 및 考察

最適化技法으로써 Constrained simplex method의 斜面解析에 대한 適用可能性을 檢討하기 위하여

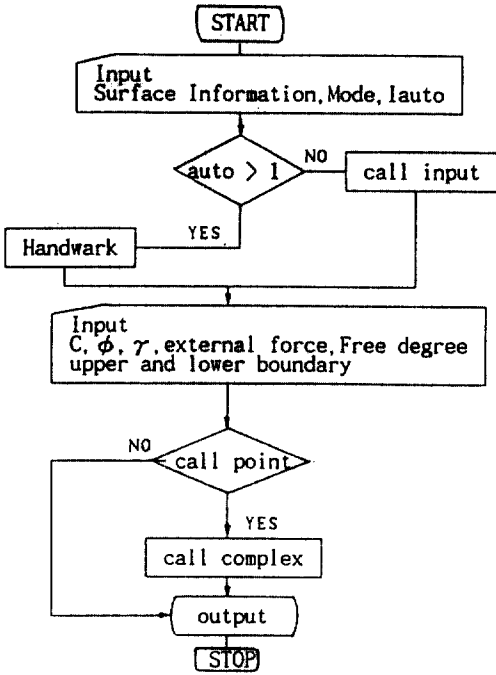


그림 5. CSLOP의 알고리즘

平面滑動이豫想되는無限斜面과曲面滑動이豫상되는一般斜面을對象으로豫想破壞面과安全率를구하였다.

3.1. 適用例 1 (無限斜面)

그림 6은 석회암(Limestone)위에 실트층이 있고 기울기가 1:2인無限斜面이다. 이 때 실트층의 두께가 사면의 길이에 비해 얇으므로滑動面은圓形이되지 않는다. 지하수의 위치(Hw)와地盤의점착력(C)을 변화하여 해석하였으며, 그 결과 구해진安全率(CSLOP)를正解 Fexact⁽¹⁶⁾와 비교하였다(표 2). 또한 解析結果 구해진 破壞面은 그림 6에 표시하였다. 여기서 γ 와 γ_{sat} 은 실트층에서 지하수 위쪽과 아래쪽의單位重量이다. 계산한 결과 破壞面은 모든 경우에 대해서 항상地表面과平行하며,安全率은地下水位의 영향을 받아 감소한다.

3.2. 適用例 2 (一般斜面)

曲面破壞가豫상되는實際斜面⁽¹⁷⁾에 대하여(그림 7) 지하수가 있는 경우와 없는 경우로 나누어 해석하여, Bishop의簡便解의 결과와 비교 하였다. 이

표 2. 평면활동에 대한 안전율의 비교

CASE	Fexact	CSLOP	한계 파괴면
C= 0, Hw= 0	1.150	1.154	mechanism 1
C= 0, Hw= 5	0.856	0.882	
C=30, Hw= 5	1.365	1.251	mechanism 2
C=30, Hw= 7	1.216	1.136	mechanism 3
C=30, Hw=10	0.963	0.9433	mechanism 4

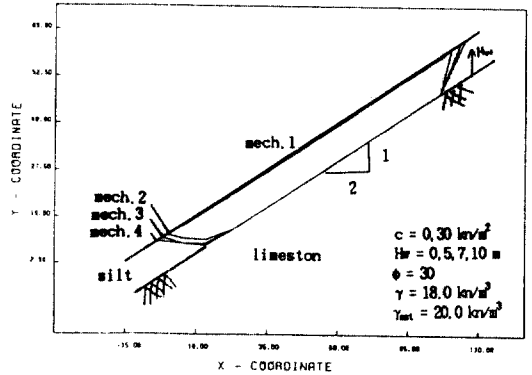


그림 6. 무한사면

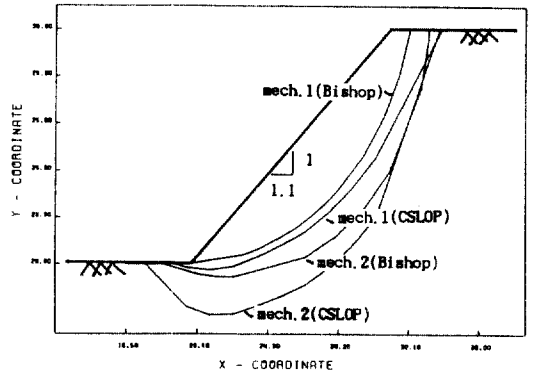


그림 7. 일반사면

때 지하수위는 toe를 지나는 일정한 기울기(1:2.2)로 가정하였다.最適化 技法의 기능을 확인하기 위하여 13가지의 다른 초기 파괴면으로 부터 출발하여 해석한 결과, 모두 동일한 圓形에 가까운 破壞面(toe 파괴)이 구해졌다(그림 8). 그림 8에서 얇은 실선은 13가지의 각각 다른 초기 가상활동면이고, 안쪽의

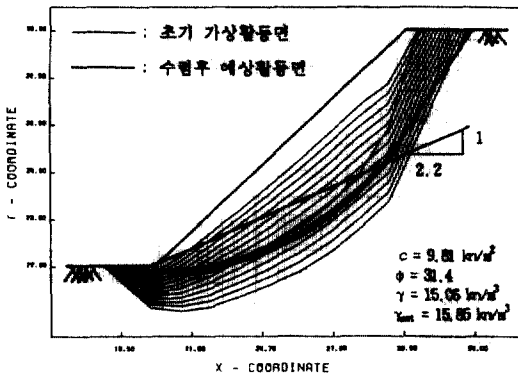


그림 8. 초기 가상활동면과 수렴 후 활동면

표 3. 곡면활동에 대한 안전율의 비교

CASE	CSLOP	Bishop	한계 파괴면
지하수 무시	1.3357	1.378	mechanism 1
지하수 고려	1.228	1.268	mechanism 2

굵은 선은 收斂後의 滑動面이다. 이 때, 收斂後 安全率의 差는 1×10^{-3} 으로 거의 같은 값이다. CSLOP에 의한 破壞面(mech 1)은 Bishop의 簡便法으로 얻은 破壞面(stab)보다 크게 형성되나 安全率은 약간 작은 값이 구해졌다. 지하수를 고려한 경우 CSLOP에 의한 破壞面은 저부 파괴 경향을 나타내며 (mech 2) 安全率은 건조상태에 비하여 減少함을 알 수 있다.

4. 結 論

限界平衡理論에 입각한 사면안정해석법은 切片法이 대부분이며, 이와 같은 切片法을 安全率로 정의한 사면안정해석 프로그램들이 다수 開發되었다. 이들 대부분의 사면안정해석 프로그램들은 簡便法의 특성상 外力를 만족스럽게 고려하지 못할 뿐 만 아니라 사면의 지질학적, 기하학적 特性을 충분히 고려하지 못한다. 이에 반해 Constrained simplex method와 一般簡便法을 접목시키면 파괴형상을 假定하지 않기 때문에 사면의 지질학적, 기하학적 特性을 효과적으로 考慮할 수 있을 뿐만 아니라, 특히 한계파괴면에 대한 자동조사(automatic search)를 가능하게 함으로써 기존의 사면안정해석 프로그램들의 단점을

보완해 줄 것으로 생각한다. 이상에서와 같이 Gussmann의 一般簡便法을 Constrained simplex method로 最適化한 결과 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

- Complex method로 最適化하면 破壞形狀을 假定하지 않고도, 效果적으로 적합한 破壞面을 찾을 수 있다.

- 斜面安定解析에서 最適化技法으로 Complex method를 適用할 수 있다.

- Gussmann의 一般簡便法은 외력을 만족스럽게 고려할 수 있으며, Bishop의 簡便法에 比하여 安全率이 약간 작게 나타났다.

- 無限斜面에서 破壞는 한정된 깊이에서 일어났고 破壞形狀은 平面破壞가 일어났다.

5. 記 號

- C_i : i요소의 粘着力(kN/m²)
- ϕ_i : i요소의 内部摩擦角(°)
- γ_i : i요소의 濕潤單位重量(kN/m³)
- γ_{sati} : i요소의 飽和單位重量(kN/m³)
- ω_i : i요소 自重의 기울기(°)
- α_i : i요소 밑면의 기울기(°)
- δ_i : i요소 側力の 기울기(°)
- $Y_{i+1}^{min} \sim Y_{i+1}^{max}$: Y_{i+1} 의 區間
- $G_{i,j}$: j번째 滑動面에서 i번째 變數의 下界(Lower Boundary)
- $H_{i,j}$: j번째 滑動面에서 i번째 變數의 上界(Upper Boundary)

參 考 文 獻

1. 백규호, 오서봉, 이승래, "특정사례사면해석결과 및 평가", 한국지반공학회 추계학술발표회 논문집, 1991, pp. 25-32.
2. 김명모, 이영생, 김운영, "특정사례사면해석결과 및 평가", 한국지반공학회 추계학술발표회 논문집, 1991, pp. 34-43.
3. 백영식 외 3인, "사례 해석에 의한 사면해석의 비교연구", 대한토질공학회지, Vol. 28, No. 3, 1990, pp. 47-54.
4. Gussmann, P., "Das allgemeine Lamellenverfahren unter besonderer Berücksichtigung von au

- eren Kräften", *Geotechnik*, 1978, pp. 68-74.
5. Bardet, J.P. and Kapuskar, M.M., "a simplex analysis of slope stability", *Computers and Geotechnics*, 8, 1987, pp. 329-348.
 6. Box, M.J.C., "A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with other Methods", *Comp. J.*, 8, pp. 42-52.
 7. Kuester, J.L. and Mize, J.H., *Optimization Techniques with FORTRAN*, McGraw-Hill, pp. 368 -385.
 8. Beveridge, G.S.G. and Schechter R.S., *Optimization Theory and Practice*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
 9. Spencer, E., "Thrust Line Criterion in Embankment Stability Analysis", *Geotechnique*, 23, 1973, pp. 85-100.
 10. Janbu, N., "Application of Composite Slip Surfaces for Stability Analysis", *PCSSSES*, Stockholm, 3, 1954, p. 43.
 11. Neuber, H., "Untersuchung der Standsicherheit hoher Boschungen nach dersogen annten Streifenmethode", *Fortschritte Geologie Rheinland-Westfalen*, 15, 1968, pp. 245-262.
 12. Krey, H.D., "Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes", W. Ernst und Sohn Verlag, Berlin 1926.
 13. Bishop, A.W., "The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes", *PECSSSES*, Stockholm, 1, 1954, pp. 1-13.
 14. Terzaghi, K., "Mechanism of Land Slides, Application of Geology to Engeering Practice", Geological Society of America, Berkeley, Harvard Soil Mechanics Series, 1950, pp. 83-123.
 15. Fellenius, W., "Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohasion unter Annahme kreiszylindrischer Gleiflachen", W. Ernst und Sohn Verlag, Berlin, 1927.
 16. Das, B.M., *Principles of Geotechnical Engineering*, Boston, 1990, pp. 507-513.
 17. 구자갑, 김석환, "절토사면의 안정에 관한 연구", *중경공업전문대학 논문집*, 제17집, 1988, pp. 213-225.
 18. 이상덕, "Kinematical Element Method를 이용한 Carsinton Dam의 안정해석", *한국지반공학회 추계학술발표회 논문집*, 1991, pp. 62-74.

(接受 : 1993. 1. 4)