

비포화 흐름에서 모세관 이력현상 모형의 고찰 -모형의 개발-

Capillary Hysteresis Model in Unsaturated Flow -Development of Model-

박창근* · 선우중호**

Park, Chang Kun · Sonu, Jung Ho

Abstract

A new model which requires one branch of main curves for the model calibration is developed based on the assumption that the weighting factor accounting for the pore blockage effect against air entry, $P_a(\theta)$, in Mualem's Model III-1 has a linear relation to the dimensionless pore radius r . The proposed model simulates experimental data more accurately than existing models which require one branch of main curves for the model calibration. Previous study showed that Model III-1 is the most appropriate model among domain models which require two branches of main curves for the model calibration. In comparison of the proposed model with Model III-1, both simulate hysteresis curves with almost the same accuracy. The proposed model can be applied efficiently in analyzing the unsaturated flow.

요 지

기존의 Mualem의 Model III-1에서 공기가 공극으로 진입할 때 이에 대한 공극들의 방해효과를 설명하는加重值 $P_a(\theta)$ 가 부차원 공극반경과 선형적 관계를 가진다는 가정을 바탕으로 하여 모형의 검정을 위하여 한개의 주곡선이 필요한 새로운 모형을 개발하였다. 개발된 모형은 모형의 검정을 위하여 기존에 제시된 바 있는 한개의 주곡선이 필요한 모형들보다 실측치를 잘 모의하며, 한쌍의 주곡선이 필요한 영역모형중에서 이력현상을 모형화하는 목적에 가장 부합한 Model III-1과의 비교에서 개발된 모형은 거의 같은 정확성을 가지면서 실측자료를 재현하고 있음을 알 수 있었다. 또한 개발된 모형은 비포화 흐름을 해석할 때 효율적으로 적용될 수 있음을 알 수 있었다.

1. 서 론

다공성 매질(porous medium)에서 발생하는 비포화 흐름은 실제 자연현상에서는 이력현상에 종속되

어 있으므로 비포화 흐름을 보다 정확히 해석하려면 이력현상을 고려하여야 한다. 이력현상을 효율적으로 고려하려면 실측자료 곡선의 갯수가 적은 모형을 사용하는 것이 바람직하다. Poulouvassilis와 Childs⁽²⁾는 실험으로 이력현상 곡선을 구하는 것이 'formidable work'이라 표현하였듯이, 실험은 과도한 시

* 성회원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 조교

** 정회원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 교수

간과 비용이 요구되는 일이기 때문이다. 따라서 이력현상을 모형화하는 목적이 정확성을 유지하면서 모형의 검증을 위해 필요한 실측자료의 양을 줄여 궁극적으로 비포화 흐름을 효율적으로 해석할 수 있게 하는데 있다는 관점에서 보면, 모형이 한개의 실측된 주곡선만을 사용하여 이력현상을 정확히 표현할 수 있다면 이는 매우 바람직스러운 것이다.

기존에 발표된 이력현상 모형은 내삽모형(interpolation model), 축척모형(scaling model)과 영역모형(domain model)으로 대별되며, 그중 영역모형만이 이론적 기반을 가지고 이력현상을 물리적으로 해석하고 있다. 영역모형은 다공성 매질의 공극을 특정한 무차원 마름공극반경(r)과 무차원 젖음공극반경(ρ)을 가진 공극영역들(porous domains)의 집합으로 표현하고, 이 반경들의 분포함수($f(r, \rho)$)가 이력현상의 거동을 결정하는 것으로 나타내었다. 따라서 영역모형의 핵심은 이 분포함수를 결정하는 방법에 있다. 영역모형은 독립영역모형과 종속영역모형으로 나눌 수 있다. 독립영역모형은 공기와/또는 물이 공극으로 들어갈 때 공기와/또는 물이 공극들의 영향을 받지 않고 독립적으로 거동한다는 가정하에서 개발되었으며, 종속영역모형은 이와 반대로 흐름은 공극들의 영향을 받는다는 가정하에서 개념적인 Mualem도식을 이용하여 상기 반경들의 분포함수를 구하여 이력현상을 설명하는 것이다.

실제로 실측자료를 이용하여 이 분포함수($f(r, \rho)$)를 구한다는 것은 불가능하므로, Philip⁽³⁾은 다음과 같은 상사가정(similarity hypothesis)을 도입하였다. 그것은 r 과 ρ 가 독립적일 때 두변수 분포함수 $f(r, \rho)$ 가 독립된 두개의 단변수함수 $h(r)$ 과 $m(\rho)$ 의 곱으로 표시될 수 있다는 것이다. 여기서 $h(r)$ 과 $m(\rho)$ 는 각각 무차원 공극반경 r 과 ρ 의 분포함수이고 모든 r 과 ρ 에 대하여 모두 음이 아니다. 또한 Mualem⁽⁴⁾에 의하면 균질한 다공성 매질에서 무차원 공극반경 r 과 ρ 의 분포함수는 같은 형태로 나타난다.

박창근과 선우중호⁽⁵⁾에 의하면 종속영역모형에서 이력현상을 모형화하는 목적에 가장 부합하는 것은 Mualem⁽¹⁾의 Model III-1임을 지적한 바 있으며, 이의 수학적 형태는 다음과 같다.

$$\theta = \iint h(r) \cdot h(\rho) \cdot P_a(\theta) dr d\rho \quad (1)$$

여기서 $\theta (= \Theta - \Theta_r)$ 는 유효함수량이고, Θ 는 함수

량, Θ_r 은 잔여함수량이다. 적분은 물로 채워져 있는 모세관 압력수두 구간에 해당하는 무차원 공극반경 구간에서 행한다. $P_a(\theta)$ 는 공기가 공극으로 진입할 때 이에 대한 공극들의 방해효과의 정도를 설명하는 가중치로 다음과 같이 정의된다.

$$P_a(\theta) \equiv \frac{\text{실제 공극으로부터 배수되는 물의 양}}{\text{공극이 공기의 자유로운 접근을 허용할 때 배수되는 물의 양}} \quad (2)$$

식(1)로 표시되는 Model III-1의 未知函數는 $P_a(\theta)$ 와 $h(r)$ 이므로 주젖음곡선과 주마름곡선에 대한 實測資料를 이용하여 모형의 미지함수를 구할 수 있다. 그러나 이 모형은 2개의 실측곡선(주젖음곡선과 주마름곡선)이 필요하므로 이를 단순화시키면서 정확한 이력현상을 나타낼 수 있는 모형의 개발이 필요하다.

2. Mualem도식

영역모형에서 식(1)의 공극분포함수 $f(r, \rho) = h(r) \cdot h(\rho)$ 를 적분하기 위하여 Fig. 1과 같은 개념적인

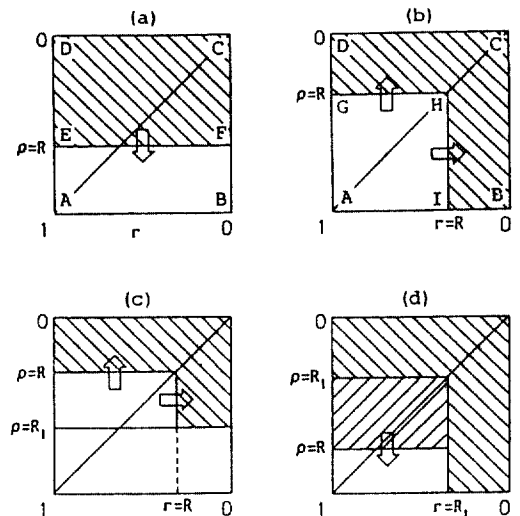


Fig. 1. Mualem Diagram [Mualem, 1974]

- (a) main wetting process
- (b) main drying process
- (c) primary drying process
- (d) primary wetting process

Mualem도식(Mualem⁽⁶⁾)이 사용된다. Fig. 1에서 사각형 ABCD의 면적이 有效飽和含水量 $\theta_u (= \theta_s - \theta_r)$ 에 해당하므로 결국 有效飽和度 $S \equiv \theta/\theta_u = 1$ 에 해당한다.

Fig. 1(a)는 주젖음과정을 나타내는 그림이다. 다공성 매질에서 모세관 압력수두가 Ψ_{min} 에서 Ψ^* 로 증가하면, $\Psi = c/R$ (c :negative constant)로 표시되는 모세관법칙에 의해 $\rho=0$ 에서 $\rho=R$ 까지 증가한다. 이 때 사각형 CDEF에 해당하는 양만큼 물이 다공성 매질로 들어가게 되므로, 영역 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \rho \leq R$ 에 해당하는 사각형 CDEF의 면적이 주젖음과정에서 $\Psi^*(\rho=R)$ 에 해당하는 유효함수량이 된다. 비슷하게 주마름과정도 Fig. 1(b)을 이용하여 설명할 수 있다. Fig. 1(c)는 多孔性 媒質에서 모세관 압력수두가 주젖음과정에 의해 Ψ_{min} 에서 Ψ^*_1 로 증가한 후 1차마름과정(primary drying process)에 의해 Ψ^d 까지 감소하였을 때(즉 ρ 가 0에서 R_1 까지 증가한 후 r 이 R_1 에 해당하는 r_1 에서 $r=R$ 까지 감소할 때) 1차마름과정을 나타내는 그림이다. 따라서 Fig. 1(c)의 빗금친 면적이 1차마름과정에서 $\Psi^d(r=R)$ 에 해당하는 有效含水量이 된다. 비슷하게 1차젖음과정도 Fig. 1(d)를 이용하여 설명할 수 있다. 이와같은 과정을 계속하면 n 차과정(n -th order process)을 模擬할 수 있다.

Fig. 1(a)의 삼각형 ABC내의 빗금친 부분은 마름과정이 진행될 때와 젖음과정이 진행될 때 다른 형상을 가지는데 이를 이력영향(hysteretic contribution)이라 하고, 삼각형 ACD내의 빗금친 부분은 마름과정이 진행될 때와 젖음과정이 진행될 때 같은 형상을 가지는데 이를 비이력영향(reversible contribution)이라 한다. 따라서 Mualem도식은 이력영향과 비이력영향을 모두 고려하고 있음을 알 수 있다.

식(1)과 같이 표시되는 Model III-1에서는 마름과정과 젖음과정에서의 분포함수가 같으므로 ρ 를 r 로 대치하여 사용할 수 있다. 또한 Mualem⁽¹⁾에 의하면 식(2)의 가중치 $P_a(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$P_a(\theta) = \frac{\theta_u - \theta^d(\Psi)}{(\theta_u - \theta^w(\Psi))^2 / \theta_u} = P_a(\theta^d) \quad (3)$$

여기서 $\theta^d(\Psi)$ 와 $\theta^w(\Psi)$ 는 모세관 압력수두가 Ψ 일

때 각각 주마름과정과 주젖음과정에서의 유효함수량을 나타낸다. 가중치 $P_a(\theta^d)$ 에서 $\theta^d(\Psi)$ 는 젖음과정에서는 해당하는 젖음과정이 시작하는 변환점에서의 有效含水量을, 마름과정에서는 마름과정이 진행되고 있는 지점에서의 有效含水量을 의미한다.

3. 模型의 개발

3.1 Mualem도식의 履歷現象 主曲線

Mualem도식은 이력영향과 비이력영향을 모두 고려하고 있으므로, 각 영향이 이력현상 주곡선에서 차지하는 비율을 살펴보자. 주젖음과정(Fig. 1(a) 참조)에서 이력영향(삼각형 ABC)에 의한 有效含水量 θ 에 해당하는 有效飽和도를 S^{wh} , 비이력영향(삼각형 ACD)에 의한 유효포화도를 S^{wr} 이라 하면, 주젖음과정에서의 유효포화도는 $S^w = S^{wh} + S^{wr}$ 이고 각각은 다음과 같이 表示된다.

$$S^{wh}(r) = r^2/2, \quad S^{wr}(r) = r - r^2/2 \quad (4a, b)$$

$$S^w(r) = r \quad (5)$$

여기서 r 은 모세관법칙에 의해 임의의 모세관 압력수두 Ψ 에 해당하는 무차원 공극반경이다. 주마름과정(Fig. 1(b) 참조)에서 이력영향과 비이력영향에 의한 유효포화도를 각각 S^{dh} , S^{dr} 이라 하고 주마름과정에서의 有效飽和도를 S^d 라 하면 이들은 각각 다음과 같이 표시된다.

$$S^{dh}(r) = S^{dr}(r) = r - r^2/2 = S^{wr}(r) \quad (6)$$

$$S^d(r) = 2r - r^2 \quad (7)$$

여기서 식(5)와 식(7)에 의한 곡선을 'Mualem도식의 履歷現象 主曲線(hysteresis loop of Mualem diagram)'이라 정의하고, 그것은 Fig. 2에 나타나 있다. Mualem도식의 이력현상 주곡선은 폐합된 형태를 이루고, 주젖음곡선 S^w 는 直線으로 주마름곡선 S^d 는 2次曲線으로 나타난다.

Fig. 1의 Mualem도식을 이용하면 n 차내부곡선(n -th order scanning curves)은 다음과 같이 표시된다.

$$S^{nw}(r) = \{ [S^{(n-1)w}]_{r=r_n^d} \} + (1 - r_n^d)(r - r_n^d); \quad (8)$$

$$r_n^d \leq r \leq r_{n-1}^w, \quad r_0^w = 1$$

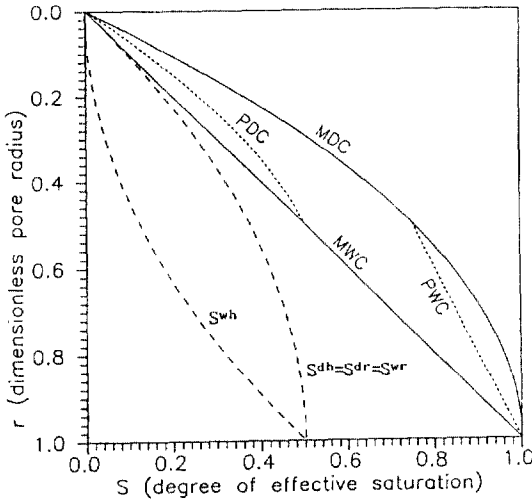


Fig. 2. Hysteresis Loop of Mualem Diagram
 - S^{wh} , S^{dh} : hysteretic contribution in wetting, drying process
 - S^{wr} , S^{dr} : reversible contribution in wetting, drying process
 - M: Main, P: Primary, W: Wetting, D: Drying, C: Curve

$$S^{nd}(r) = \{ [S^{(n-1)w}] r = r_n^w \} - (1-r)(r_n^w - r); \quad (9)$$

$$r_n^d \leq r \leq r_n^w, \quad r_0^d = 0$$

여기서 S^{nw} (또는 S^{nd})는 n차젖음과정(또는 n차마름과정)에서 무차원 공극반경이 r일 때 有效飽和度를 의미하고, $S^{nw} = S^w$ (또는 $S^{nd} = S^d$)는 주젖음과정(또는 주마름과정)에서의 유효포화도를 의미한다. r_n^d (또는 r_n^w)은 (n-1)차마름과정(또는 (n-1)차젖음과정)에서 n차젖음곡선(또는 n차마름곡선)이 시작하는 變換點(reversal point)에서의 무차원 공극반경을 의미한다. r_0^d (또는 r_0^w)은 주젖음과정(또는 주마름과정)이 시작하는 지점을 의미하고 Ψ_{min} (또는 Ψ_{max})에 해당하는 무차원 공극반경이므로 0(또는 1)이 된다. 식(8)과 식(9)를 이용하여 1차곡선을 模擬한 결과가 Fig. 2에 나타나 있다. 1차젖음곡선은 直線으로 1차마름곡선은 2次曲線으로 표시되고 있고 폐합된 環狀(closed loop)를 형성하고 있으므로 이 모형은 펌핑 효과(pumping effect)를 발생시키지 않음을 알 수 있다.

식(5)와 식(7)에서 r을 소거하고 모세관법칙에 의

해 r을 Ψ 로 표시하면, 주어진 한개의 主曲線으로부터 나머지 한개의 主曲線을 구할 수 있는 相互關係式(universal relation equation)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S^d(\Psi) = S^w(\Psi) \cdot (2 - S^w(\Psi)) \quad (10)$$

상기 식은 Model II-1(Mualem⁽⁴⁾)의 결과 식과 일치한다. 또한 Mualem⁽⁴⁾은 實測資料에 의해 주어진 S_w 로부터 S_d 를 模擬하는 경우가 반대의 경우보다 실측자료를 더 잘 모의한다고 보고하였다.

식(3)의 공기가 공극으로 진입할 때 이에 대한 공극들의 방해효과를 설명하는 加重值 $P_a(\theta)$ 는 식(5)와 식(7)을 이용하면 다음과 같이 계산되어 진다.

$$P_a(\theta^d) = \frac{(\theta_0 - \theta^d(\Psi))}{(\theta_0 - \theta^w(\Psi))^2 / \theta_0} = \frac{1 - S^d}{(1 - S^w)^2} = 1 \quad (11)$$

상기 결과는 공극내에서 공기의 거동이 공극들의 영향을 받지 않는다는 것을 의미하는데, 이것은 Mualem도식의 이력현상 주곡선이 기초한 개념이 독립영역모형이므로 당연한 결과이다. 일반적으로 공극내의 공기는 공극들의 영향을 받으면서 거동하므로 Mualem도식의 履歷現象 主曲線으로 履歷現象을 설명하기에는 부적절하다고 판단된다. 또한 Mualem도식의 주마름곡선이 완만한 경사를 이루면서 시작하므로 이러한 主曲線으로는 잘 발달된 공기한계 압력(air entry value)을 잘 설명하지 못한다. 따라서 Mualem도식의 履歷現象 主曲線에 적절한 수정이 가해져야 한다.

3.2 Mualem도식의 수정된 履歷現象 主曲線

Mualem도식의 履歷現象 主曲線으로는 이력현상을 잘 모의할 수 없으므로, 본 연구에서는 $P_a(\theta)$ 를 Mualem도식의 이력현상 주곡선을 이용하여 다음과 같은 두가지 가정하에서 정의하고자 한다.

假定 1: 공기로 채워져 있는 공극으로 물이 進入할 경우(wetting case) 공극들이 물의 進入을 妨害하지 않는 반면, 물로 채워져 있는 공극으로 공기가 進入할 경우(drying case) 공기의 進入에 대한 공극들의 방해효과가 발생한다. 假定 2: 공기가 공극으로 進入할 때 이에 대한 공극들의 방해효과는 공극에 물이 많을수록 크게 나타나고 물이 적을수록

작게 나타나는데, 이 방해효과는 수량에 선형적으로 변화하지 않고 주어진 수량에 해당하는 무차원 공극반경에 선형적으로 변화한다. 따라서 假定 1에 의하여 加重值 P_a 는 마름과정에서의 수량의 함수가 되고, 假定 2에 의해 P_a 는 무차원 공극반경 r 과 선형적인 관계를 가진다. 이러한 가정하에서 加重值 P_a 를 다음과 같이 선형으로 정의할 수 있다.

$$P_a(S^d) = 1 - r \quad (12)$$

여기서 S^d 와 r 의 관계는 Mualem도식의 이력현상 주곡선에서 구할 수 있다. 따라서 식(7)에서 $r = 1 - (1 - S^d)^{1/2}$ 이므로 식(12)는 다음과 같이 표시된다.

$$P_a(S^d) = (1 - S^d)^{1/2} \quad (13)$$

Table 1에 있는 8개 흙의 자료에 대해 Model III-1의 加重值 $P_a(\theta)$ 를 식(3)을 이용하여 계산한 결과가 Fig. 3에 도시되어 있다. 또한 본 연구에서 가정한 $P_a(S^d)$ 즉 식(13)도 Fig. 3에 나타나 있다. 실측자료에 대한 $P_a(S^d)$ 와 比較하여 볼 때 $P_a(S^d)$ 를 식(12)와 같이 Mualem도식의 履歷現象 主曲線에서 무차원 공극반경과 線形인 관계를 가진다고 가정한 것이 타당성을 가진다고 판단할 수 있다. 또한 假定 2에서 만약 가중치 P_a 가 수량에 선형적으로 변화한다면 $P_a(S^d) = (1 - S^d)$ 로 표시할 수 있는데, 이것은 Fig. 3에

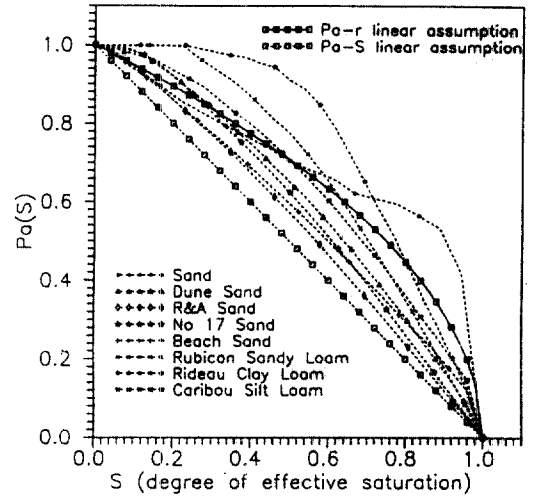


Fig. 3. Comparison of P_a by Proposed Method with Those by Eq.(3) using 8 Different Soil Data

서 알 수 있듯이 실측자료에 의한 계산치 $P_a(\theta)$ 를 잘 模擬하지 못한다고 판단된다.

식(12)의 물리적 의미를 살펴보면, 포화함수량 부근에서는 $\Psi \approx \Psi_{max}$ 이므로 모세관법칙에 의해 무차원 공극반경 $r \approx 1$ 이 되어 식(12)에서 $P_a(S) \approx 0$ 이다. 따라서 이 상태에서는 이웃하는 공극들의 방해효과

Table 1. Soils Used for Calculating weighting factor $P_a(\theta)$

Soil Type	Θ_s	Θ_r	Ψ_{max}	Ψ_{ae}	Ψ_{min}	Author(s)
Sand	0.27	0.09	5.0	12.5	36.0	Poulovassilis ⁽⁷⁾
Dune Sand	0.300	0.095	8.0	22.8	58.5	Gillham et al ⁽⁸⁾
R & A Sand	0.31	0.05	19.6	41.2	63.0	Curtis & Watson ⁽⁹⁾
# 17 Sand	0.29	0.05	20.0	33.8	56.0	Banerjee & Watson ⁽¹⁰⁾
Beach Sand	0.29	0.06	3.6	19.6	50.6	Poulovassilis ⁽¹¹⁾
Rubicon Sandy Loam	0.37	0.16	9.5	68.3	250.0	Topp ⁽¹²⁾
Rideau Clay Loam	0.415	0.285	0.0	24.0	420.0	Topp ⁽¹³⁾
Caribou Silt Loam	0.440	0.315	0.0	20.0	425.0	Topp ⁽¹³⁾

Θ_s (or Θ_r): volumetric saturated(or residual) moisture content

Ψ_{max} , Ψ_{min} , Ψ_{ae} : maximum, minimum capillary pressure head and air entry value measured by negative H₂O cm, respectively

때문에 공극으로 공기의 進入이 어렵게 된다. 한편 잔여함수량 부근에서는 $P_a(S) \approx 1$ 이므로 공극으로 공기의 進入이 상대적으로 자유롭게 이루어진다. 이러한 현상은 실제 자연상태에서의 현상과 상반되지 않는다. 또한 상기 두 極限 含水量사이에서는 $P_a(S)$ 가 Mualem도식의 이력현상 주곡선에서 마름과정의 含水量 즉 유효함수량에 해당하는 무차원 공극반경 r 과 선형적인 관계를 가지고 있다는 가정은 Fig. 3을 살펴보면 물리적으로 타당하다고 할 수 있다.

加重值 $P_a(S)$ 를 식(13)과 같이 가정을 하면 식(1)은 未知函數가 $h(r)$ 뿐인 모형으로 단순화된다. 따라서 한개의 主曲線에 대한 實測資料만 주어지게 되면 모형은 檢定되고 다른 主曲線은 다음과 같이 구할 수가 있다. 식(1)의 $P_a(S)$ 가 Mualem도식의 履歷現象 主曲線(식(5)와 식(7))에서 무차원 공극반경 r 과 선형적인 관계를 가진다고 假定하였으므로, 식(3)에서 유효함수량을 유효포화도로 변형한 결과 식을 식(13)과 같다고 두면 다음과 같은 두개의 '修正된 相互關係式(modified universal relation equation)'을 얻을 수 있다.

$$S^d(r) = 1 - [1 - S^w(r)]^4 = 1 - (1 - r)^4 \quad (14)$$

$$S^w(r) = 1 - [1 - S^d(r)]^{1/4} = 1 - (1 - r)^{1/2} \quad (15)$$

식(14)는 주젓음곡선에 대한 實測資料가 주어지면 주마름곡선을 구하는 식이고, 식(15)는 주마름곡선에 대한 實測資料가 주어지면 주젓음곡선을 구하는 식이다. 그런데 식(3)과 식(13)이 모두 마름과정에서의 유효포화도(또는 含水量)의 함수이며 Mualem도식의 이력현상 주곡선에서는 $P_a(S) = 1$ 이므로, 식(14)를 이용하여 주마름곡선을 변형시키는 것이 타당하므로 개발된 모형에서는 수정된 상호관계식으로 식(14)를 선택하고자 한다. 이러한 선택은 Mualem⁽⁴⁾의 판단 결과와도 일치한다. 따라서 Mualem도식의 修正된 履歷現象 主曲線을 다음과 같이 정의하고자 한다.

$$S^d(r) = 1 - (1 - r)^4 \quad (14)$$

$$S^w(r) = r \quad (5)$$

일단 主曲線이 주어지면 内部曲線(scanning curves)은 식(1)을 이용하여 模擬할 수 있다. 따라서 식(1)의 $P_a(\theta)$ 는 식(14)와 식(5)를 식(3)에 대입하면

다음과 같이 r 의 함수로 계산할 수 있다.

$$P_a(r) = \frac{1 - S^d}{(1 - S^w)^2} = (1 - r)^2 \quad (16)$$

이러한 결과는 식(14)를 식(16)에 대입하면 Mualem도식의 履歷現象 主曲線에서 가정한 식(13)과 일치한다. 상기 식에서 n 차젓음과정에서의 S^d 는 변환점에서의 유효포화도를 의미하므로 n 차젓음곡선에서는 $P_a(r) = (1 - r_n^d)^2$ 로 既知化되어 나타나지만, n 차마름과정에서의 S^d 는 n 차마름과정이 진행되는 지점에서의 유효포화도를 의미하므로 n 차마름곡선에서는 $P_a(r) = (1 - r)^2$ 로 나타난다. 따라서 n 차내부곡선은 식(8), 식(9), (16)과 Mualem도식을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S^{nw}(r) = \{ [S^{(n-1)d}] | r = r_n^d \} + (1 - r_n^d)^3 \cdot (r - r_n^d); \quad r_n^d \leq r \leq r_{n-1}^w, \quad r_n^w = 1 \quad (17)$$

$$S^{nd}(r) = \{ [S^{(n-1)w}] | r = r_n^w \} - (1 - r)^3 \cdot (r_n^w - r); \quad r_n^d \leq r \leq r_n^w, \quad r_0^d = 0 \quad (18)$$

식(17)과 (18)을 이용하여 계산한 内部曲線이 Fig. 4에 도시되어 있는데, 폐합된 環狀을 형성하고 있

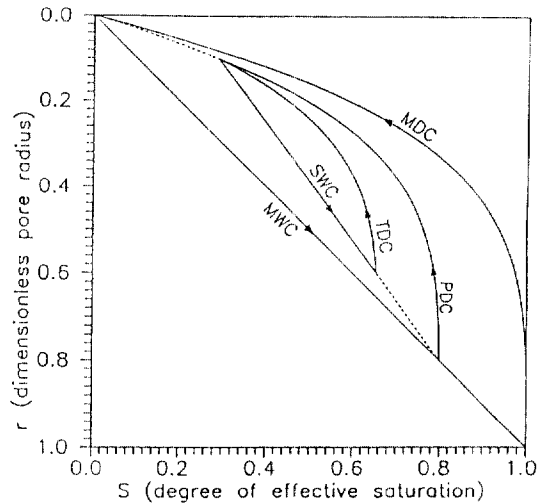


Fig. 4. Scanning Curves using Modified Hysteresis Loop of Mualem Diagram
 - PDC: Primary Drying Curve
 - SWC: Secondary Wetting Curve
 - TDC: Tertiary Drying Curve

으므로 이 모형은 펌핑효과(pumping effect)를 발생시키지 않음을 알 수 있다.

한편 수정된 상호관계식으로 식(15)를 선택할 수도 있다. 그러나 이 경우 박창근⁽¹⁴⁾에 의하면 모래와 같이 공기임계압력(Ψ_{ac})이 잘 발달된 흙에 대하여 주젖음곡선을 모의할 때 Ψ_{ac} 를 정확히 모의하지 못하고, Ψ_{ac} 가 잘 발달되지 않은 흙에 대해서는 비교적 정확하게 모의하고 있음을 언급하고 있다.

3.3 模型의具體化

모형의 檢證에 앞서 개발된 모형을 실제 실측자료에 적용할 수 있도록 변형시켜야 한다. 왜냐하면 개발된 모형은 유효포화도와 무차원 공극반경과의 관계를 나타내고 실측자료는 주로含水量과 모세관 압력수두와의 관계로 나타나 있기 때문이다. 주젖음곡선에 대한 실측자료가 주어지면 식(14)를 이용하여 주마름곡선을 模擬할 수 있다. 즉 식(14)의 양변에 θ_u 를 곱하여 $\theta^d(\Psi)$ 와 $\Psi^w(\Psi)$ 의 관계식을 구할 수 있다.

$$\theta^d(\Psi) = \theta_u - [\theta_u - \theta^w(\Psi)]^4 / \theta_u^3 \quad (19)$$

여기서 Ψ 는 무차원 공극반경 r 에 해당하는 모세관 압력수두이다. 일단 主曲線이 주어지게 되면 Mualem⁽¹⁾이 정의한 식(3)에 의해 加重值 $P_a(\theta)$ 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P_a(\theta^d) = [\theta_u - \theta^d(\Psi)] / \theta_u \quad (20)$$

이러한 결과는 본 연구에서 가정한 식(13)의 결과와 일치한다.

변환점(θ^w_1, Ψ^w_1)에서 시작하는 1차마름곡선 $\theta^{1d}(\Psi)$ 과 변환점(θ^{d_1}, Ψ^{d_1})에서 시작하는 1차젖음곡선 $\theta^{1w}(\Psi)$ 은 각각 식(1)과 Fig. 1(c), 식(1)과 Fig. 1(d)를 이용하면 다음과 같이 구하여 진다.

$$\theta^{1d}(\Psi) = \theta^w_1 - P_a(\theta^{1d}) \cdot [\theta_u - \theta^w(\Psi)] \cdot [\theta^w_1 - \theta^w(\Psi)] / \theta_u; \Psi_{min} \leq \Psi \leq \Psi^w_1 \quad (21)$$

$$\theta^{1w}(\Psi) = \theta^{d_1} + P_a(\theta^{d_1}) \cdot [\theta_u - \theta^w(\Psi^{d_1})] \cdot [\theta^w(\Psi) - \theta^w(\Psi^{d_1})] / \theta_u; \Psi^w_1 \leq \Psi \leq \Psi^w_{max} \quad (22)$$

여기서 θ^{d_1} (또는 θ^w_1)은 주마름과정(또는 주젖음과정)이 진행되다가 변환이 발생하여 1차젖음과정(또는 1차마름과정)이 시작될 때 변환점에서의 有效畝

水量이고, Ψ^{d_1} (또는 Ψ^w_1)은 θ^{d_1} (또는 θ^w_1)에 해당하는 모세관 압력수두이다. 임의의 變換點(θ^w_n, Ψ^w_n)에서 시작하는 n 차마름곡선과 변환점(θ^{d_n}, Ψ^{d_n})에서 시작하는 n 차젖음곡선은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta^{nd}(\Psi) = \theta^w_n - P_a(\theta^{nd}) \cdot [\theta_u - \theta^w(\Psi)] \cdot [\theta^w_n - \theta^w(\Psi)] / \theta_u; \Psi^w_{n-1} \leq \Psi \leq \Psi^w_n, \Psi^{d_0} = \Psi_{min} \quad (23)$$

$$\theta^{nw}(\Psi) = \theta^{d_n} + P_a(\theta^{d_n}) \cdot [\theta_u - \theta^w(\Psi^{d_n})] \cdot [\theta^w(\Psi) - \theta^w(\Psi^{d_n})] / \theta_u; \Psi^{d_n} \leq \Psi \leq \Psi^w_{n-1}, \Psi^w_0 = \Psi_{max} \quad (24)$$

한편 종속영역모형에서 나타나는 바람직하지 못한 특징은 加重值 $P_a(\theta)$ 가 젖음과정에서는 변환점에서의含水量의 함수가 되므로 양함수 형태로 표시되지만, 식(21)에서와 같이 마름과정에서는 마름과정이 진행되고 있는 지점에서의含水量의 함수이므로 음함수 형태로 표시되는 것이다. 따라서 마름곡선을 구하기 위해서는 주어진 θ 에 대해 $P_a(\theta)$ 를 시산법으로 풀어야 하므로 이력현상을 고려한 비포화 흐름을 수치적으로 해석하려면 불편하고 복잡해진다.

본 연구에서는 加重值 $P_a(\theta)$ 를 식(20)과 같이 既知化시켰기 때문에 1차마름과정에서 Ψ 가 주어졌을 경우 식(20)과 식(21)을 이용하여 1차마름곡선 θ^{1d} 를 다음과 같은 식을 이용하여 직접 구하고자 한다.

$$\theta^{1d}(\Psi) = 0.5 \cdot (-B - [abs(B^2 - 4C)]^{1/2}) \quad (25)$$

$$B = D^2 / \theta_u - 2\theta^w_1$$

$$C = (\theta^w_1)^2 - D^2$$

$$D = (\theta_u - \theta^w_1(\Psi)) \cdot (\theta^w_1 - \theta^w_1(\Psi)) / \theta_u$$

상기 식은 주어진 Ψ 에 대해 마름과정에서의 θ^{1d} 를 직접 구할 수 있으므로 모세관 압력수두가 종속변수인 Richards식에 직접 적용할 수가 있다. n 차마름곡선을 나타내는 식(23)도 같은 방법을 사용하여 양함수 형태로 표시할 수 있다. 따라서 非飽和 흐름을 해석할 때 개발된 履歷現象 모형을 용이하게 적용할 수가 있다.

4. 模型의檢證

본 연구에서 개발한 모형은 종속영역모형중 Mo-

del III-1에서 加重值 $P_a(0)$ 를 Mualem도식의 履歷現象 主曲線에서 무차원 공극반경 r 과 선형적 관계로 가정하여 模型의 檢定을 위해 한개의 主曲線이 필요한 模型으로 Model III-1을 단순화시킨 것이다. 이와같이 단순화된 模型은 실측자료를 모의하는데 있어서 '正確性'만 유지된다면 非飽和 흐름을 해석하는데 유용하게 사용될 수 있다. 따라서 본 절에서는 이력현상을 模型화하는 목적이 正確성을 유지하면서 模型의 檢定에 필요한 실측자료의 수를 줄이는데 있다는 점에 초점에 맞추어 개발된 模型을 檢證하고자 한다. 또한 개발된 模型을 사용하여 履歷現象을 고려한 Richards식의 수치해와 실측치와의 비교에서 수치해가 실측치를 잘 모의하고 있음을 보여 檢證을 수행하고자 한다.

기존에 발표된 模型중에서 模型의 檢定을 위해 한개의 主曲線에 대한 實測資料가 필요한 模型으로는 독립영역개념에 기초한 Mualem⁽⁴⁾의 Model I-1과 Model II-1, Parlange⁽¹⁵⁾의 模型이 있다. Fig. 5와 Fig. 6은 각각 Sand(Poulovassilis⁽⁷⁾)와 Caribou Silt Loam(Topp⁽¹³⁾)에 대한 실측자료를 이용하여 상기 3개 模型과 개발된 模型이 주젖음곡선으로부터 주마름곡선을 模擬하고 있는 그림이다.

Fig. 5와 Fig. 6에서 알 수 있듯이 Model I-1은 주마름곡선을 과대모의하고 있고 Model II-1은 과

소모의하고 있는 반면, Parlange's Model은 주마름곡선의 경향을 전혀 모의하고 있지 않다. 한편 개발된 模型은 다른 模型들보다 주마름곡선을 정확하게 模擬하고 있다. 따라서 개발된 模型은 履歷現象을 模型화하는 목적중에서 正確성을 증대시키는 模型의 개발이란 목적에 부합된다고 판단된다.

박창근과 선우중호⁽⁶⁾에 의하면 模型의 檢證을 위해 한쌍의 主曲線에 대한 실측자료가 필요한 기준의

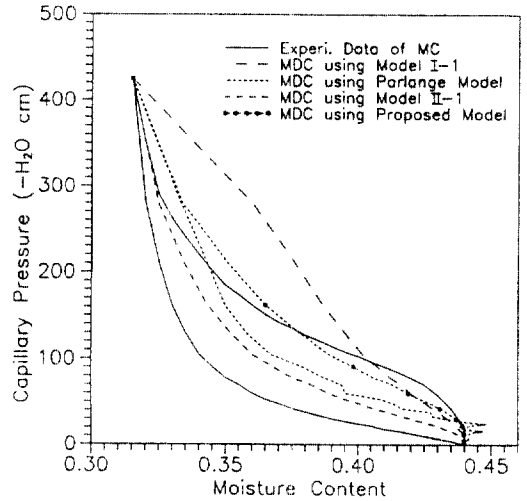


Fig. 6. Comparison of Proposed Model with Existing Models & Experimental Data[Caribou Silt Loam: Topp(1971)]

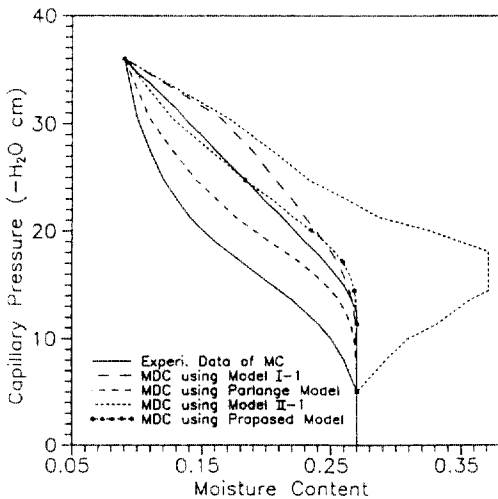


Fig. 5. Comparison of Proposed Model with Existing Models and Experimental Data[Sand: Poulovassilis(1970)]

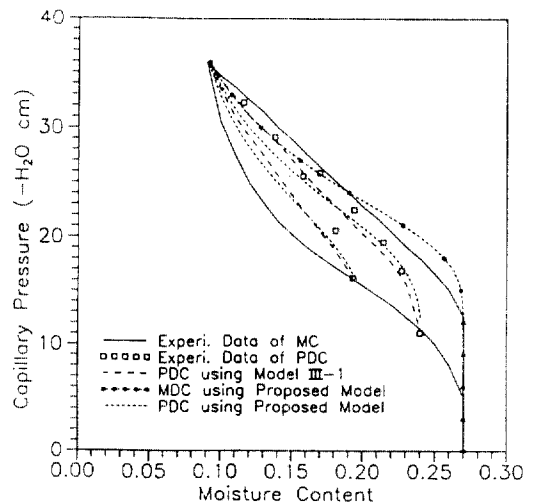


Fig. 7. Comparison of PDCs Simulated by Proposed Model & Model III-1[Sand: Poulovassilis(1970)]

모형들중에서 Model III-1이 이력현상을 모형화하는 목적에 가장 부합하는 모형이다. 개발된 모형과 Model III-1을 이용하여 模擬한 1차마름곡선과 실측자료와의 비교가 Fig. 7에 나타나 있다. 이 두 모형은 거의 같은 正確性을 가지면서 1차마름곡선에 대한 실측자료를 잘 모의하고 있음을 알 수 있다. 따라서 개발된 모형은 이력현상을 모형화하는 목적중에서 正確性을 유지하면서 모형의 檢定을 위해 필요한 실측자료의 수를 줄이는 模型의 개발이란 목적에 부합한다고 판단된다.

이력현상을 모형화하는 궁극적인 목적은 非飽和 흐름을 正確하고 효율적으로 해석하고자 하는데 있으므로, 개발된 모형을 사용하여 이력현상을 고려한 수치해와 실측치를 비교하여 개발된 모형의 타당성을 檢證하는 것이 필요하다. 본 연구에서 개발된 模型을 사용하여 이력현상을 고려한 Richards식의 수치해와의 비교에 사용된 실측치는 Hoa 등(16)의 실험에 의한 것이다. 실험에 사용된 흙은 Fontaineb-

leau Sand이고 고려한 흙기둥의 깊이는 100 cm이다. 사용된 初期條件은 흙기둥이 飽和狀態이고 압력은 정수압 분포를 따르므로 공기한계 압력의 영향 때문에 지표면에서의 모세관 압력수두는 $\Psi_{se}(= -30 \text{ cm H}_2\text{O})$ 이다. 바다 境界條件은 $0 \leq t \leq 270 \text{ min}$ 에서는 $q(=K_s/10)$, 포화투수계수 $K_s=27 \text{ cm/h}$ 만큼의 흐름율(flux)이 작용하는 것이므로 이 때 흙기둥내에서는 마름과정이 진행되고, $270 \text{ min} \leq t \leq 360 \text{ min}$ 에서는 q 만큼의 흐름율이 작용하는 것이므로 이 때 흙기둥내에서는 젖음과정이 진행된다. 본 연구에서는 van Genuchten(17)이 제시한 다음과 같이 표시되는 물보유함수와 투수계수식을 사용하였다.

$$S(\Psi) = (1 + |a\Psi|^n)^{-m} \quad (26)$$

$$K_r(S) = S^{1/2} \{1 - (1 - S^{1/m})^m\}^2; \quad m = 1 - 1/n \quad (27)$$

여기서 $K_r(=K/K_s)$ 은 상대투수계수이다. Fontainebleau Sand에 대한 van Genuchten 모형의 매개변수 a 와 n 은 각각 0.04896, 4.87073이다. Fig. 8(b)의 含水量은 Fig. 8(a)의 모세관 압력수두에 해당하는 含水量이 된다. Fig. 8은 개발된 模型을 사용하여 履歷現象을 고려한 수치해와 실측치가 잘 일치하고 있음을 보여준다. 따라서 개발된 이력현상 모형은 비포화 흐름을 正確하고 효율적으로 해석하고자 할 때 적용되어 질 수 있다고 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서 기존의 Mualem(1)의 Model III-1에서 공기가 공극으로 진입할 때 이에 대한 공극들의 방해효과를 설명하는 加重值 $P_s(\theta)$ 가 무차원 공극 반경 r 과 선형적 관계를 가진다는 가정은 타당함을 알 수 있었고, 이러한 가정을 바탕으로 하여 모형의 검정을 위하여 한개의 주곡선이 필요한 새로운 모형을 개발하였다.

개발된 모형은 모형의 검정을 위하여 한개의 주곡선이 필요한 모형들(Mualem(4))인 Model U-1과 Model II-1, Parlange(15)의 모형보다 실측치를 잘 모의하고 있음을 알 수 있었고, 또한 한쌍의 주곡선이 필요한 영역모형중에서 이력현상을 모형화하는 목적에 가장 부합한 Mualem(1)의 Model III-1과의 비교에서 개발된 모형은 거의 같은 正確性을 가지

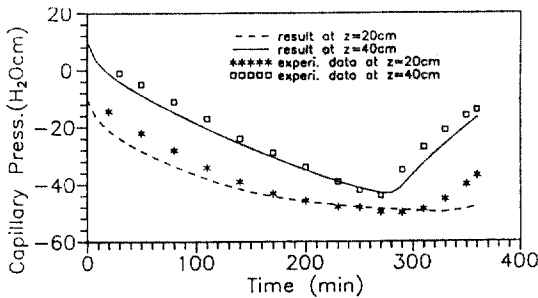


Fig. 8(a). Comparison of Simulated $\Psi(t)$ History using Proposed Model with Hoa et al. (1977)'s Experimental Data

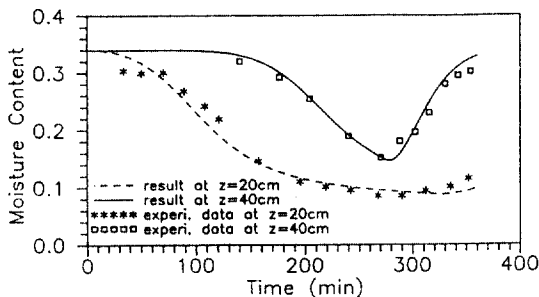


Fig. 8(b). Comparison of Simulated $\Theta(t)$ History using Proposed Model with Hoa et al. (1977)'s Experimental Data

면서 실측자료를 모의하고 있음을 알 수 있었다. 뿐만 아니라 개발된 모형은 비포화 흐름을 해석할 때 효율적으로 적용될 수 있음을 알 수 있었다.

參 考 文 獻

1. Mualem, Y., "A Modified Dependent-Domain Theory of Hysteresis", *Soil Science*, 137(5), 1984, pp. 283-291.
2. Poulouvassilis, A. and Childs, E.C., "The Hysteresis of Pore Water: The Non-Independence of Domains", *Soil Science*, 112(5), 1971, pp. 301-312.
3. Philip, J.R., "Similarity Hypothesis for Capillary Hysteresis in Porous Materials", *J. of Geophysical Research*, 69(8), 1964, pp. 1553-1562.
4. Mualem, Y., "Extension of the Similarity Hypothesis Used for Modeling the Soil Water Characteristics", *W.R.R.*, 13(4), 1977, pp. 773-780.
5. 박창근, 선우중호, "비포화 흐름에서 모세관 이력 현상 모형의 고찰: State of The Art", **한국수문학회지**, 제25권, 제3호, 1992, pp. 65-77.
6. Mualem, Y., "A Conceptual Model of Hysteresis", *W.R.R.*, 10(3), 1974, pp. 514-520.
7. Poulouvassilis, A., "The Effect of the Entrapped Air on the Hysteresis Curves of a Porous Body and on its Hydraulic Conductivity", *Soil Science*, 109(3), 1970, pp. 154-162.
8. Gillham, R.W., Klute, A. and Heermann, D.F., "Hydraulic Properties of a Porous Medium: Measurement and Empirical Representation", *J. of Soil Sci. Soc. Am.*, 40(2), 1976, pp. 203-207.
9. Curtis, A.A., and Watson, K.K., "Hysteresis Affected Water Movement in Scale Heterogeneous Profiles", *W.R.R.*, 20(6), 1984, pp. 719-726.
10. Banerjee, M. and Watson, K.K., "Numerical Analysis of Soil Water Movement under Conditions of Rapid Intermittency of Water Application", *W.R.R.*, 20(1), 1984, pp. 119-125.
11. Poulouvassilis, A., "The Infiltration of the Initial Water Condition on the Redistribution of Soil Water after Infiltration", *Soil Science*, 135(5), 1983, pp. 275-281.
12. Topp, G.C., "Soil-Water Hysteresis Measured in a Sandy Loam and Compared with the Hysteretic Domain Model", *Proc. of Soil Sci. Soc. Am.*, 33, 1969, pp. 645-651.
13. Topp, G.C., "Soil Water Hysteresis in Silt Loam and Clay Loam Soils", *W.R.R.*, 7(4), 1971, pp. 914-920.
14. 박창근, "비포화 비균질 다공성 매질에서 이력현상 모형의 개발과 적용", 서울대학교 박사학위논문, 1993.
15. Parlange, J.Y., "Capillary Hysteresis and the Relationship between Drying and Wetting Curves", *W.R.R.*, 12(2), 1976, pp. 224-228.
16. Hoa, N.T., Gaudu, R. and Thirriot, C., "Influence of the Hysteresis Effect on Transient Flows in Saturated-Unsaturated Porous Media", *W.R.R.*, 13(6), 1977, pp. 992-996.
17. van Genuchten, M.T., "A Closed -Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *J. of Soil Sci. Soc. Am.*, 44, 1980, pp. 892-898.

(接受 : 1993. 6. 23)