

剪斷變形을 考慮한 空間 뼈대構造的 幾何學的인 非線形 解析

Geometrically Non linear Analysis of Space Frames
Including Shear Deformation Effects

金文榮*

Kim, Moon Young

Abstract

In order to present the geometrically nonlinear F.E. formulation of space frames, two beam/column elements including the effects of transverse shear deformation and bending stretching coupling are developed. In the case of the first element (Finite segment method), the tangent stiffness matrices are derived by directly integrating the equilibrium equations, whereas in the case of the second element (Finite element method) elastic and geometric stiffness matrices are calculated by using the hermitian polynomials including shear deformation effect as the shape function. Both elements possess the usual twelve degrees of freedom. Also, the bowing function including shear deformation effects is obtained in order to account for the effect of shortening of member chord length due to the bending and torsional behavior. Numerical results are presented for the selected test problems which demonstrate that both elements represent reliable and highly accurate tools.

요 지

剪斷變形 效果가 고려되는 空間 뼈대 構造的 幾何學的인 非線形 解析을 수행하기 위한 두 가지 방법 즉, 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 有限分節法의 경우에는 平衡方程式을 直接 積分하므로써 휨과 비틀림 學動에 대한 嚴密한 接線剛度 매트릭스가 유도되는 반면에 有限要素法의 경우에는 剪斷變形을 고려하는 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하므로써 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스가 산정된다. 또한 軸方向力이 零인 경우에 휨 및 비틀림거동으로 인한 부재양단의 길이변화를 보정하는 Bowing 함수와 불평형하중의 산정방법을 제시한다. 선택된 例題들을 解析한 결과들과 다른 文獻의 결과들을 비교, 검토하므로써 本 論文에서 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

1. 서 론

電子計算機의 발달과 더불어 空間 뼈대構造的 幾何學的인 非線形 解析에 관한 研究는 최근까지 활발한 研究結果를 나타내었다. 대체로 直線要素를

사용하는 경우에 이러한 研究들은 要素의 變位場을 節點變位에 대한 形狀函數로 나타내어 彈性剛度 매트릭스와 幾何學的인 剛度매트릭스를 얻는 有限要素法과 축방향력을 받는 뼈대부재의 平衡方程式을 적분하여 강도매트릭스를 엄밀하게 유도하는 有限分節法으로 要約할 수 있다.

* 成均館大學校 工科大學 土木工學科 助教授

非線形 有限要素法을 이용하여 뼈대構造物을 解析한 文獻들은 直線要素를 사용한 Wen과 Rahimzadeh⁽¹⁾과 曲線보 要素를 적용한 Bathe와 Bolourchi⁽²⁾의 論文에서 찾아볼 수 있다. 보-기둥 理論을 이용하는 有限分節法에 관한 研究로는, Saafan⁽³⁾이 힘으로 야기된 水平節點變位の 變化(Bowing Effect)를 고려하여 平面 뼈대에 대한 剛度 매트릭스를 유도하였고 Oran^(4,5)은 이를 平面 및 空間 뼈대로 확장시켜서 接線剛度 매트릭스를 제시하였다. Connor⁽⁶⁾은 剪斷變形을 고려하는 空間 뼈대의 剛度 매트릭스를 誘導하였으며, Meek와 Tan⁽⁷⁾ 그리고 Papadrakakis⁽⁸⁾는 각각 Arc-Length Method와 Vector iteration method를 적용하여 空間 뼈대구조의 후좌굴 해석을 수행하였다. Crisfield⁽⁹⁾는 空間 뼈대要素와 構造物節點의 3次元 回轉問題를 취급하였다. 金과 張^(10,11)은 平面 뼈대構造의 경우에 剪斷變形效果를 고려할 수 있는 有限要素法을 제시하였고, 自動的인 變位 및 荷重増分法을 적용하여 뼈대構造의 大變形 및 後挫屈舉動을 추적하였다.

本 研究에서는 Updated Lagrangian formulation을 적용하여 空間 뼈대構造의 幾何學的인 非線形 解析法을 개발하고자 한다. 이를 위하여 剪斷變形效果를 고려하는 두 가지 해석방법 즉, 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 有限分節法의 경우에는 軸方向力이 고려된 空間 뼈대의 平衡方程式을 直接積分하므로써 휨과 비틀舉動에 대한 嚴密한 接線剛度 매트릭스를 유도하고, 有限要素法의 경우에는 剪斷變形을 고려하는 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하므로써 彈性 및 幾何的인 剛度 매트릭스를 산정한다. 또한 軸方向力이 零인 경우에 휨 및 비틀거동으로 인한 부재양단의 길이변화를 보정하는 Bowing 함수와 不平衡荷重의 산정법을 제시한다. 그리고 空間 뼈대구조의 다양한 후좌굴 및 大變形 거동을 추적하기 위하여 변위 및 하중중분법을 적용한다. 平面 및 空間 뼈대構造의 大變形 및 後挫屈문제를 해석하여 本 研究에 의한 결과들과 다른 文獻의 결과들을 비교, 검토하므로써 本 論文에서 제시된 有限要素理論의 正當性을 立證한다.

2. 보-기둥의 平衡方程式

공간 뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석

이론을 제시하기 위하여 다음과 같은 가정을 둔다.

- 1) 단면은 길이방향으로 일정하며 2축대칭이다.
- 2) 부재의 강체이동변위와 강체회전변위는 유한하지만 변형도는 작다.
- 3) 부재는 부재내부의 각점들이 탄성한계내에 있도록 충분한 세장비를 가진다.
- 4) 각 하중단계에서 변형으로 인한 뼈대부재의 곡선형상은 무시하고, 단순히 축방향력을 받는 두 절점을 잇는 직선부재로 가정한다.

既知의 축방향력을 받는 공간 뼈대요소를 생각한다. 전단력으로 인한 전단변형의 영향을 고려하는 평형방정식, 힘-변위 관계 및 경계조건⁽⁶⁾은 다음과 같이 x_1-x_2 면내의 휨거동, x_1-x_3 면내의 휨거동, 비틀거동 그리고 축방향거동으로 나누어서 나타낼 수 있다.(그림 1 참조) 여기서, 좌표 x_1, x_2, x_3 는 부재좌표계를 나타낸다.

- 1) x_1-x_2 면내의 휨거동

$$\begin{aligned} (F_2 + {}^0F_1 \cdot U_y)' &= 0 & M_3' &= -F_2 & (1) \\ U_y' - \omega_3 &= f_{s2} \cdot F_2/GA & M_3 &= EI_3 \cdot \omega_3' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{경계조건; } U_y(0) &= V^P & {}^0F_1 \cdot U_y'(0) + F_2 &= -F_2^P \\ U_y(L) &= V^Q & {}^0F_1 \cdot U_y'(L) + F_2 &= F_2^Q \\ \omega_3(0) &= \omega_3^P & M_3(0) &= -M_3^P \\ \omega_3(L) &= \omega_3^Q & M_3(L) &= M_3^Q \end{aligned}$$

- 2) x_1-x_3 면내의 휨거동

$$(F_3 + {}^0F_1 \cdot U_z)' = 0 \quad M_2' = F_3 \quad (2)$$

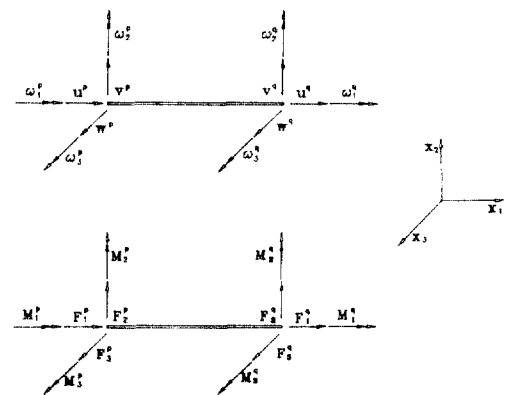


그림 1. Member displacement and member force vector of the space frame element in the member coordinate

$$U_z' + \omega_2 = f_{s3} \cdot F_3/GA \quad M_2 = EI_2 \cdot \omega_2'$$

$$\text{경계조건; } U_z(0) = W^P \quad {}^0F_1 \cdot U_z'(0) + F_3 = -F_3^P$$

$$U_z(L) = W^Q \quad {}^0F_1 \cdot U_z'(L) + F_3 = F_3^Q$$

$$\omega_2(0) = \omega_2^P \quad M_2(0) = -M_2^P$$

$$\omega_2(L) = \omega_2^Q \quad M_2(L) = M_2^Q$$

3) 비틀거동

$$(M_1 + {}^0F_1 \cdot r^2 \cdot \omega_1')' = 0 \quad M_1 = GJ \cdot \omega_1' \quad (3)$$

$$\text{경계조건; } \omega_1(0) = \omega_1^P$$

$$M_1(0) + {}^0F_1 \cdot r^2 \cdot \omega_1'(0) = -M_1^P$$

$$\omega_1(L) = \omega_1^Q$$

$$M_1(L) + {}^0F_1 \cdot r^2 \cdot \omega_1'(L) = -M_1^Q$$

4) 축방향거동

$$F_1' = 0 \quad (4)$$

$$F_1 = EA \cdot [U_x' + 1/2 \cdot (U_y'^2 + U_z'^2 + r^2 \cdot \omega_1'^2)]$$

$$\text{경계조건; } U_x(0) = U^P \quad F_1(0) = -F_1^P$$

$$U_x(L) = U^Q \quad F_1(L) = F_1^Q$$

여기서, 0F_1 는 초기의 축방향력을 표시하며, 비선형해석시 반복계산에서는 각 부재의 현재의(current) 축방향력을 나타낸다. F_1, F_2, F_3 는 각각 축방향력, x_2 및 x_3 축방향의 전단력을 나타내고, M_1, M_2, M_3 는 각각 비틀모멘트, x_2 및 x_3 축방향의 휨모멘트를 표시한다. 그리고 U_x, U_y, U_z 는 각각 축방향변위, x_2 및 x_3 축방향의 처짐을 나타내고, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각 비틀각, x_2 및 x_3 축방향의 회전각을 표시한다. $EA, EI_2, EI_3, GJ, GA/fs_2, GA/fs_3$ 는 각각 축방향 강성, x_2 및 x_3 축방향의 휨강성, 비틀강성, x_2 및 x_3 축방향의 전단강성을 의미한다. f_{s2}, f_{s3} 는 F_2, F_3 로 인한 전단계수이다.

r^2 은 $(I_2 + I_3)/A$ 을 나타내고 ()는 괄호의 값을 x_1 에 대하여 미분하는 것을 의미한다. 또한, $\langle F_e \rangle = \langle F_1^P, F_2^P, F_3^P, M_1^P, M_2^P, M_3^P, F_1^Q, F_2^Q, F_3^Q, M_1^Q, M_2^Q, M_3^Q \rangle$ 는 材端力벡터, $\langle U_e \rangle = \langle U^P, V^P, W^P, \omega_1^P, \omega_2^P, \omega_3^P, U^Q, V^Q, W^Q, \omega_1^Q, \omega_2^Q, \omega_3^Q \rangle$ 는 材端變位벡터를 나타낸다. (그림 1참조)

3. 보-기둥의 接續剛度매트릭스

3장에서는 기하적인 비선형해석을 수행하는데 필

요한 접선강도매트릭스를 유도한다. 유한분절법의 경우에는 문헌⁽¹⁰⁾에서 제시된 안정함수를 이용하여 식(1) - (4)에 주어진 축방향력을 고려한 평형방정식 및 힘-변위 관계식을 직접 적분하고 경계조건을 적용함으로써 접선강도매트릭스를 엄밀하게 유도한다. 그리고 유한요소법의 경우에는 문헌⁽¹⁰⁾에서 얻은 전단변형효과를 고려하는 Hermitian 다항식을 사용하여 공간빠대요소의 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 유도한다.

3.1 有限分節法에서 使用되는 接續剛度매트릭스의 誘導

초기의 축방향력 0F_1 은 부재내에서 일정하다고 가정하므로 식(1)-(3)은 모두 상수계수를 갖는 선형 미분방정식이다. 그리고 식(4)는 Bowing 함수를 유도하는데 사용된다.

1) x_1-x_2 면내의 휨거동

x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 미분방정식(1)을 엄밀히 적분하고 경계조건을 적용하는 과정은 문헌⁽¹⁰⁾을 참조할 수 있다. 그 결과, x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 절점변위-재단력 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} F_2^P \\ M_3^P \\ F_2^Q \\ M_3^Q \end{bmatrix} = EI_3/L^3 \cdot \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6L\phi_2 & -12\phi_1 & 6L\phi_2 \\ & 4L^2\phi_3 & -6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 \\ & & 12\phi_1 & -6L\phi_2 \\ \text{symm.} & & & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^P \\ \omega_3^P \\ V^Q \\ \omega_3^Q \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서, $\phi_i, i=1,2,3,4$ 는 x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 안정함수를 나타내며 축방향력의 부호 및 크기의 전범위에 걸쳐 사용되는 함수식은 문헌⁽¹⁰⁾에 제시되었다. 이때 식(5)의 안정함수는 문헌⁽¹⁰⁾의 안정함수에서 EI, f_s 대신에 EI_3, fs_2 를 대응시켜 얻는다.

2) x_1-x_3 면내의 휨거동

식(1)과 (2)의 미분방정식을 비교하면, 식(1)의 변수들 $F_2, M_3, U_y, \omega_3, EI_3, fs_2$ 대신에 각각 $F_3, -M_2, U_z, -\omega_2, EI_2, fs_3$ 를 대입하면 식(1)이 식(2)과 동일한 관계식이 됨을 알 수 있다. 따라서 x_1-x_3 면내의 휨거동에 대한 절점변위-재단력 관계식은 x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 절점변위-재단력 관계식(5)로 부터 위의 대응관계를 고려하여 다음과 같이

얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_3^P \\ M_2^P \\ F_3^Q \\ M_2^Q \end{bmatrix} = EI_2/L^3 \cdot \begin{bmatrix} 12\phi_1 - 6L\phi_2 - 12\phi_1 - 6L\phi_2 & & & \\ & 4L^2\phi_3 & 6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 \\ & & 12\phi_1 & 6L\phi_2 \\ & & & \text{symm.} & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^P \\ \omega_2^P \\ W^Q \\ \omega_2^Q \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, ϕ_i 는 x_1-x_3 면내의 휨거동에 대한 안정 함수를 나타내며 이 때 식(6)의 안정함수는 문헌⁽¹⁰⁾의 안정함수에서 EI, f_s 대신에 EI_2, fs_3 를 대응시켜 얻는다.

3) 비틀거동

비틀거동에 대한 재단력-절점변위 관계식은 식(3)으로부터 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{bmatrix} M_1^P \\ M_1^Q \end{bmatrix} = (GJ + {}^0F_1 \cdot r^2)/L \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^P \\ \omega_1^Q \end{bmatrix} \quad (7)$$

4) 축방향거동

식(4)에서 비선형항을 무시하면, 축방향거동에 대한 재단력-절점변위 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} F_1^P \\ F_1^Q \end{bmatrix} = EA/L \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^P \\ U^Q \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(5) - 식(8)에서 절점변위의 계수들은 공간뼈대 요소의 부재접선강도매트릭스의 성분들을 구성한다. 이러한 성분들은 부록표 1에 12×12 접선강도매트릭스로 나타내었다.

3.2 有限要素法에서 사용되는 接線剛度매트릭스의 誘導

유한요소법을 적용하여 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 산정하는 경우에 공간뼈대요소의 총포텐셜에너지(Total Potential Energy)는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_e = & 1/2 \cdot \int_0^L EA \cdot U_x'^2 + GJ \cdot \omega_1'^2 + EI_3 \cdot \omega_3'^2 + \\ & EI_2 \cdot \omega_2'^2 + (U_y' - \omega_3)^2 \cdot GA/f_{s2} + \\ & (U_z' + \omega_2)^2 \cdot GA/f_{s3} + {}^0F_1 \cdot (U_y'^2 + U_z'^2 + \\ & r^2 \cdot \omega_1'^2) dx_1 - \langle F_e \rangle^T \cdot \langle U_e \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

축방향 변위와 비틀변위는 선형변화로 가정하고 x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 형상함수는 문헌⁽¹⁰⁾의 결과를 이용한다. 또한 x_1-x_3 면내의 휨거동에 대한

형상함수는 x_1-x_2 면내의 휨거동에 대한 형상함수식에 $U_y, \omega_3, EI_3, f_{s2}$ 대신에 각각 $U_z, -\omega_2, EI_2, f_{s3}$ 를 대입한 결과식을 사용한다. 위의 사항들을 고려하면 전단변형을 고려한 이동변위(U_x, U_y, U_z)와 회전변위($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)에 대한 형상함수들은 다음과 같이 표시된다.

$$U_x = n_1 \cdot U^P + n_2 \cdot U^Q \quad (10a)$$

$$U_y = h_{21} \cdot V^P + h_{22} \cdot L \cdot \omega_3^P + h_{23} \cdot V^Q + h_{24} \cdot L \cdot \omega_3^Q \quad (10b)$$

$$L \cdot \omega_3 = k_{31} \cdot V^P + k_{32} \cdot L \cdot \omega_3^P + k_{33} \cdot V^Q + k_{34} \cdot L \cdot \omega_3^Q$$

$$U_z = h_{31} \cdot W^P - h_{32} \cdot L \cdot \omega_2^P + h_{33} \cdot W^Q - h_{34} \cdot L \cdot \omega_2^Q \quad (10c)$$

$$L \cdot \omega_2 = -k_{21} \cdot W^P + k_{22} \cdot L \cdot \omega_2^P - k_{23} \cdot W^Q + k_{24} \cdot L \cdot \omega_2^Q$$

$$\omega_1 = n_1 \cdot \omega_1^P + n_2 \cdot \omega_1^Q \quad (10d)$$

여기서,

$$n_1 = 1 - \beta, \quad n_2 = \beta, \quad \beta = x/L$$

$$h_{11} = [2 \cdot \beta^3 - 3 \cdot \beta^2 - 12S_1 \cdot \beta + 1 + 12S_1]/(1 + 12S_1)$$

$$h_{12} = [\beta^3 - 2(1 + 3S_1) \cdot \beta^2 + (1 + 6S_1) \cdot \beta]/(1 + 12S_1)$$

$$h_{13} = [-2 \cdot \beta^3 + 3 \cdot \beta^2 + 12S_1 \cdot \beta]/(1 + 12S_1)$$

$$h_{14} = [\beta^3 - (1 - 6S_1) \cdot \beta^2 - 6S_1 \cdot \beta]/(1 + 12S_1), \quad i=2,3$$

$$k_{11} = [6 \cdot \beta^2 - 6 \cdot \beta]/(1 + 12S_1)$$

$$k_{12} = [3 \cdot \beta^2 - 4(1 + 3S_1) \cdot \beta + 1 + 12S_1]/(1 + 12S_1)$$

$$k_{13} = [-6 \cdot \beta^2 + 6 \cdot \beta]/(1 + 12S_1)$$

$$k_{14} = [3 \cdot \beta^2 - 2(1 - 6S_1) \cdot \beta]/(1 + 12S_1)$$

$$S_2 = f_{s2} \cdot EI_3/(GA \cdot L^2), \quad S_3 = f_{s3} \cdot EI_2/(GA \cdot L^2)$$

식(10)을 식(9)에 대입하여 적분을 행하면 공간뼈대 요소에 대한 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 식(11)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_e = & 1/2 \cdot \langle U_e \rangle^T \cdot ([K_e] + [K_g]) \cdot \langle U_e \rangle - \\ & \langle F_e \rangle^T \cdot \langle U_e \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $[K_e], [K_g]$ 는 각각 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 나타내며 결과식은 부록표 2, 3에 수록하였다.

4. Bowing 함수의 誘導

식(4)의 첫번째식은 부재내에서 축력이 일정하다는 것을 나타낸다. 이러한 사실은 고려하여 식(4)의 두번째식을 공간뼈대요소의 길이에 대하여 적분을 행하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_1 \cdot L/EA = U^Q - U^P + \delta \quad (12)$$

$$\text{여기서, } \delta = 1/2 \cdot \int_0^L (U_y'^2 + U_z'^2 + r^2 \cdot \omega_1'^2) dx_1$$

윗 식에서 휨 및 비틀음으로 인한 축방향의 상대적인 변위성분을 δ 로 나타내었으며 이를 Bowing 함수라고 부른다. 평면빔대의 경우에 상대적인 재단회전변위로 인한 Bowing 함수식은 문헌⁽¹⁰⁾에 제시되었다.

본 연구에서는 Updated Lagrangian formulation 을 적용하므로 반복계산시 절점좌표는 증분변위에 대응하여 새로이 계산되지만 가정 4)에 따라서 각 요소는 축방향력을 받는 직선형상으로 가정하므로, 각 반복계산의 불평형하중을 산정할 때 새로이 결정된 부재좌표계에서 순수변형증분($\Delta\theta_{13}$, $\Delta\theta_{23}$, $\Delta\theta_{12}$, $\Delta\theta_{22}$, $\Delta\omega$)으로 인한 축방향의 상대적인 변위증분 $\Delta\delta$ 를 계산하여야 한다.(그림 2와 5장 참조). 식(10)에서 재단이동변위증분은 0으로 놓고 재단회전변위증분에 순수변형증분을 대입하여 식(12)를 적분하면 축방향력이 0인 경우의 공간빔대요소의 Bowing 함수식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta\delta = \{(\Delta\theta_{12})^2 + (\Delta\theta_{22})^2\} \cdot Q_{12} - \Delta\theta_{12} \cdot \Delta\theta_{22} \cdot Q_{22} \quad (13)$$

$$+ \{(\Delta\theta_{13})^2 + (\Delta\theta_{23})^2\} \cdot Q_{13} - \Delta\theta_{13} \cdot \Delta\theta_{23} \cdot Q_{23} + r^2 \cdot (\Delta\omega)^2 / 2$$

$$\text{여기서, } Q_{1i} = \frac{L \cdot (6S_i^2 + S_i + 1/15)}{(1 + 15S_i)^2},$$

$$Q_{2i} = \frac{L \cdot (12S_i^2 + 2S_i + 1/30)}{(1 + 12S_i)^2} \quad i=2,3$$

5. 不平衡荷重의 算定

일반적으로 기하적인 비선형해석에서 증분평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_T \cdot \Delta U = \Delta R \quad (14)$$

여기서, K_T 는 구조물 접선강도매트릭스, ΔU 는 증분변위벡터, 그리고 ΔR 는 증분하중 또는 불평형하중벡터를 의미한다. 기하적인 비선형해석에서 불평형하중을 정확히 산정하는 것이 중요하다. Updated Lagrangian formulation에 따른 불평형하중 산정방법은 다음과 같다.

1) 증분방정식(14)를 풀어서 증분변위벡터를 구하고 부재좌표계로 좌표변환시킨다.

$$\Delta \bar{U}_e = {}^tR^T \cdot \Delta U_e \quad (15a)$$

$${}^tR = \begin{bmatrix} {}^tT & | & \\ \hline & & {}^tT \\ & & | & \\ & & & {}^tT \end{bmatrix} \quad (15b)$$

여기서, $\Delta \bar{U}_e$, tR 그리고 tT 는 각각 부재좌표계에서 증분변위벡터, 시간 t에서 좌표변환 매트릭스, 그리고 부재방향매트릭스를 나타낸다. 그리고 식(15a)에서 오른쪽 윗첨자 T는 전치행렬을 의미한다.

2) 그림 3을 참조하여 강제회전변위증분($\Delta\gamma_1$, $\Delta\gamma_2$, $\Delta\gamma_3$)를 구한다.

$$\Delta\gamma_1 = (\Delta\omega_1^Q + \Delta\omega_1^P) / 2, \quad \Delta\gamma_2 = (\Delta W^P - \Delta W^Q) / L,$$

$$\Delta\gamma_3 = (\Delta V^Q - \Delta V^P) / L \quad (16)$$

3) 그림 3을 참조하여 순수변형증분($\Delta\theta_{13}$, $\Delta\theta_{23}$, $\Delta\theta_{12}$, $\Delta\theta_{22}$, $\Delta\omega$, ΔU)을 산정한다.

$$\Delta\theta_{13} = \Delta\omega_3^P - \tan^{-1}(\Delta\gamma_3), \quad \Delta\theta_{23} = \Delta\omega_3^Q - \tan^{-1}(\Delta\gamma_3)$$

$$\Delta\theta_{12} = \Delta\omega_2^P - \tan^{-1}(\Delta\gamma_2), \quad \Delta\theta_{22} = \Delta\omega_2^Q - \tan^{-1}(\Delta\gamma_2)$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1^Q - \Delta\omega_1^P, \quad \Delta U = \Delta U^Q - \Delta U^P + \Delta\delta \quad (17)$$

여기서, $\Delta\theta_{13}$, $\Delta\theta_{23}$, $\Delta\theta_{12}$, $\Delta\theta_{22}$ 는 그림 3에서 보는 바와 같이 재단회전각증분이며 $\Delta\omega$ 는 부재양단의 상대적인 비틀각증분을 나타낸다. 그리고 ΔU 는 상대적인 축방향변위증분을 나타낸다.

4) Rodrigues의 회전매트릭스⁽⁹⁾를 이용하여, 단계 2)에서 계산된 강제회전변위증분으로부터 새로운

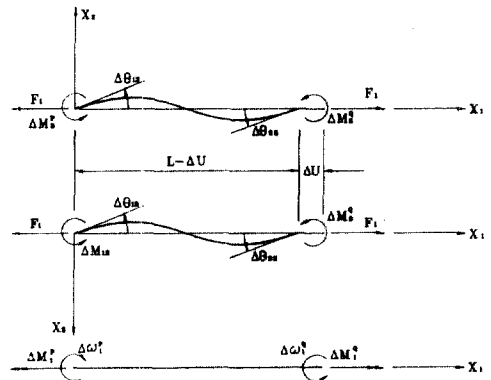


그림 2. Relative deformations and associated forces

부재방향매트릭스 및 좌표변환매트릭스를 계산한다.

$${}^{11}\Delta^t T = {}^t T \cdot \Delta T \quad (18a)$$

$$\Delta T = I_3 + \frac{\sin(r)}{r} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(r)/2}{r/2} \right)^2 \cdot S^2 \quad (18b)$$

여기서, $r^2 = (\Delta\gamma_3)^2 + (\Delta\gamma_2)^2 + (\Delta\gamma_1)^2$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\gamma_3 & \Delta\gamma_2 \\ \Delta\gamma_3 & 0 & -\Delta\gamma_1 \\ -\Delta\gamma_2 & \Delta\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

5) 유한분절법의 경우에는 식(19)를 적용하여 재단력중분벡터를 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta M_3^P &= (4\phi_3 \cdot \Delta\theta_{13} + 2\phi_4 \cdot \Delta\theta_{23}) \cdot EI_3/L \\ \Delta M_3^Q &= (2\phi_4 \cdot \Delta\theta_{13} + 4\phi_3 \cdot \Delta\theta_{23}) \cdot EI_3/L \\ \Delta M_2^P &= (4\phi_3 \cdot \Delta\theta_{12} + 2\phi_4 \cdot \Delta\theta_{22}) \cdot EI_2/L \\ \Delta M_2^Q &= (2\phi_4 \cdot \Delta\theta_{12} + 4\phi_3 \cdot \Delta\theta_{22}) \cdot EI_2/L \\ \Delta M_1^P &= -\Delta\omega \cdot (GJ + {}^o F_1 \cdot r^2)/L = -\Delta M_1^Q \\ \Delta P &= \Delta U \cdot EA/L \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $\phi_i, \phi_{ij}, i=1,2,3,4$ 는 부록표 1의 안정함수를 나타낸다.

7) 유한요소법의 경우에 축방향력중분 및 비틀모멘트중분을 산정하는 방법은 유한분절법의 경우와 동일하고 재단휨모멘트중분은 다음식으로 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta M_3^P &= (e_3 + {}^o F_1 \cdot m_3) \cdot \Delta\theta_{13} + (e_4 + {}^o F_1 \cdot m_4) \cdot \Delta\theta_{23} \\ \Delta M_3^Q &= (e_4 + {}^o F_1 \cdot m_4) \cdot \Delta\theta_{13} + (e_3 + {}^o F_1 \cdot m_3) \cdot \Delta\theta_{23} \\ \Delta M_2^P &= (g_3 + {}^o F_1 \cdot n_3) \cdot \Delta\theta_{12} + (g_4 + {}^o F_1 \cdot n_4) \cdot \Delta\theta_{22} \\ \Delta M_2^Q &= (g_4 + {}^o F_1 \cdot n_4) \cdot \Delta\theta_{12} + (g_3 + {}^o F_1 \cdot n_3) \cdot \Delta\theta_{22} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $e_i, g_i, m_i, n_i, i=1,2,3,4$ 는 부록표 2, 3에 표시되어 있다.

8) 단계 6)과 7)의 재단력중분벡터는 부재좌표계에서 산정한 것이므로 단계 4)에서 얻은 좌표변환매트릭스를 사용하여 전체좌표계로 변환시킨다. 그리고 이전에 계산된 절점력에 재단력중분을 더하여 절점력벡터 및 불평형하중을 결정한다.

9) 불평형하중성분의 절대값들 중에서 가장 큰 값이 허용값(Tol)보다 작으면 수렴한 것으로 판정한다. 반복계산의 최대허용횟수 이내에 수렴조건을 만족시키면 계산된 결과들을 출력하고 다음 단계로 들어간다. 만일 수렴조건을 만족시키지 못하면 하

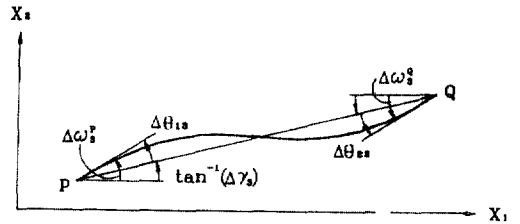


그림 3. Relative deformation of beam projection on x_1-x_2 and x_1-x_3 plane

중중분구간인 경우에는 하중파라미터중분률, 변위중분구간인 경우에는 특정한 변위성분중분의 크기를 반으로 나누고 이전 수렴상태에서 저장하였던 값들을 가지고 반복계산한다.

6. 數値解析例

本 研究에서 제시한 이론을 적용하기 위하여 유한요소해석 프로그램(GEORFRAME)을 개발하였다. 개발된 프로그램은 2절점 직선요소를 사용하며 길이방향 가우스積分은 필요치 않다. 그리고 공간뺀대구조의 대변형해석을 수행하기 위하여 Updated Lagrangian 방법에 의한 유한분절법과 유한요소법을 적용하였다. 또한 공간뺀대구조의 후좌굴거동을 추적하기 위하여 하중중분법과 변위중분법을 결합시킨 해석방법⁽¹¹⁾을 사용하였다.

6.1 自由端에 橫荷重 또는 모멘트를 받는 외팔보

그림 4에서 보는 바와 같이 자유단에 횡하중 또는 모멘트가 작용하는 외팔보를 생각한다. 총횡하중 $P = 10.0 \text{ n}$ 또는 총모멘트 $M = 2.0 \text{ m}$ 이 하중중분법을 사용하여 10하중단계에 걸쳐서 재하되었다. 표 1은

횡하중이 작용하는 경우에 하중파라미터와 보의 길이로 나눈 자유단의 수직처짐관계를 엄밀해⁽¹²⁾와 보를 4요소와 8요소로 모델링하여 본 연구에서 제시한 유한분절법과 유한요소법을 사용하여 해석한 결과를 함께 나타낸 것이다. 그리고 표 2는 모멘트가 작용하는 경우에 엄밀해, Surana⁽¹³⁾의 해석결과, 그리고 본 연구의 결과를 함께 나타낸 것이다. 표에서 보는 바와 같이 유한분절법과 유한요소법의 두 해석방법은 거의 동일한 해석결과를 보였다. 또한 4요소 보다 8요소를 사용한 경우에 엄밀해에 더 근접하는 해석결과를 나타내었다.

$$\text{Analytic sol. : } V/L = [1 - \cos(M^*)]/M^* \quad (21)$$

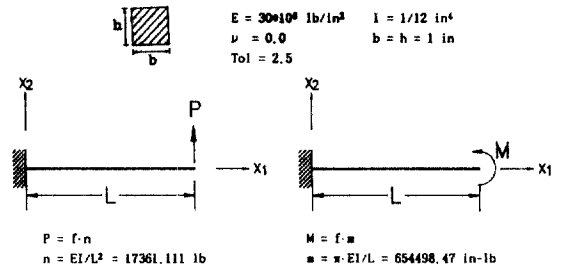
$$M^* = ML/(EI)$$

6.2 一端 固定, 他端 힌지인 아치 (Clamped-hinged arch)

그림 5는 1단 고정이고 타단 힌지인, 중앙점에 집중하중을 받는 아치의 형상과 재원을 함께 나타낸 것이다. 이 예제는 변형이 비대칭으로 발생하므로 구조물 전체를 20개의 요소로 분할하여 기하적인 비선형 해석을 수행하였다. 그림 6a는 두께가 1 in인 경우에 본 연구에 의하여 해석된 하중-중앙점 수직 처짐관계를 나타낸 것이다. 첫번째 극한하중값이 Wood와 Zienkiewicz⁽¹⁴⁾는 $9.24EI/R^2$, 본 연구에서는 $9.03EI/R^2$ 으로 거의 일치하였다. 또한 그림 6a는 대표적인 Snap-through와 Turning-back 거동을 보여주는 평형경로를 나타내며, 이를 추적하기 위하여 변위 및 하중증분 알고리즘을 사용하였다. 그림 6b는 전단변형효과를 고려하기 위하여 다른 조건은 그림 6a의 경우와 동일하고 두께만을 10, 15, 20in로 변화시켰을 때 해석한 결과를 나타낸 것이다. 이 때 실선과 점선은 각각 전단효과를 무시한 경우와 고려한 경우에 해석된 결과를 표시한 것이다. 그리고 표 3은 아치의 두께변화에 따른 극한하중값을 제시한 것이다. 그림 6b와 표 3에서 보는 바와 같이 아치의 두께가 증가함에 따라 전단변형효과가 커지는 것을 볼 수 있다.

6.3 自由端에 橫荷重을 받는 圓形의팔보(45 circular bend)

그림 7과 같이 자유단에 횡하중이 작용하는 45도



(a) Cantilever beam under end force
(b) Cantilever beam under end moment

그림 4. Cantilever beam: geometry and material data

표 1. Load-deflection behavior of the cantilever beam under a end force

Load factor	Analytic Sol. [12]	F. S. M.		F. E. M.	
		4 element	8 element	4 element	8 element
1.0	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302
2.0	0.493	0.496	0.494	0.496	0.494
3.0	0.603	0.607	0.605	0.607	0.605
4.0	0.670	0.675	0.672	0.675	0.672
5.0	0.714	0.720	0.717	0.720	0.717
6.0	0.745	0.752	0.748	0.752	0.748
7.0	0.767	0.776	0.772	0.776	0.772
8.0	0.785	0.794	0.790	0.794	0.790
9.0	0.799	0.809	0.804	0.809	0.804
10.0	0.811	0.821	0.816	0.821	0.816

원형곡선보를 생각한다. 총하중 $P = 1.5p$ 이 하중증분법을 사용하여 15 하중단계에 걸쳐서 재하되었다. 표 4는 하중파라미터와 자유단의 처짐관계를 Surana⁽¹²⁾의 해석결과와 원형을 4요소와 8요소로 모델링하여 본 연구에 의한 해석결과를 함께 나타낸 것이다. 표에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 결과와 Surana의 결과가 비교적 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

표 2. Load-deflection behavior of the cantilever beam under a end force

Load factor f	Analytic Sol.	Surana [13]	F. S. M.		F. E. M.	
			4 element	8 element	4 element	8 element
0.2	3.040	3.019	3.042	3.040	3.042	3.040
0.4	5.497	5.479	5.519	5.504	5.519	5.504
0.6	6.945	6.940	7.003	6.959	7.003	6.959
0.8	7.198	7.183	7.304	7.224	7.304	7.224
1.0	6.366	6.256	6.506	6.398	6.506	6.398
1.2	4.790	4.480	4.931	4.822	4.929	4.822
1.4	2.976	2.398	3.053	2.981	3.049	2.980
1.6	1.375	0.664	1.382	1.367	1.376	1.366
1.8	0.338	-0.103	0.327	0.354	0.325	0.354
2.0	0.0	—	0.078	0.096	0.089	0.101

6.4 12 部材로 이루어진 六角形 뼈대構造物 (12 member frame)

여섯지점이 모두 이동단 또는 회전단인 두가지 경계조건을 가지는, 중앙점에 집중하중을 받는 12 부재 육각형 뼈대구조물을 해석한다.(그림 8, 9 참조) 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$E = 439.8 \text{ Ksi} \quad J = 0.0331 \text{ in}^4 \quad G = 159.0 \text{ Ksi}$$

$$I_2 = I_3 = 0.0203 \text{ in}^4 \quad A = 0.494 \text{ in}^2$$

부재당 4개의 요소로 분할하여 총 48개의 유한 요소로 모델링하였고, Snap-through 거동을 추적하기 위하여 변위증분법을 적용하였다. 그림 8은 여섯지점이 이동단인 육각형 뼈대구조물의 하중과 중앙수직처짐관계를 본 연구의 결과와 Papadrakakis⁽⁸⁾의 결과를, 그림 9는 여섯지점이 회전단인 뼈대구조물의 하중과 수직처짐관계를 본 연구의 결과와 Nee와 Haldar⁽¹⁵⁾의 결과를 함께 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 결과와 문헌의 결과들이 서로 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

7. 結 論

軸方向力과 剪斷變形 效果를 고려하는 空間보-기

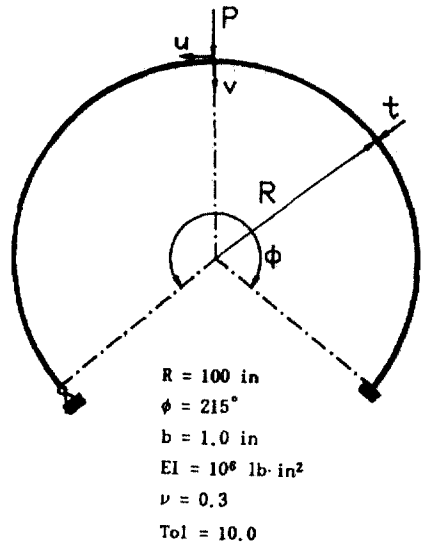
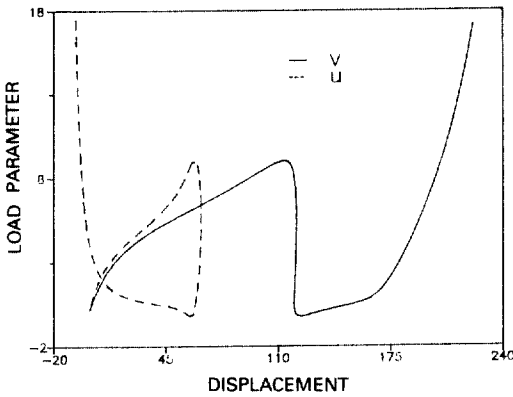


그림 5. Clamped-hinged arch: geometry and material data

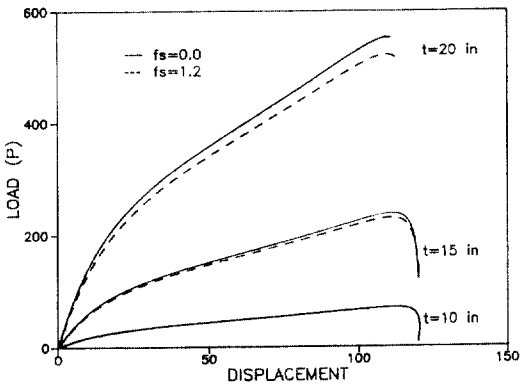
등의 平衡方程式, 힘-變位 關係式 그리고 境界條件을 제시하고 이 方程式을 積分하여 嚴密한 接線剛度 매트릭스를 유도하였고(有限分節法), 剪斷變形을 고려하는 Hermitian 多項式을 이용하여 彈性 및 幾

표 3. Limit loads according to variation of arch's thickness

	Limit load(PR ² /EI)	
	f _s =0.0	f _s =1.2
t= 1 in	9.03(9.24)	9.03
t= 10 in	70.238	70.238
t= 15 in	237.385	229.360
t= 20 in	552.038	521.490



(a) Central load-deflection plot in the case of t=1 in



(b) Central load-deflection plot in the case of t=10, 15, 20 in

그림 6. clamped-hinged arch

何的인 剛度매트릭스(有限要素法)를 算定하였다. 軸方向力이 零인 경우에 Bowing 함수를 유도하고 이를 이용하여 不平衡荷重 算定法을 제시하였다. 이러한

두가지의 보-기둥 要素들을 空間 뼈대 構造의 幾何的인 非線形解析에 적용하여 다음과 같은 結論에 도달하였다.

1) Isoparametric 曲線要素는 剪斷係數값이 零에 접근함에 따라 Shear locking 現狀을 나타내지만 本論文에서 제시한 2절점 直線要素들에서는 그러한 문제들이 전혀 발생하지 않으며 剪斷變形을 무시하는 경우에는 剪斷係數값을 단순히 零으로 놓으면 된다.

2) 空間 뼈대 構造의 幾何的인 非線形解析에서 有限分節法과 有限要素法은 거의 동일한 해석결과를 나타내었다.

3) 하중중분법 또는 변위중분법을 적용하여 剪斷變形效果를 고려한 空間 뼈대 構造의 大變形 舉動을 解析할 수 있다.

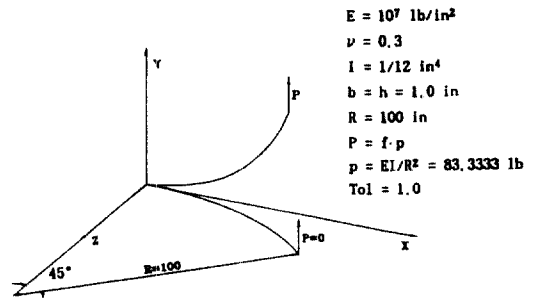


그림 7. a 45° circular bend: geometry and material data

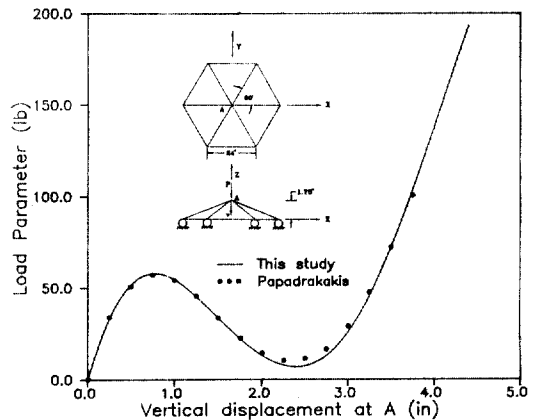


그림 8. Geometry and load-defl. curve of 12 member frame with roller support

표 4. Load-deflection behavior of the curved cantilever under a end force

Load	Surana's results ⁽¹⁾			This study					
	U	V	W	4 elements			8 elements		
				U	V	W	U	V	W
0.1	-1.5132	0.9088	15.012	-1.5525	0.9019	15.201	-1.5679	0.9309	15.262
0.2	-5.1380	3.0690	27.217	-5.2646	3.0450	27.539	-5.3042	3.1351	27.610
0.3	-9.3998	5.5793	36.106	-9.6067	5.5280	36.488	-9.6579	5.6758	36.532
0.4	-13.478	7.9491	42.428	-13.739	7.8619	42.826	-13.789	8.0539	42.833
0.5	-17.110	10.028	46.996	-17.291	9.8832	47.301	-17.330	10.116	47.276
0.6	-20.268	11.808	50.394	-20.453	11.628	50.701	-20.483	11.886	50.645
0.7	-23.004	13.325	52.996	-23.189	13.116	53.309	-23.209	13.393	53.227
0.8	-25.382	14.621	55.046	-25.565	14.400	55.370	-25.577	14.683	55.264
0.9	-27.464	15.737	56.699	-27.636	15.500	57.033	-27.649	15.789	56.906
1.0	-29.299	16.703	58.062	-29.462	16.447	58.405	-29.467	16.754	58.259
1.1	-30.929	17.547	59.206	-31.085	17.261	59.560	-31.087	17.584	59.396
1.2	-32.387	18.288	60.181	-32.534	17.981	60.547	-32.537	18.312	60.364
1.3	-33.701	18.945	61.023	-33.833	18.622	61.403	-33.841	18.952	61.201
1.4	-34.891	19.530	61.760	-35.011	19.189	62.155	-35.021	19.519	61.933
1.5	-35.976	20.054	62.411	-37.535	19.694	62.821	-36.097	20.022	62.580

4) 하중 및 변위중분 알고리즘을 적용하여 剪斷變形效果를 고려한 空間 뼈대構造의 다양한 後挫屈舉動을 追跡할 수 있다.

参 考 文 献

1. Wen, R.K. and Rahimzadeh, J., "Non-linear elastic frame analysis by finite element", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 109, No. 8, August, 1983, pp. 1952-1971.
2. Bathe, K.J. and Bolourchi, S., "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 961-986.
3. Saafan, S.A., "Non-linear behavior of structural plane frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 89, No.

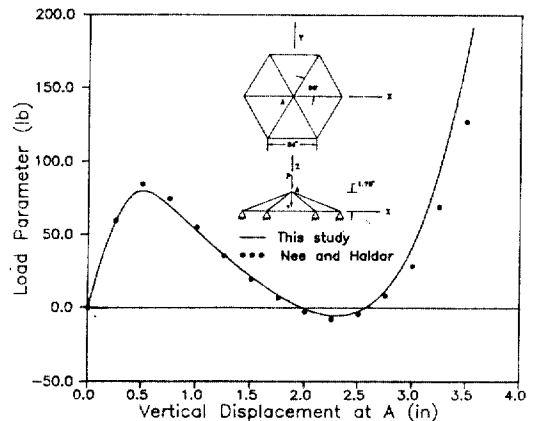


그림 9. Geometry and load-defl. curve of 12 member frame with hinged support

ST4, August, 1963, pp. 557-579.

4. Oran, C., "Tangent stiffness in plane frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 973-985.
5. Oran, C., "Tangent stiffness in space frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 987-1001.
6. Connor, J.J., "Analysis of structural member systems", the Ronald Press Company, New York, 1976, pp. 585-603.
7. Meek, J.L. and Tan, H.S., "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 47, 1984, pp. 261-282.
8. Papadrakakis, M., "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods", *Comput. & Structures*, Vol. 14, No. 14, 1981, pp. 393-402.
9. Crisfield, M.A., "A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 81, 1990, pp. 131-150.
10. 金文榮, 張丞弼, "剪斷變形을 考慮한 平面띠대 構造物의 幾何的 非線形解析", *大韓土木學會論文集*, 제10권, 제1호, 1990. 3., pp. 27-36.
11. 金文榮, 張丞弼, "保存力 및 非保存力을 받는 構造物의 幾何的 非線形 有限要素解析을 위한 變位 및 荷重増分 알고리즘의 開發", *大韓土木學會論文集*, 제10권, 제2호, 1990. 6., pp. 11-22.
12. Gere, J.M. and Timoshenko, S.P., "Mechanics of materials", a division of Wadsworth, Inc., California, 1984, pp. 414-418.
13. Surana, K.S. and Sorem, R.M., "Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 1989, pp. 43-73.
14. Wood, R.D. and Zienkiewicz, O.C., "Geometrically non-linear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", *Computers & Structures*, Vol. 7, 1977, pp. 725-735.
15. Nee, K.M. and Haldar, A., "Elastoplastic nonlinear post-buckling analysis of partially restrained space structures", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, 1988, pp. 69-97.

(接受 : 1993. 4. 30)

附 錄

부록표 1 유한분절법에서 사용되는 접선강도매트릭스 $[K_t]$

$$\begin{aligned}
 a &= EA/L \\
 b_1 &= 12EI_3 \cdot \phi_1/L^3 \\
 b_2 &= 6EI_3 \cdot \phi_2/L^2 \\
 b_3 &= 4EI_3 \cdot \phi_3/L \\
 b_4 &= 2EI_3 \cdot \phi_4/L \\
 c_1 &= 12EI_3 \cdot \phi_1/L^3 \\
 c_2 &= 6EI_3 \cdot \phi_2/L^2 \\
 c_3 &= 4EI_3 \cdot \phi_3/L \\
 c_4 &= 2EI_3 \cdot \phi_4/L \\
 d &= (GJ + P \cdot r^2)/L
 \end{aligned}$$

부록표 2 탄성강도 매트릭스 $[K_e]$

$$\begin{aligned}
 a &= EA/L, \quad d_1 = GJ/L \\
 e_1 &= 12EI_3/(T_2 \cdot L^3) \\
 e_2 &= 6EI_3/(T_2 \cdot L^2) \\
 e_3 &= 4(1 + 3S_2)EI_3/(T_2 \cdot L) \\
 e_4 &= 2(1 - 6S_2)EI_3/(T_2 \cdot L) \\
 g_1 &= 12EI_3/(T_2 \cdot L^3) \\
 g_2 &= 6EI_3/(T_2 \cdot L^2) \\
 g_3 &= 4(1 + 3S_2)EI_3/(T_2 \cdot L) \\
 g_4 &= 2(1 - 6S_2)EI_3/(T_2 \cdot L) \\
 S_i &= f_{si} \cdot EI_i / (GA \cdot L^2)
 \end{aligned}$$

$i = 2, 3$

$$T_1 = 1 + 12S_1$$

부록표 3 기하적인 강도매트릭스 $[K_g]$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1/L, \quad d_2 = r^2/L \\
 m_1 &= 12(12S_2^2 + 2S_2 + 0.1)/(T_2^2 \cdot L) \\
 m_2 &= 0.1/T_2^2 \\
 m_3 &= 4L(3S_2^2 + 0.5 \cdot S_2 + 1/30)/T_2^2 \\
 m_4 &= 2L(6S_2^2 + S_2 + 1/60)/T_2^2 \\
 n_1 &= 12(12S_3^2 + 2S_3 + 0.1)/(T_2^2 \cdot L) \\
 n_2 &= 0.1/T_2^2 \quad \circ F_1 \cdot \\
 n_3 &= 4L(3S_3^2 + 0.5 \cdot S_3 + 1/30)/T_2^2 \\
 n_4 &= 2L(6S_3^2 + S_3 + 1/60)/T_2^2 \\
 S_i &= f_{si} \cdot EI_i / (GA \cdot L^2)
 \end{aligned}$$

$i = 2, 3$

$$T_1 = 1 + 12S_1$$