

천이류에서의 관마찰

Pipe Friction in Transition Flow

유 동 훈*

Yoo, Dong Hoon

Abstract

On the basis of Nikuradse laboratory experiments, two transition flow regimes are defined with respect to the characteristics of boundary layer. One is the transitional turbulent flow which has a transitional characteristics between smooth turbulent flow and rough turbulent flow, and the other may be called as transitional laminar flow which has transitional features between laminar flow and turbulent flow. The laboratory results of Nikuradse are carefully re-examined, and the flow regions are clearly defined. The velocity profile of the transitional turbulent flow is described by newly formulated equation, and the Darcy-Weisbach friction coefficient for the transitional turbulent flow is determined based on the theoretical form of profile equation, which is far better accurate than Colebrook-White equation. Difficulties still arise for the description of velocity profile when the flow undergoes from laminar to turbulent. In this case a linear interpolation procedure is proposed for the estimation of friction coefficient.

요 지

관로흐름은 관벽과의 마찰 정도에 따라 층류와 난류, 난류인 경우 관벽은 매끄러운관 또는 緩亂流(smooth turbulent flow) 조건과 거칠은 관 또는 全亂流(rough turbulent flow) 조건으로 뚜렷이 대별할 수 있으며 층류와 완난류의 변이부에 해당하는 층류-완난류 천이조건 즉 遷移層流와 완난류-전난류 변이부 즉 遷移亂流 등 모두 다섯개의 조건으로 구분지어 해석할 수 있다. 층류, 완난류 및 전난류 조건에서의 마찰계수 산정에는 기존 Prandtl의 이론식에 상당한 신뢰를 두고 있으나 천이난류에서의 마찰계수산정에 쓰고 있는 Colebrook-White 조합식은 이의 정도에 많은 의문점을 두어 왔다. 본 연구에서는 Nikuradse의 실험결과를 재 분석하여 천이난류조건에서의 유속분포식을 구하였으며, 이에 근거하여 관로에서 천이난류조건에 대한 마찰계수 산정식을 개발하였다. 천이층류에 대하여는 마찰계수를 내삽법으로 구할 것을 제의한다.

1. 서 론

모든 유체흐름의 마찰력산정은 Prandtl의 혼합거

리이론(mixing length theory)에 그 이론적 근거를 두며, 특히 그의 유속분포식은 광범위한 조건에서 일반적으로 적용될 수 있기 때문에 다양한 형태의 수로마찰계수 산정식 개발에 이용될 수 있을 것으로

*정회원 · 아주대학교 공과대학 토목공학과 부교수

밀어져 왔다(Prandtl, 1925). Prandtl의 제자인 Nikuradse (1932)는 관경과 조도의 여러 조건에 대하여 실험한 결과 조도비와 Reynolds 수에 따라 난류조건에서 매끄러운관(smooth wall) 또는 緩亂流(smooth turbulent flow)와 거칠은 관(rough wall) 또는 全亂流(rough turbulent flow)로 뚜렷이 구분 지을 수 있음을 발견하였으며, 이에 대하여 각각 Prandtl의 이론식은 실험치와 잘 일치함을 확인하였다. 그러나 완난류와 전난류의 변이구간에 해당하는 遷移亂流(transition turbulent flow) 조건에 대한 해석은 미흡하였다.

천이난류조건에서의 관마찰계수를 산정하는 식으로 Colebrook과 White는 Prandtl의 완난류 산정식과 전난류 산정식을 조합하여 천이난류 산정식을 구하였으며 Colebrook-White식은 천이난류뿐 아니라 완난류와 전난류 조건에도 사용할 수 있는 범용성을 가질 것으로 믿어져 왔다(참조 Colebrook, 1938). Moody Diagram은 Colebrook-White식으로 구해진 마찰계수를 전대수좌표지에 구성한 도표로서 아직까지 많은 공학문제에 사용되고 있다. 그러나 Bradley와 Thompson(1951)에 의하면 Colebrook-White식은 대구경 관내 흐름과 천이난류조건에서 상당한 오차를 줄 수 있다고 밝힌 바 있는데, 그럼에도 불구하고 Colebrook-White식은 아직까지 많은 공학문제에 적용되고 있다. 이는 상용관에서 조도비의 불확실성과 보다 근원적으로 아직까지 천이난류조건에서의 마찰계수를 올바르게 산정하는 적합한 식이 개발되지 못한데 그 원인이 있는 것으로 사료된다.

본고는 우선 Nikuradse의 실험결과를 재 분석하여 원형관내 경계층 흐름의 특징을 면밀히 검토하고, 층류, 완난류와 전난류 조건 등 세 조건의 변이구간인 천이층류와 천이난류 구간을 명확히 한다. 특히 천이난류의 특징으로서 완난류와 전난류와의 연계성을 추출하였으며, Prandtl의 혼합거리이론을 확장하여 천이난류 조건에서의 유속분포식을 구하였다. 새로운 유속분포식에 근거하여 천이난류 조건에서의 마찰계수 산정식을 개발하였으며 천이층류에 대하여는 내삽법으로 구할 것을 제시한다. 전 구간에 대한 마찰계수 산정결과를 Nikuradse의 실험자료와 비교하여 보았다.

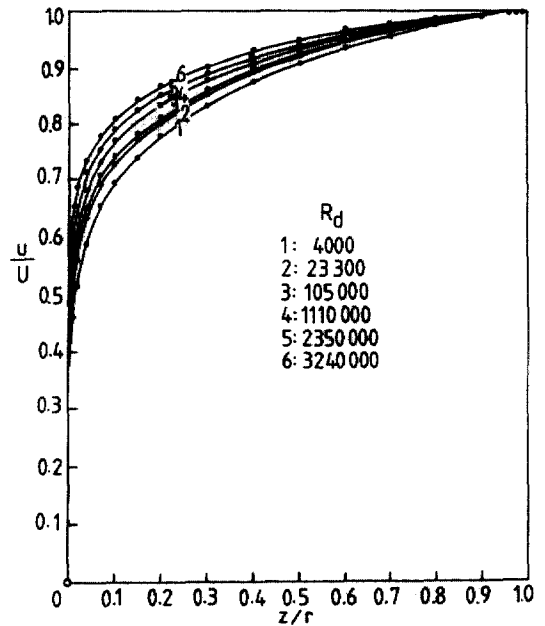


그림 1. 여러 관경 Reynolds수에 대한 관내 유속분포도 (Nikuradse 실험)

2. Nikuradse 실험자료

Nikuradse(1932, 1993)는 1차 실험에서 관경 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 10 cm 등 다섯가지 규격의 매끄러운 강관에, 2차 실험에서는 관경 2.5 cm, 5 cm와 10 cm 등 세가지 규격의 강관에 직경 0.1 mm에서 1.6 mm까지 다양한 크기의 모래를 아교로 붙여서 실험하였으며, 모래를 접착한 후 아교의 두께를 고려하여 관의 내경을 정밀하게 측정하였다. 그의 실험자료는 그림 1과 2에 제시된 바와 같이 잘 정리되어 있는데, 조도에 대한 관의 반경비(r/k_s)가 15, 30.6, 60, 126, 252, 507 등 여섯가지 경우에 대하여 최대 단면평균유속(U)을 20 m/s 이상까지 송출하여 관경 Reynolds수(R_d)는 최소 500으로부터 최대 1000,000까지 광범위한 영역에 걸쳐 유속을 약간씩 변화시키며 상당히 많은 조건에 대하여 실험하였다.

1차 실험중 대구경 관로흐름에서는 Pitot관을 이용하여 관내 각 지점(z)에서의 유속(u)을 관측하여 유속분포를 도시하였는데 그림 1과 같다. 관경 Reynolds수가 커짐에 따라 벽 가까이에서 유속이 더

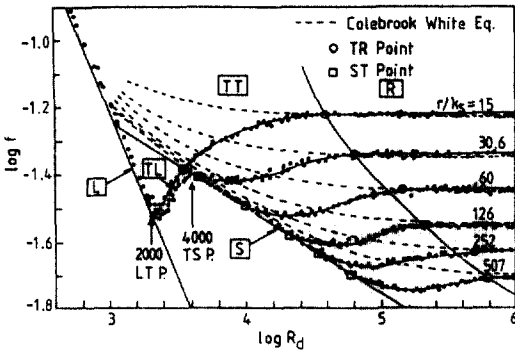


그림 2. Colebrook-White 식으로 구한 관마찰계수와 Nikuradse의 실험결과

급격히 변하는데, 주목할 점은 Reynolds수에 관계 없이 모든 분포곡선이 변곡점 없이 단일선으로 나타내진다는 사실이다. 즉 외부유동에서처럼 내난류 영역(inner turbulent region)과 외난류영역(outer turbulent region)의 구분이 없으며, 관벽으로부터 관중심점까지 전 구간이 단일 난류경계층으로 형성된다. 이는 직경 10 cm 이상의 상당히 큰 관내 흐름도 마찬가지일 것으로 예상되며 관로흐름에는 자유흐름영역이 존재치 않을 것으로 사료된다. 중력의 영향으로 약간의 차이는 있겠지만 원형관의 대칭성으로 모든 단면에서 이와 거의 같은 분포곡선을 가질 것이다.

Nikuradse는 이상의 유속분포곡선과 계량수조를 이용하여 단면 평균유속을 산출, Darcy-Weisbach 마찰계수를 산정하여 도시하였는데 그림 2와 같다. 실험결과와 회귀곡선으로부터 알 수 있듯이 세 영역에서 뚜렷이 직선분포를 보이는데 관경비에 관계 없이 관경 Reynolds수가 대략 2,000까지는 層流(laminar flow, L) 구간으로서 Hagen-Poiseuille의 이론식(본고의 식 (20))과 대체적으로 잘 일치한다. Reynolds수가 2,000으로부터 대략 4,000까지 급격히 증가하다가 다시 그들의 대수치가 선형적으로 감소하는데 관경비에 따라 그림 2에서 □로 표시된 선형분포의 최종점이 달라진다. 일례로 관경비가 60일 때 선형분포의 최종점은 약 10,000이며 관경비가 507일 때 약 63,100이다. 이 구간을 흔히 매끄러운 관(smooth wall)이라 일컫는데 본고에서는 타 구간 용어와의 상관성을 고려하여 緩亂流(smooth turbu-

lent flow, S) 구간이라 칭한다. □로 표시된 완난류 구간의 최종점으로부터 마찰계수는 완만한 곡선분포를 보이다가 ○로 표시된 점으로부터 직선분포를 보인다. 이 직선분포구간을 흔히 거칠은 관(rough wall)이라 일컫는데 이 구간은 全亂流(completely rough turbulent flow, R)구간이라 칭한다. 이 구간의 시작점 역시 관경비에 따라 Reynolds수가 다르다.

이상의 세 직선분포를 보이는 구간은 명확한 개념 정의가 이루어져 왔으며, 이론식의 전개도 용이하다. 그러나 세 구간, 즉 층류, 완난류와 전난류의 천이 구간에 대하여는 충분한 해석이 이루어지지 않았는데 본고에서 층류와 완난류의 변이구간을 遷移層流(transition laminar flow, TL) 구간이라 칭하고 완난류와 전난류의 변이구간은 遷移亂流(transition turbulent flow, TT) 구간이라 칭한다. 또한 관경 Reynolds수가 대략 2,000이 되는 층류와 천이층류와의 경계점을 LT 경계점, Reynolds수가 대략 4,000이 되는 천이층류와 완난류의 경계점을 TS 경계점, 완난류와 천이난류의 경계점을 ST 경계점, 천이난류와 전난류의 경계점을 TR 경계점이라 칭한다.

여기서 주의할 점은 관경비가 30.6 이상일 때 TS 경계점은 관경비에 관계없이 관경 Reynolds수가 항상 4,000인데 관경비가 15일 때는 TS 경계점이 4,000보다 작다는 점이다. 이 경우 완난류구간은 존재치 않으며 천이층류 TL 구간으로부터 천이난류 TT 구간으로 바로 연결되는데 두 구간을 합쳐서 천이류(transition flow) 구간이라 칭할 수 있을 것이다. 또한 특기할 점은 ST 경계점과 TR 경계점이 거의 동일한 곡선을 따라 분포하고 있다는 점이다. 흔히 ST 경계점과 TR 경계점의 판별치로서 조그 Reynolds수를 기준으로 하는데 이는 다음 절의 이론 전개 후 논할 예정이다.

3. 기존 경계층이론

Prandtl의 혼합거리이론은 난류운동해석에 획기적인 전기를 마련하였으며, 최근에 Prandtl 이론의 적용범위에 대한 회의론도 대두되었으나 아직까지 많은 난류운동해석에 이용되고 있다. Prandtl 이론의 근간은 유속의 난류성분이 유속변화율과 혼합거리에 비례하며, 이 때 혼합거리는 저층 가까이에서 저층

으로부터 거리에 비례한다는 가정이다. 이러한 가정하에 난류층(turbulent layer)에서는 유속이 대수 분포를 가지며, 다음과 같이 간단히 묘사된다.

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (1)$$

여기서 u 는 각 지점에서의 유속, u_* 는 마찰속도, z 는 바닥으로부터의 높이, z_0 는 영점높이, k 는 von Karman 상수로서 저층가까이에서 0.4이다.

Nikuradse(1932)의 실험결과에 의하면, 관벽이 유속조건에 비하여 매끄러운 때는 유속분포가 위치 Reynolds수 u_*z/ν 의 함수로 경계조건계수가 일정해지며 다음과 같이 표기된다.

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{u_*z}{\nu} + A \quad (2)$$

여기서 ν 는 동점성계수이며 A 는 상기식의 형태를 취했을 때 나타나는 경계조건계수이며 매끄러운 관(smooth wall) 또는 완난류조건(smooth turbulent flow)에서 일정하게 $A=5.5$ 이다. 이에 반하여 관벽이 거칠음과 동시에 유속이 클 때는 유속분포가 조도비 z/k_s 의 함수로 취하여 경계조건계수가 일정해지며,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{u_*z}{\nu} + B \quad (3)$$

로 묘사된다. 여기서 k_s 는 Nikuradse 유효조도고이며 B 는 식 (3)의 형태를 취했을 때 나타나는 경계 조건계수로서 거칠은 관(rough wall) 또는 전난류 조건(rough turbulent flow)에서 일정하여 $B=8.5$ 이다.

상기 식들에서 각 계수 k , A , B 등은 최근의 정밀 관측에서 관측자에 따라 약간의 변화를 보이고는 있으나 여타 유체조건에 관계없이 일정한 절대상수들(universal constants)로서 인식되고 있으며, 그림 1에 도시한 바와 같은 유속분포에 적용되고, 마찰 계수는 상기 식들을 적분하여 구해진다. 마찰계수 C_f 를

$$\sqrt{C_f} = u_*/U \quad (4)$$

로 정의할 때, Darcy-Weisbach 마찰계수 $f=8C_f$ 이며, 여기서 U 는 단면평균유속이다. 관경이 d 또는 반

경이 r 인 원형관로에 대한 마찰계수를 구할 때, 영점높이 z_0 의 일반적인 대수분포에 대하여, 식 (1)을 적분하여

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = \frac{1}{k} (\ln \frac{r}{z_0} - 1.5) \quad (5)$$

매끄러운 관인 경우, 식 (2)를 적분하여

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = \frac{1}{k} (\ln \frac{u_*r}{\nu} - 1.5) + A \quad (6)$$

거칠은 관인 경우, 식 (3)을 적분하여

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = \frac{1}{k} (\ln \frac{r}{k_s} - 1.5) + B \quad (7)$$

이 구해진다. Nikuradse(1933)는 상기 식들에서 자연대수식 대신에 상용대수식을 사용하고 각 상수들을 대입한 후 약간의 수치조정을 취하여 Darcy-Weisbach 마찰계수산정식을 다음과 같이 제시하였다. 즉

매끄러운 관에 대하여 식 (6)으로부터

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log R_d \sqrt{f} - 0.8 \quad (8)$$

여기서 R_d 는 관경 Reynolds수로서 $R_d=Ud/\nu$ 이며, 거칠은 관에 대하여 식 (7)로부터

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{d}{k_s} + 1.14 \quad (9)$$

상기식들은 각각의 조건, 즉 완난류조건인 매끄러운 관에 대하여는 식 (8)로, 전난류조건인 거칠은 관에 대하여는 식 (9)로 산정된 관마찰계수는 Nikuradse의 실험결과와 잘 일치한다.

완난류와 전난류뿐 아니라 천이난류조건에도 적용할 목적으로 Colebrook과 White는 Nikuradse식 (8)과 (9)를 조합하여 다음과 같이 제시하였다.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.5}{R_d \sqrt{f}} + \frac{k_s}{3.7d} \right) \quad (10)$$

이상과 같이 Colebrook-White식은 실험자료로부터 도출된 것이 아니라 그 근원은 두 이론식 (8)과 (9)의 조합으로 만든 것이며, 상용관의 조고를 이

조합식에 대비하여 산정하였다. Colebrook(1938)의 실험결과는 주로 천이난류 구간과 일부 완난류 구간에 해당하는데 Nikuradse의 실험결과와 달리 상당히 불규칙한 분포 양상을 띄고 있다. 이는 조도의 불규칙성 뿐 아니라 관의 형상이 완벽한 원형이 아닌 이유도 있는 것으로 사료된다. 상기 Colebrook-White식은 Moody Diagram의 기본으로 모든 난류 구간에 적용할 수 있을 것으로 주장하였는데 그림 2에 제시된 바와 같이 완난류와 천이난류구간에서는 많은 오차를 발생하고 있다. 일례로서 조도에 대한 관경비가 15이고 Reynolds수가 2,000인 경우 즉 LT 경계점에서 실험결과는 마찰계수 f 가 0.03인 반면에 Colebrook-White식 또는 Moody diagram으로부터는 약 0.072로 산정되어 2배 이상의 오차를 보이고 있다. 따라서 매끄러운 관에 대하여 상기 조합식의 부적합성은 확연하게 나타난다. 대부분의 관로조건이 완난류조건으로부터 천이난류조건에 해당되는 것으로 인식됨에 우선 Nikuradse의 실험조건과 같이 이상적인 형태의 원형관로 흐름에서 천이난류조건에 대한 올바른 마찰계수산정식 개발이 요구되고 있으며, 상용관에서 나타나는 마찰계수의 불규칙한 분포현상은 여타 인자의 도입으로 해석하여야 할 것이다.

4. 천이난류 경계층이론

완난류와 전난류뿐 아니라 천이난류조건에도 적용하고자 고안한 Colebrook-White식의 문제점은 경계층흐름의 특성을 충분히 고려하지 않고 Prandtl의 최종 마찰계수산정식들을 단순 합성한 사실에 연유한다. 따라서 우선 천이난류조건에 적합한 유속분포식을 도출한 후 이 조건에 대한 마찰계수 산정식을 개발하고자 한다.

완난류조건에 사용되는 유속분포식 (2)와 전난류조건에 사용되는 유속분포식 (3)은 각각의 조건에만 적용되는 전혀 별개의 분포식으로 인식되고 있으나 실제로는 경계조건계수 A와 B의 조정으로 다 조건에도 사용될 수 있으며, 영점 높이 z_0 의 조정으로 유속분포식 (1)도 두 조건 모두에 사용될 수 있다. 즉 세 식은 모두 대수분포를 보이며, 조고 Reynolds수 $R_k = u_* k_s / \nu$ 를 도입하여 $A = 8.5 - k^{-1} \ln R_k$ 을

취하면 (2)식은 전난류조건에 대한 유속분포식이 되며, $B = 5.5 + k^{-1} \ln R_k$ 을 취하면 (3)식은 완난류조건에 대한 유속분포식이 된다. 따라서 식 (1), (2)와 (3)으로부터 계수 A, B와 영점높이 z_0 는 다음과 같은 관계에 있으며,

$$B = A + k^{-1} \ln R_k \quad (11)$$

$$z_0 = \text{EXP}(-kB) k_s \quad (12)$$

세 대수분포식들은 계수조정으로 천이난류조건에도 적용할 수 있을 것으로 쉽게 추론할 수 있다. 영점높이 z_0 는 완난류인 경우 $0.11 \nu / u_*$ 이며 전난류인 경우 $0.033 k_s$ 가 된다.

계수 A는 완난류에서 상수 5.5로부터 전난류에서 $8.5 - k^{-1} \ln R_k$ 까지 변하며 계수 B는 완난류에서 $5.5 + k^{-1} \ln R_k$ 로부터 전난류에서 상수 8.5까지 변하는데 Nikuradse의 실험결과는 계수 B의 변이를 잘 보여주고 있다. 그림 3에 도시된 바와 같이 계수 B는 조고 Reynolds수가 약 50 이상일 때 즉 전난류조건인 경우 상수가 되어 8.5이며 조고 Reynolds수가 약 3 이하일 때 즉 완난류조건인 경우 $B = 5.5 + k^{-1} \ln R_k$ 에 가까운 분포를 보이고 있다. 그러나 천이난류인 경우 간단한 식의 도출이 곤란할 정도로 독특한 분포를 보이고 있는데 다만 조고 Reynolds수 R_k 의 함수임은 분명히 알 수 있다.

적절한 천이난류식의 도출을 위하여 천이난류조건 범위를 정확히 판별할 필요가 있다. 흔히 각 난류조건 판별계수로서 조고 Reynolds수 R_k 를 사용해 왔으며, 약간의 이견은 있지만 완난류와 천이난류의 경계는 $R_k = 3$, 천이난류와 전난류의 경계는 $R_k = 70$ 을 기준으로 삼아왔다. 이는 그림 3에 제

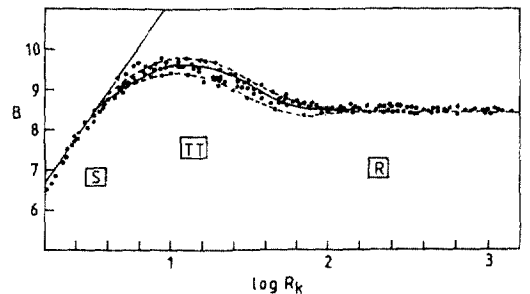


그림 3. 조고 Reynolds수 R_k 에 대한 경계조건계수 B의 변이 (Nikuradse 실험)

시된 Nikuradse의 실험자료에 근거하여 얻어진 결론인데, 본 저자가 천이난류식을 도출하는 과정에서 이러한 경계조건에 문제점이 있음을 발견하였다. 그림 3에 도시된 Nikuradse의 실험결과는 천이난류구간에서 여타수리조건의 구분없이 상당히 불규칙하게 분포하는 것처럼 보이지만 사실은 관경비 r/k_s 에 따라 동일선상에 분포하는 것으로 판단한다. 이는 그림 2에 나타난 결과를 검토하면 확연하게 드러난다.

그림 2로부터 목도로 추출한 각 난류의 경계점, 즉 완난류-천이난류 ST 경계점과 천이난류-전난류 TR 경계점에서 산출된 R_k 와 R_d 값을 조도비에 대하여 그림 4에 보인 바와 같이 대수지상에 도시하여 보았다. 제시된 바와 같이 R_k 값이 ST점에서 3을 기준으로, TR점에서 70을 기준으로 불규칙하게 분포하는게 아니라 조도비가 작아짐에 따라 비선형적이기는 하지만 같이 작아지는 경향을 보인다. ST 경계점에는 R_k 가 2.5에서 5 정도의 범위 사이에 드는 반면에, TR 경계점에 대하여는 R_k 가 35로부터 105 까지 상당히 폭 넓은 범위에 걸쳐 변이한다. 더욱이 R_k 의 분포경향은 수식화하기 곤란할 정도로 특이하기 때문에 경계조건계수로서 R_k 는 부적합한 것으로 판단되며 R_k 의 분포변화보다 R_d 의 분포변화가 더욱

분명하게 조도에 대한 관경비에 따라 일률적인 증가추세를 보인다. 각 경계점의 R_d 를 조도비의 함수로서 수식화하면 다음과 같다.

$$R_d = \text{EXP}(1.0 \ln d/k_s + 4.40) \text{ for ST Point} \quad (13)$$

$$R_d = \text{EXP}(0.8 \ln d/k_s + 7.83) \text{ for TR Point} \quad (14)$$

상기 ST 경계식 (13)은 $r/k_s = 15$ 이외의 경우 대체적으로 잘 표현해 주고 있다. TR 경계식 (14)는 그림 2에도 도시하였는데 $r/k_s = 60$ 과 $r/k_s = 252$ 인 경우 약간 과소 평가하는 경향은 있지만 이 또한 만족할 만큼 뚜렷한 경향을 보여주며 그의 네 경우는 실험자료와 거의 일치한다.

이러한 경계조건치를 참조하면 그림 3에 도시된 유속분포의 경계조건계수 B는 각 조도비에 따라 점선으로 표시된 동일선상에 분포하고 있음을 알 수 있다. $r/k_s = 15$ 인 경우 천이난류조건에서 B의 최대치는 약 9.4이며, $r/k_s = 507$ 인 경우 B의 최대치는 약 9.8이다. 이상의 분포는 TR 경계점에서의 R_k 에 따라 두가지 식으로 절절히 표현될 수 있는데, 분포식의 도출은 자료의 불충분으로 그림 3에 도시된 계수 B의 분포에 대비하여 적합한 분포식을 여러 시간과정을 거쳐 개발하였다. 천이난류조건에 대한 경계조건계수 A는 다음의 분포식으로 상당히 정확히 계산될 수 있다.

$$A = a_1 + b_1 R_{KR}^{1/2} \quad \text{for } 35 < R_{KR} < 45 \quad (15a)$$

$$A = a_2 + b_2 / (c_2 + R_k) \quad \text{for } 45 < R_{KR} < 200 \quad (15b)$$

여기서 R_{KR} 은 TR 경계점에서의 R_k 이며, 각 상수는 다음과 같다.

$$a_1 = 10.6 - 0.064 R_{KR} \quad (16)$$

$$b_1 = -2.2 + 0.020 R_{KR} \quad (17)$$

$$a_2 = -5.8 - 0.0046 R_{KR} \quad (18)$$

$$b_2 = 410 + 0.492 R_{KR} \quad (19)$$

$$c_2 = 32.5 + 0.0185 R_{KR} \quad (20)$$

식 (15)로부터 경계조건계수 A를 구한 후 유속분포식 (3)에 사용되는 경계조건계수 B는 식 (11)로부터 구할 수 있다.

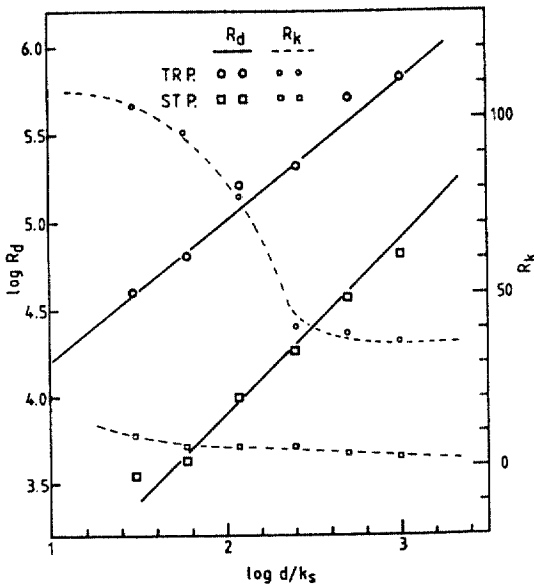


그림 4. 조도비에 대한 ST 및 TR 경계점에서의 R_k 와 R_d

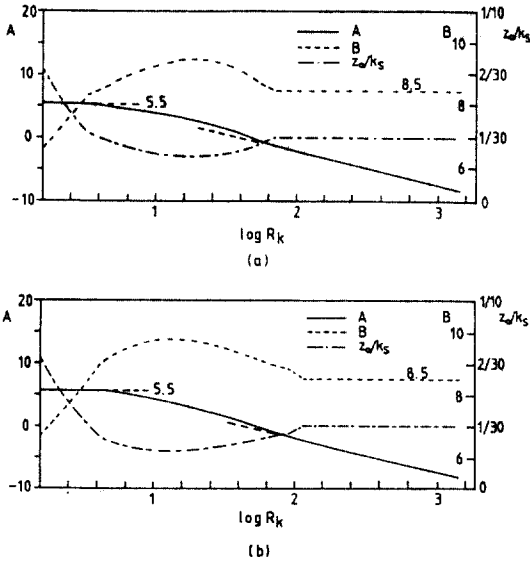


그림 5. 경계조건계수 A, B와 z_0/k_s 의 변이 (a) $R_{KR}=45$ 와 (b) $R_{KR}=70$

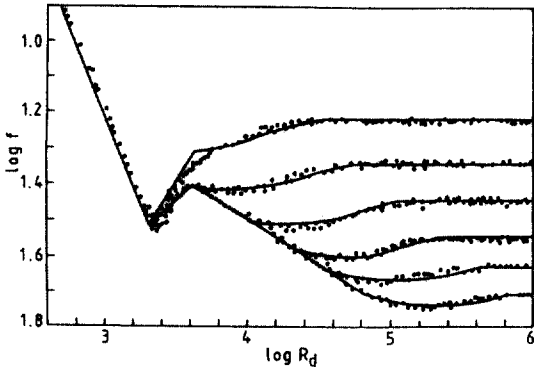


그림 6. 새로운 식으로 구한 관마찰계수 f 와 Nikuradse의 실험자료

R_{KR} 가 45와 70인 경우에 대하여 식 (15)와 제 관계식 (11)과 (12)로 구한 A, B와 z_0/k_s 의 분포가 그림 5에 도시되어 있다. R_{KR} 이 45일 때 완난류조건은 R_k 가 대략 3.0까지이며 이 범위까지 A는 5.5이고 B는 $5.5+k^{-1} \ln R_k$ 의 분포로서 반대수지상에 직선분포를 보인다. 전난류조건은 R_k 가 45 이상에서 B는 8.5이고 A는 $8.5-k^{-1} \ln R_k$ 의 분포로서 역시 반대수지상에 직선분포를 보인다. 이러한 경계내가 천이난류 범위에 해당하며 이때 A와 B는 완만한 곡선분포를 보이며, 영점높이의 최소치는 천이난류

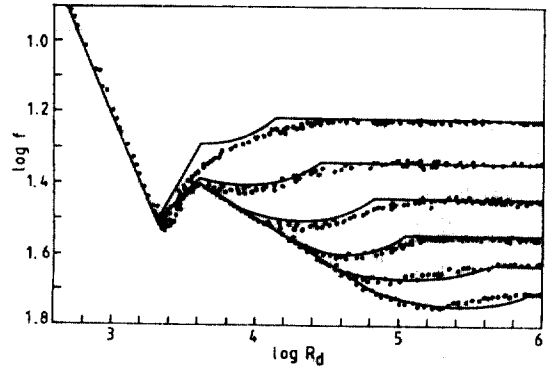


그림 7. 약산식으로 구한 관마찰계수 f 와 Nikuradse의 실험자료

에 존재한다. R_{KR} 이 70일 때 전난류조건으로 B의 수치가 일정하게 8.5이다.

천이난류조건에 대하여 식 (15)를 사용하여 경계조건계수 A를 구한 후 식 (6)을 이용하면 마찰계수를 정확히 산출할 수 있다. 여섯가지 경우의 조도비에 대한 관마찰 계수 산출결과를 Nikuradse 실험자료와 비교하여 그림 6에 도시하였다. 천이난류조건을 포함한 거의 모든 범위에 걸쳐 상당히 만족할만 하나, 단지 $r/k_s=15$ 인 경우에 한하여 약간 과대산정하고 있다. 이는 그림 4에 도시된 바와 같이 경계조건식 (13)이 $r/k_s=15$ 에서 R_d 값을 과소 평가하기 때문이다.

식 (15)는 경계조건계수 A를 정확히 산정하기는 하나 각 상수의 평가식이 복잡하여 이용에 불편하다. 천이난류조건에 대하여 R_{KR} 이 45보다 작을 때 이를 단순화하면 다음과 같다.

$$A = 7.7 - 1.3 R_k^{1/2} \quad (21)$$

식 (21)도 그림 3에 도시된 계수 B의 분포에 대비하여 시산과정을 거쳐 구한 것이다. 그림 7에 도시된 바와 같이 상기 식으로부터 A를 구한 후 산출한 관마찰계수는 약간의 오차를 보이기는 하지만 최대 오차가 10% 내외로 실제 공학문제에 용이하게 사용될 수 있을 것으로 믿는다. 식 (21)을 사용하여 천이난류조건에 대한 마찰계수를 구할 때 R_k 가 45 이상일 때는 전난류조건으로 고려한다.

표 1. 난류조건에 따른 유속분포 경계계수 약산식

난류조건	경계계수	A	B	z_0/k_s
		$B - k^{-1} \ln R_k$	$A + k^{-1} \ln R_k$	$EXO(-Bk) \text{ or } EXP(-Ak)R_k^{-1}$
완난류 $R_k < 3$		5.5	$5.5 + k^{-1} \ln R_k$	$EXP(-5.5k)R_k^{-1} \text{ } 0.11R_k^{-1}$
천이난류 $3 < R_k < 45$		$7.7 - 1.3R_k^{1/2}$	$7.7 - 1.3R_k^{1/2} + k^{-1} \ln R_k$	$EXP(1.3R_k^{1/2} - 7.7))R_k^{-1}$
전난류 $45 < R_k$		$8.5 - k^{-1} \ln R_k$	8.5	$EXP(-8.5k) \text{ } 0.033$

Note : 경계조건계수 A, B와 z_0/k_s 는 각각 난류유속분포식 (2), (3)과 (1)에 사용됨.

5. 천이층류 마찰계수

관내 유체흐름이 층류인 경우 유속분포는 포물선에 따르며 Hagen-Poiseuille 식에 의하면 관마찰계수는

$$C_f = 8 R_d^{-1} \quad (22)$$

으로 산정된다. 그림 2에 도시된 바와 같이 층류는 R_d 가 2,000 이하의 범위에 해당하며, 대략 $R_d = 2,000$ 인 LT 경계점으로부터 TS 경계점까지에 해당하는 천이층류에 대한 해석이 필요하다. 천이난류조건에서는 양 경계의 유속분포가 모두 대수분포를 갖기 때문에 유속분포식의 도출이 용이했으나, 천이층류 조건에서는 한쪽편 층류에서는 포물선 분포를 가지며 다른 한편 완난류에서는 대수분포를 갖기 때문에 유속분포식의 도출이 용이치 않다. 따라서 천이층류 조건에서는 양 경계치로부터 내삽법으로 마찰계수를 산정할 것을 제의한다. 즉

$$C_f = (1 - \alpha)C_{fLT} + \alpha C_{fTS} \quad (23)$$

여기서 C_{fLT} 는 LT 경계점에서의 C_f 이며, C_{fTS} 는 TS 경계점에서의 C_f 이고,

$$\alpha = (R_d - R_{dLT}) / (R_{dTS} - R_{dLT}) \quad (24)$$

R_{dLT} 은 LT 경계점에서의 R_d 이며 대략 2,000이며, R_{dTS} 는 TS 경계점에서의 R_d 이며 식 (13)으로부터 구해지는 ST 경계점의 R_d 보다 클 때 이 값 R_{dST} 로 대치한다.

상기식 (23)으로부터 산출한 관마찰계수가 그림 6과 7에 함께 도시되어 있다. 실험자료와 비교하였을 때 대체적으로 만족할만 하나 $r/k_s = 15$ 인 경우 역시 약간 과대 사정하고 있다. 이 또한 ST 경계조건식의

조정으로 수정될 수 있으나 보다 넓은 범위에서의 실험자료 확보 후 시행할 예정이다.

6. 결론 및 토의

이제까지 마찰계수 산정에 있어 최대의 걸림들은 완난류와 전난류의 변이구간이 되는 천이난류 구간이었으며 이 구간에서의 유속분포를 결정하지 못한 데 그 원인이 있었다. 완난류 유속분포식과 전난류 유속분포식의 최대 유사점은 두 분포 모두 대수분포를 갖는다는 사실이며 두 분포계수의 연결고리로서 조고 Reynolds수 R_k 를 취하여 적절한 천이난류 유속분포식을 도출하였다. 각 난류조건에 대한 관마찰계수 산정식은 각 조건에 해당하는 유속분포식을 면적적분하여 개발하였는데, Nikuradse의 실험자료와 비교하여 상당히 만족할만 하다. 복잡한 수식을 단순화한 약산식도 대부분의 경우 비교적 양호한 산정결과를 주는 것으로 판단되며, 이는 거의 모든 유체역학 문제에 쉽게 이용될 수 있을 것이다. 천이난류조건에 대한 약산식과 함께 각 조건의 경계조건 계수를 구하는 식들을 표 1에 정리하였다.

천이난류조건에 대하여 본고에서 도출한 관마찰계수 산정식은 전적으로 Nikuradse의 실험결과에 기초한 것이므로 본 식의 유효범위는 Nikuradse의 실험범위에 따른다. 즉 조고에 대한 관의 반경비 r/k_s 는 15로부터 507까지이며 관경 Reynolds수는 1,000,000까지이다. 이 범위는 대부분의 공학분체를 포괄할 것으로 판단되나 이 범위 밖의 구간에 대하여 본 식의 형태를 적용하고자 하면 추가적인 실험자료를 확보하여야 할 것이다. 특히 ST 경계조건식은 $r/k_s = 15$ 일 때 상당히 과소평가하는 것으로 판단되므로 실험자료의 보완이 필요하다.

감사의 글

본 연구의 일부는 과학재단의 지원에 의한 1992
년도 박사후 연구과정 중 이루어진 것이다.

참 고 문 헌

1. Bradley, M. and Thompson, T., Friction factors for large conduits flowing full, Eng. Monograph, No. 7, U.S. Dept. of Interior, Bureau of Reclamation, 1951.
2. Colebrook, C.F., Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws, *J. Inst. Civil Eng.*, London, Vol. 11, 1938, pp. 133-156.
3. Moody, L.F., Friction factors for pipe flow, Trans. ASME, 1944.
4. Nikuradse, J., Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Rohren, Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh., Vol. 356, 1932.
5. Nikuradse, J., Stromungsgesetze in rauhen Rohren, Ver. Dtsch. Ing. Forsch., Vol. 361, 1933.
6. Prandtl, L., Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 5, No. 2, 1925, p. 136.

(接受 : 1993. 4.30)