

여러 단면형상을 갖는 뼈대구조물의 최적설계

Optimal Design of Frame Structures with Different Cross-Sectional Shapes

한상훈* · 이웅종**

Han, Sang Hoon · Lee, Woong Jong

Abstract

An efficient method to solve the minimum weight design problem for frame structures subjected to stress and displacement constraints is presented. The different cross-sectional shapes are considered in order to apply engineering design in which usually required custom fabrication. To increase the efficiency of the optimization process, the structural response quantities(nodal forces, displacements) are linearized with respect to cross-sectional properties or their reciprocal, based on first order Taylor series expansion, while cross-sectional dimensions are considered as design variables. Numerical examples are performed and compared with other methods to demonstrate the efficiency and reliability of approximation method for frame structural optimization with different cross-sectional shapes. It is shown that the number of finite element analysis is greatly reduced and it leads to a highly efficient method of optimization of frame structures.

요 지

응력 및 변위제약 하에 뼈대구조물의 최소중량설계를 얻기 위한 효율적인 방법을 제안한다. 주문 제작이 빈번히 이루어지는 공학설계의 응용을 위해 다음의 5가지 단면형상을 고려하였다.(rectangular형, frame형, tube형, channel형 그리고 I형). 최적화 과정의 효율성을 증진시키기 위해 구조응답량(절점력, 변위)을 단면성질에 대해 1차 Taylor급수 전개했고 반면에 단면치수를 설계변수로 고려하였다. 제안된 방법의 효율성과 신뢰성을 보이기 위해 수치예를 통해 다른 방법에 의한 결과와 비교하였다. 그 결과 구조해석의 수를 크게 감소시킬 수 있었으며 뼈대구조물의 최적화에 매우 효율적으로 적용될 수 있음을 알게 되었다.

1. 서 론

지금까지 구조물 최적화분야에서, 유한요소법에 기초한 구조해석과 수학적계획기법의 결합에 의한 구

조물합성(Structural Synthesis)문제는 구조물 최적 설계에 효율적인 방법으로 폭 넓게 적용되어 왔다. 그러나 대형구조물 최적설계시에는 문제내에 포함 되어 있는 설계변수 및 제약조건식의 수가 증가하고, 최적설계 수행중에 요구되는 구조해석의 수가 증가 하기 때문에 효율성이 떨어지며 많은 계산비용이

* 충북대학교 공과대학 토목공학과 부교수
** 충북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정

요구된다. 특히 가장 많은 계산 비용이 요구되는 부분은 최적화 과정에서 구조해석의 실행이며, 이것은 근사화개념을 적용하므로 감소시킬 수 있다고 알려져 있다.⁽¹⁾

Salajegheh와 Vanderplaats⁽²⁾는 구조해석의 수를 줄이기 위한 새로운 근사화방법을 제안하였다. 이들은 절점력에 대한 민감도를 단면성질의 함수로 생성하여 근사화된 최적화문제를 형성하였고, 이것으로부터 양질의 근사화를 얻을 수 있음을 증명하였다. Ding과 Esping⁽³⁾은 여러 단면형상을 갖는 뼈대 구조물의 최소중량 설계문제를 다루었으며, 구조부재에 대해서 주문제작(custom fabrication)이 빈번히 요구되는 대부분의 자동화설계 응용분야에서는 비표준단면(nonstandardized element cross-section)의 사용을 고려해야하는 경우가 속출하기 때문에 설계변수를 단면치수로 사용하였다. 그리고 단면치수에 대한 응력 및 변위의 민감도를 이용하여 근사화된 최적화문제를 형성하여 최적해를 구하였다.

따라서 본 연구에서는 주문제작이 빈번히 이루어지는 공학설계에의 응용을 위해 단면치수를 설계변수로 고려하였다. 또한 가능한 구조해석의 수를 줄이기 위해 절점력에 대한 민감도를 단면성질의 함수로 생성하여 근사화된 최적화문제를 형성하였고 최적설계를 수행하기 위해, 최적설계를 1) 상세한 구조물 해석, 2) 민감도 해석, 3) 최적설계의 세가지 단계로 구성하였다. 구조해석을 통해 필요로 하는 구조응답량(절점력, 변위)들을 구하고, 민감도 해석 단계에서 단면치수가 아닌 단면성질들을 민감도변수로 선택하여 구조응답들에 대한 1차 도함수를 얻도록 하였다. 최적화문제의 형성단계에서 앞 단계에서 얻어진 정보를 사용하여 구조해석을 거치지 않고 최적해를 얻을 수 있도록 수식화하였다. 이러한 방법을 수치예를 통해 타 논문과 비교, 분석함으로써 효율성을 입증하고, 각 뼈대구조물에 대해 최소중량설계가 될 수 있는 단면형상을 제안하였다.

2. 설계변수 선택 및 경사(gradient)계산

2.1 설계변수 및 민감도변수의 선택

뼈대구조물의 최적설계 문제를 다룰 때 응력계산, 민감도해석 그리고 최적설계의 수행에 있어서는 매

개변수의 선택이 주요 관심사가 된다. 여기에는 두 가지 접근방법이 있으며 하나는 단면성질을 설계변수로 그리고 다른 하나는 단면치수를 설계변수로 취하는 경우이다. 정적구조물의 최적화시, 단면성질들은 평형방정식에 명시적으로 나타나므로 민감도변수로 선택하는 것이 가장 편리하며 또한 구조응답량들을 단면성질(또는 이의 상반)에 대해 1차 Taylor 급수 전개를 하는 것은 양질의 근사화 생성에 큰 도움이 된다고 알려져 있다.⁽²⁾ 그러나 목적함수는 단면이차모멘트의 명시적 함수가 아니며, 응력계산 단계에서 응력 값들이 정확하게 계산되질 않는다. 이 경우 발생하는 어려운 문제들은 단면이차모멘트를 식(1)과 같이 단면적에 근사적으로 관계시키는 것에 의하여 어느 정도 극복 될 수가 있다.^(4,5)

$$I = cA^p \quad (1)$$

여기서 c 와 p 는 상수이며, I 는 단면이차모멘트, A 는 단면적이다. 이러한 유형의 가정은 단면치수들이 표준단면(standard cross-section)으로부터 선택되었을 때 특히 편리하다. 그러나, 구조요소들이 일반적으로 주문제작에 응용될 때 식(1)은 단면의 자유로운 설계를 제한하게 되며, 최종설계에 가서는 위배된 중량설계로 될 가능성이 많아지게 된다.

다른 방법으로서 단면치수를 설계변수로 고려하면, 이것은 단면의 성질 및 민감도 변수와도 관계된다. 설계변수를 단면치수(또는 이의 상반)의 항으로 취할 경우 트러스, membrane, 그리고 plate 구조물의 경우와는 달리, 뼈대요소인 경우에 단면치수는 거동제약함수의 근사화를 생성하는데 좋은 선택이 아니며, 단면치수의 항인 거동제약 근사화는 상대적으로 작은 범위에 대해서 정확하지만, 빈번한 구조해석을 요구하게 되어 비효율적인 수렴성을 보이게 된다.

따라서, 본 연구에서는 민감도 변수와 설계변수를 분리하여, 민감도 해석 단계에서는 단면의 기하학적 의미는 고려할 필요가 없으므로 단면의 성질만을 고려 하였고, 최적설계 과정 동안에는 설계변수는 단면의 치수들로 고려하여 최적해를 구하였다.

2.2 응력 계산

정적 선형탄성구조물인 경우에는 식(2)의 평형방

정식이 만족되어야 하며, 이 방정식으로부터 절점 변위를 얻게 된다.

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad (2)$$

여기서, $[K]$ 는 전체 강성도매트릭스이고, $\{U\}$ 는 절점변위 벡터이며, $\{P\}$ 는 외부 하중벡터이다. 일단 절점변위를 얻게 되면 요소 절점력은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\{F^e\} = [k^e] \{u^e\} \quad (3)$$

여기서 $\{F^e\}$ 는 요소절점력 벡터이고, $[k^e]$ 는 요소강성도 매트릭스이며 그리고 $\{u^e\}$ 는 요소절점변위 벡터이다.

본 연구에서는 그림 1과 같은 5가지의 단면형상을 고려하였다.

각각의 단면형상에 대해 단면치수변수는 2~4개로 취하였고, 응력은 단면의 형상특성에 따라 7~8개의 점에 대해 계산하였다. 각 점에서의 응력은 식 (4)와 같이 계산된다.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = [f] \{F^e\} \quad (4)$$

여기서 $\{\sigma\}$ 는 응력벡터이며, $[f]$ 는 단면치수 및 단면성질들로 구성되는 (3×6) 매트릭스이고, $\{F^e\}$ 는 요소 절점력 벡터이다. 만일 단면의 형상이 I형인 경우, $[f]$ 매트릭스는 다음과 같으며, 다른 단면형상에 대한 $[f]$ 매트릭스는 참고문헌 [3]에 제시되었다.

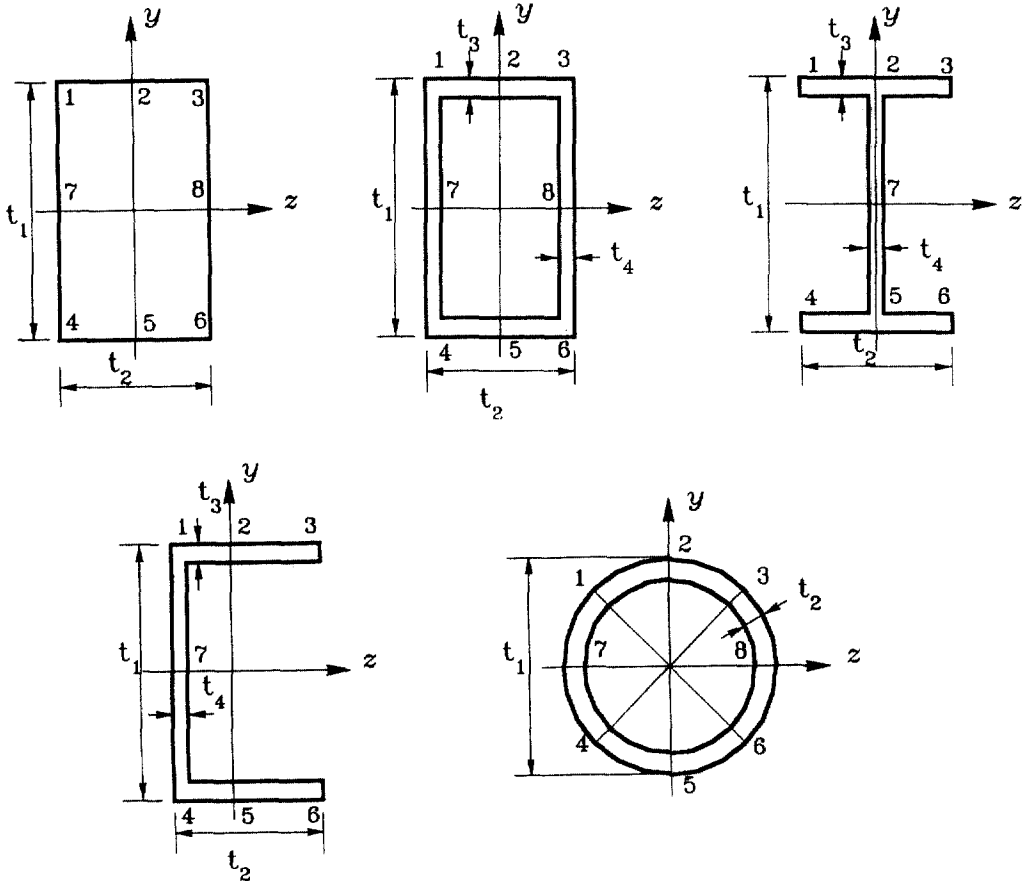


그림 1. 5가지 단면형상과 응력계산점

〈I형 단면인 경우〉

$$A = t_1 \times t_2 - (t_1 - 2t_3)(t_2 - t_4)$$

$$I_z = (t_2 \times t_1^3 - (t_2 - t_4)(t_1 - 2t_3)^3) / 12$$

$$I_y = (2t_3 \times t_2^3 + t_4^3 \times (t_1 - 2t_3)) / 12$$

$$J_p = (2 \times t_2 \times t_3^3 + (t_1 - 2t_3)t_4^3) / 3$$

$$S_z^2 = t_2 \times t_3 \times (t_1 - t_3) / 4$$

$$S_y^2 = t_1^3 \times t_2^2 / 8$$

$$S_z^7 = (t_2 \times t_1^2 - (t_2 - t_4)(t_1 - 2t_3)^2) / 8$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{-t_2}{2I_y} & \frac{-t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_2}{2J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_z^2}{t_3 I_z} & \frac{S_y^2}{2t_3 I_y} & \frac{t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_2}{2I_y} & \frac{-t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t_2}{2J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{-t_2}{2I_y} & \frac{t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_2}{2J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-S_z^5}{t_3 I_z} & \frac{S_y^7}{2t_3 I_y} & \frac{-t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_2}{2I_y} & \frac{t_1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t_2}{2J_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t_1}{2J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_z^7}{t_4 I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_y^7}{t_1 I_y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 경사 계산

단면성질 벡터를 Y라 할 때, 수학적으로 Z는 식(5)와 같이 정의할 수 있다.

$$Z = Y \text{ 또는 } Z = \frac{1}{Y} \quad (5)$$

식(2)를 Z_i에 대해서 미분 함으로써 절점변위 도함수는 식(6)과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial U}{\partial Z_i} = K^{-1} \left[\frac{\partial P}{\partial Z_i} - \frac{\partial K}{\partial Z_i} U \right] \quad (6)$$

일단 $\partial U / \partial Z_i$ 가 구해졌다면 식(7)과 같이 절점력에 대한 도함수를 구할 수 있게 된다.

$$\frac{\partial F^e}{\partial Z_i} = K^e \frac{\partial U^e}{\partial Z_i} + \frac{\partial K^e}{\partial Z_i} U^e \quad (7)$$

상기와 같은 방법으로 도함수를 구할 수 있지만, 본 연구에서는 식(8)과 같은 전방향유한차분법을 이용하여 단면성질에 대한 절점변위 및 절점력의 도함수를 계산하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Z_i} &= \frac{U(Z_i + \Delta Z_i) - U(Z_i)}{\Delta Z_i} \\ \frac{\partial F^e}{\partial Z_i} &= \frac{F^e(Z_i + \Delta Z_i) - F^e(Z_i)}{\Delta Z_i} \quad i=1, NYV \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, ΔZ_i 는 Z_i에 대한 증분을 나타내며(일반적으로 0.01을 사용), NYV는 민감도 변수의 수이다.

3. 뼈대구조물 최적설계를 위한 최적화문제 형성

3.1 최적화문제 형식

뼈대구조물의 최소중량설계를 위한 일반적인 수학적계획문제는 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : F(X) \\ \text{Subject to} & : g_j(X) \leq 0 \quad j=1, m \quad (9) \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i=1, n \end{aligned}$$

여기서 $F(X)$ 와 $g_j(X)$ 는 각각 목적함수와 제약함수이고, X_i^L 과 X_i^U 는 각각 설계변수 X_i 에 부과된 하한치 및 상한치를 나타낸다. m 은 제약조건식의 수이고, n 은 설계변수의 수이다. 본 연구에서 목적함수는 구조물의 중량으로 취하였고, 제약조건식들은 다음과 같은 응력제약 및 변위제약을 부과하였다.

(1) 재료의 응력제약조건식은 식(10)와 같이 Tsai응력제약조건식으로 고려하였다.

$$T_s - 1.0 = \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_a} + \frac{1}{\tau_a} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} - 1.0 \leq 0 \quad (10)$$

(2) 구조물의 임의의 위치에서의 변위는 허용 변위 \bar{u}_{ik} 를 초과하지 않도록 고려하였으며 식(11)과 같다.

$$\frac{u_{ijk}}{\bar{u}_{ik}} - 1.0 \leq 0 \quad (11)$$

여기서 i, j 그리고 k 는 각각 위치, 하중조건 그리고 방향을 표시한다.

3.2 근사화 문제 정식화

식(9)는 일반적인 수학적계획문제이며, 대부분의 방법들에서 최적화 과정은 목적함수 및 제약함수의 계산 뿐만 아니라 이들의 경사계산을 필요로 한다. 또한 최적화 과정은 반복적이며, 대부분의 최적화 알고리즘은 종종 함수의 계산 및 경사계산을 수백 번이상 요하게 된다. 따라서, 큰 규모의 뼈대구조물 최적설계와 같은 최적화 문제는 최적화 과정동안 요구되는 많은 수의 유한요소해석으로 인하여 비효율적이게 된다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제의 효율성을 증진시키기 위해 설계문제에 대한 양질의 근사화를 다음과 같이 생성하여 실질적으로 최소한의 유한요소해석을 실행하도록 하였다.

3.2.1 제약함수의 근사화

본 연구에서는 응력 및 변위제약만을 고려하였으며, 식(9)의 제약함수 $g_j(X)$ 는 다음과 같이 두 식으로 나눌 수 있다.

$$g_j(X) = g_u(X) = g_u(u(Y)) \quad u=1, n, j=1, u \quad (12)$$

$$g_j(X) = g_s(X) = g_s(F(u(Y)), Y, X) \quad (13)$$

$$s=1, m, j=1+u, u+s$$

여기서 식(12)는 변위제약 함수이고, 식(13)는 응력제약 함수이다. 그리고 n 은 변위제약함수의 수이며, m 은 응력제약함수의 수이다.

1) 절점변위제약함수의 근사화

식(12)를 b 번째 설계변수에 대해서 미분하면 식(14)와 같다.

$$\frac{\partial g_u}{\partial X_b} = \sum_{i=1}^{NYV} \frac{\partial g_u}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial X_b} \quad (14)$$

여기서,

$$\frac{\partial g_u}{\partial Z_i} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial g_u}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial Z_i} \quad (15)$$

이고, NYV 는 민감도 변수의 수이며 N 은 u 번째 변위제약에 관련된 절점변위 자유도의 수이다. 따라서 변위제약 함수에 대해서 1차 Taylor급수 전개를 하게 되면 식(16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_u(X) \cong g_u(X^0) + \nabla g_u \cdot \delta X \quad (16)$$

여기서,

$$\nabla g_u = \left[\frac{\partial g_u}{\partial X_1}, \frac{\partial g_u}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial g_u}{\partial X_n} \right] \quad (17)$$

2) 응력제약함수의 근사화

식(13)을 b 번째 설계변수에 대해 미분하면 식(18)과 같이 된다.

$$\frac{\partial g_s}{\partial X_b} = \sum_{i=1}^{NYV} \frac{\partial g_s}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial X_b} + \frac{\partial g_s}{\partial X_b} \quad (18)$$

여기서,

$$\frac{\partial g_s}{\partial Z_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial g_s}{\partial F_k^c} \frac{\partial F_k^c}{\partial Z_i} + \frac{\partial g_s}{\partial Z_i} \quad (19)$$

이고, N 은 s 번째 응력제약과 관계된 요소절점력의 수이다. 따라서 응력제약 함수에 대해서 1차 Taylor급수 전개를 행하면 식(20)과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$g_s(X) \cong g_s(X^0) + \nabla g_s \cdot \delta X \quad (20)$$

여기서,

$$\nabla g_s = \left[\frac{\partial g_s}{\partial X_1}, \frac{\partial g_s}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial g_s}{\partial X_n} \right] \quad (21)$$

식(16) 및 식(20)과 같은 변위와 응력에 대한 직접적인 근사계산은 양질의 근사화를 생성하지 못한다고 알려져 있다.⁽²⁾ 따라서 본 연구에서는 변위 및 응력제약조건식 자체의 근사화를 생성하지 않고 2.3 절에서 논의된 구조응답의 민감도를 이용, 절점변위 및 절점력에 대한 근사식을 생성하고 변위 및 응력제약조건식을 다음과 같이 형성하였다.

먼저 절점변위 및 절점력에 대해 선형근사화(linear approximation)를 생성하면

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Y) &\cong u(Y^0) + \nabla u(Y^0)(Y - Y^0) \\ \tilde{F}^e(Y) &\cong F^e(Y^0) + \nabla F^e(Y^0)(Y - Y^0) \end{aligned} \quad (22)$$

상반근사화(reciprocal approximation)인 경우에는

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = (-Y^2) \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (23)$$

$$\tilde{u}(Y) \cong u(Y^0) + \nabla u(Y^0) \left(-\frac{1}{Y^0} \right) \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y^0} \right)$$

$$\tilde{F}^e(Y) \cong F^e(Y^0) + \nabla F^e(Y^0) \left(-\frac{1}{Y^0} \right) \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y^0} \right)$$

따라서, 변위 및 응력제약조건식은 다음과 같다.

$$g_u(X) \cong g_u(\tilde{u}(Y)) \leq 0 \quad u=1, n \quad (24)$$

$$g_s(X) \cong g_s(\tilde{F}^e, Y, X) \leq 0 \quad s=1, m \quad (25)$$

3.2.2 근사화된 최적화문제의 정식화

구조응답에 대한 근사화를 이용하여 수학적최문제로 최적화문제를 정식화하면,

$$\text{Minimize} : F(X) \quad (26)$$

$$\text{Subject to} : g_j[X, Z, \tilde{u}(Z), \tilde{F}^e(Z)] \leq 0 \quad (27)$$

$$j=1, \dots, m$$

$$\text{여기서, } \tilde{u}(Z) \cong u(Z^0) + \nabla u(Z^0)\delta Z$$

$$\tilde{F}^e(Z) \cong F^e(Z^0) + \nabla F^e(Z^0)\delta Z$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u : \text{설계변수한계 제약조건}$$

$$\delta Z_i^l \leq \delta Z_i \leq \delta Z_i^u : Z \text{에 부과된 이동한계}$$

여기서 \tilde{u} , \tilde{F}^e 는 선형화된 절점변위와 요소절점력

을 표현하며, $\delta Z = Z - Z^0$ 이다. Z^0 는 Taylor 급수 전개가 수행되는 주어진 초기값이다. 이동한계는 단면성질변수 Z_i 에 부과하였으며, 설계변수공간 상의 어떤 영역내에서의 이동이 근사화 문제의 적절한 범위를 초과하지 않도록 보충하기 위하여 식(28)과 같이 고려하였다.

$$\max [aZ^0 \text{ and } C] \quad (28)$$

여기서 a 는 스칼라 양이며, 최적화 과정이 진행됨에 따라 축차적으로 감소된다. 그리고 C 는 매우 작은 이동을 방지하기 위해 이동한계치내에 부과된 상수이다. 최적화 과정중에는 구조응답량이 필요하지만, 많은 수의 상세한 유한요소해석을 수행하지 않고도, 근사화생성을 통해 효율적인 최적설계가 가능하게 되었다. 그리고 이렇게 근사화된 최적화 문제를 풀이하기 위해서, ADS⁽⁶⁾의 Feasible direction method를 이용 하였다. 이 방법은 첫째, 인접하고 있는 점에서 최적해에 빠르게 수렴하고, 둘째로 최적화 과정동안에 주어진 설계변수 값에서 활성 및 위배된 제약조건값만을 요구하며, 셋째로 수렴이 설계가능영역에서만 진행된다는 잇점을 갖고 있다.

3.3 전체 최적화과정

최적화 과정의 주요단계들은 다음과 같이 요약될 수 있다.

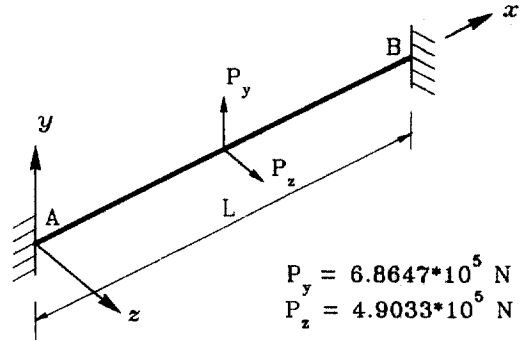
- (1) 제안된 초기 설계점에 대한 상세한 유한요소 해석을 수행한다.
- (2) 모든 제약조건식의 값을 계산하고 모든 비활성제약조건식을 삭제한다.
- (3) 활성제약조건에 관련된 절점변위(u), 절점력(F)에 대한 ∇u 와 ∇F 를 계산한다.
- (4) u 와 F 를 Y 에 대해서 1차 Taylor급수 전개하여 선형화된 근사식을 생성한다.
- (5) 선형화된 근사식을 제약조건식에 대입한다.
- (6) 단면치수 설계공간에서 목적함수를 최소화시킨다.
- (7) 새로운 설계점을 선택하고 설계가 수렴될 때까지 단계 (2)로부터 반복한다.

이러한 접근방법에서 핵심은 단면성질에 대한 구조응답량의 선형화와 단면치수 설계공간에서 생성된

수학적최문제에 대한 최적해가 된다.

4. 수치예 및 결과분석

본 연구에서는 뼈대구조물의 최소중량설계를 위해, 본론에서 기술된 근사화방법을 Fortran언어에 의해 코드화하였고, 유한요소해석 프로그램과 ADS 프로그램을 결합하였다. 본 방법의 효율성을 입증하기 위해, 양단고정보, Portal frame, 그리고 2×5 Grillage에 적용하여 기 발표된 논문⁽³⁾과 비교하였다.



$$P_y = 6.8647 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$P_z = 4.9033 \cdot 10^5 \text{ N}$$

그림 2. 양단고정보

표 1. 양단고정보의 최적설계 결과

| 요소 번호 | 설계 변수 | 최적해 | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | | 직사각형 | | | I 형 | | | Channel 형 | | | Tube 형 | | | Frame 형 | | |
| | | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 |
| 1 | t ₁ | 50.00 | 25.69 | - | 100.00 | 36.89 | - | 100.00 | 42.39 | - | 50.00 | 43.79 | - | 100.00 | 40.09 | - |
| | t ₂ | 50.00 | 21.85 | - | 85.00 | 63.33 | - | 85.00 | 52.12 | - | 3.00 | 1.00 | - | 70.00 | 35.98 | - |
| | t ₃ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| | t ₄ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| 2 | t ₁ | 50.00 | 19.85 | - | 100.00 | 28.95 | - | 100.00 | 32.39 | - | 50.00 | 32.74 | - | 100.00 | 31.62 | - |
| | t ₂ | 50.00 | 18.01 | - | 85.00 | 38.85 | - | 85.00 | 38.85 | - | 3.00 | 1.00 | - | 70.00 | 27.96 | - |
| | t ₃ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.07 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| | t ₄ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| 3 | t ₁ | 50.00 | 13.37 | - | 100.00 | 19.96 | - | 100.00 | 26.14 | - | 50.00 | 19.74 | - | 100.00 | 18.96 | - |
| | t ₂ | 50.00 | 13.38 | - | 85.00 | 26.52 | - | 85.00 | 21.92 | - | 3.00 | 1.00 | - | 70.00 | 16.62 | - |
| | t ₃ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| | t ₄ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.51 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| 4 | t ₁ | 50.00 | 20.65 | - | 100.00 | 34.53 | - | 100.00 | 35.22 | - | 50.00 | 32.75 | - | 100.00 | 31.54 | - |
| | t ₂ | 50.00 | 17.37 | - | 85.00 | 45.45 | - | 85.00 | 39.71 | - | 3.00 | 1.00 | - | 70.00 | 38.02 | - |
| | t ₃ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.05 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| | t ₄ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| 5 | t ₁ | 50.00 | 25.37 | - | 100.00 | 44.43 | - | 100.00 | 44.68 | - | 50.00 | 43.85 | - | 100.00 | 40.12 | - |
| | t ₂ | 50.00 | 21.64 | - | 85.00 | 58.19 | - | 85.00 | 52.46 | - | 3.00 | 1.00 | - | 70.00 | 35.95 | - |
| | t ₃ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| | t ₄ | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - | 5.00 | 1.00 | - | - | - | - | 5.00 | 1.00 | - |
| 목적함수 | 3920.0 | 629.25 | 626.04 | 2038.4 | 199.42 | 201.38 | 2038.4 | 189.32 | 183.07 | 694.57 | 165.41 | 165.19 | 2508.8 | 186.20 | 186.26 | |
| 반복횟수 | - | 5 | 18 | - | 5 | 17 | - | 7 | 16 | - | 5 | 20 | - | 7 | 12 | |

4.1 양단고정보

첫번째 수치예로서 그림 2와 같이 중앙에 두 방향의 하중을 받는 양단고정보를 취했다. 이 모델은 10개의 보요소로 구성하였으며, 대칭성을 고려, 5개의 보요소로 부터 설계변수를 선택하였다. 이 경우 단면형상에 따라 총 10내지는 20개의 설계변수를 갖는다. 부재의 길이는 5.6 m이고, 5가지 단면형상에 대해서 최적설계를 수행하였으며 적용된 재료특성, 허용응력 그리고 허용변위는 다음과 같다.

| | |
|---------|---|
| 허용수직응력 | $\sigma_a = 46100 \text{ N/cm}^2$, |
| 허용전단응력 | $\tau_a = 26490 \text{ N/cm}^2$ |
| 탄성계수 | $E = 7.06 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, |
| 전단 탄성계수 | $G = 2.698 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ |
| 단위중량 | $\rho = 2.8 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^3$, |
| 허용처짐량 | $U_y = U_z = \pm 0.04 \text{ cm}$ |

절점변위 근사화는 단면성질의 상반근사식을 이용하였고, 절점력 근사화는 선형근사식을 이용하였으며, 각각의 최적화 실행결과는 표 1에 제시하였다. 그리고 반복이력은 그림 3(Rectangular, I, Tube인 경우)과 그림 4(Channel, Frame인 경우)에 나타냈다. 표 1로부터 알 수 있듯이 참고문헌[3]에서의 반복회수는 12~20번의 반복회수를 요했으나, 본 방법을 이용하였을 때는 5~7번 내에 수렴함을 알 수 있었고 또한 Tube형 단면이 최소중량설계가 되어 가장 좋은 형태의 단면이 됨을 알 수 있었다.

4.2 Portal frame

두번째 수치예로 그림 5와 같이 두개의 다하중

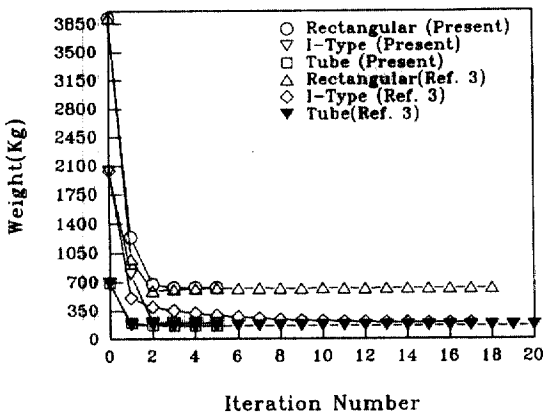


그림 3. 양단고정보의 최적화 반복이력 (Rectangular, I, Tube)

조건(하중조건 1 : $P = 5.0 \times 10^4 \text{ N}$, $M = 0$, 하중조건 2 : $P = 0$, $M = 2.0 \times 10^7 \text{ N-cm}$)을 받고 있는 Portal frame을 취했다. 적용된 재료특성, 허용응력 그리고 허용변위는 다음과 같다.:

| | |
|--------|--|
| 허용수직응력 | $\sigma_a = 20000 \text{ N/cm}^2$, |
| 허용전단응력 | $\tau_a = 11600 \text{ N/cm}^2$, |
| 탄성계수 | $E = 7.0 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, |
| 전단탄성계수 | $G = 2.7 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, |
| 단위중량 | $\rho = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^3$, |
| | $-4.0 \text{ cm} \leq U_3 \leq 4.0 \text{ cm}$, |
| | $-0.15 \leq \theta_3 \leq 0.15$ |

근사화 생성은 양단고정보와 같으며, 각각의 최적화 실행결과는 표 2에 제시하였고, 반복이력은 그림 6에 나타냈다. 표 2로부터 알 수 있듯이 참고문헌[3]에

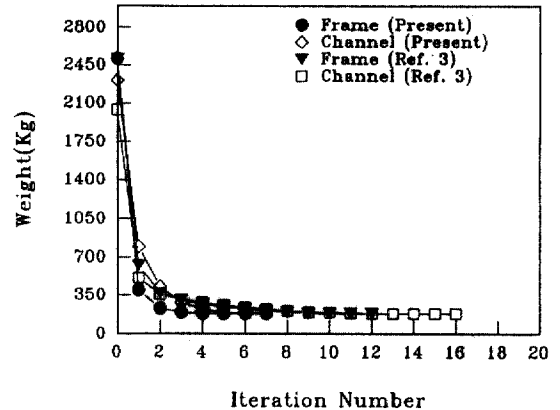


그림 4. 양단고정보의 최적화 반복이력 (Channel, Frame)

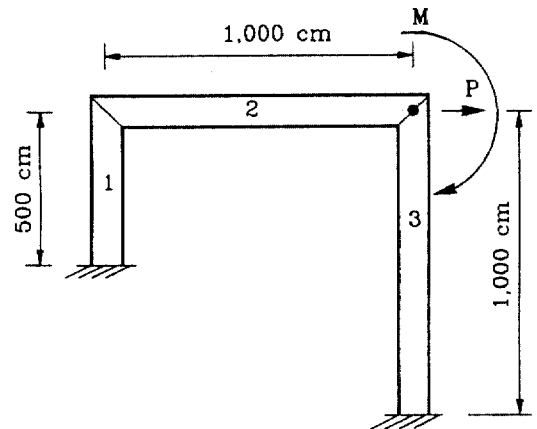


그림 5. Portal frame

표 2. Portal Frame의 최적설계 결과

| 요소 번호 | 설계 변수 | 최 적 해 | | | | | | | | |
|-------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|
| | | Tube 형 | | | I 형 | | | Channel 형 | | |
| | | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 | 초기치 | 본방법 | Ref. 3 |
| 1 | t ₁ | 50.00 | 99.63 | 99.88 | 50.00 | 99.99 | 100.00 | 50.00 | 100.00 | 100.00 |
| | t ₂ | 1.00 | 0.10 | 0.12 | 30.00 | 11.81 | 12.42 | 30.00 | 11.87 | 11.81 |
| | t ₃ | — | — | — | 1.00 | 0.52 | 0.39 | 1.00 | 0.52 | 0.52 |
| | t ₄ | — | — | — | 1.00 | 0.10 | 0.18 | 1.00 | 0.10 | 0.10 |
| 2 | t ₁ | 50.00 | 100.00 | 80.11 | 50.00 | 99.07 | 100.00 | 50.00 | 99.23 | 100.00 |
| | t ₂ | 1.00 | 0.10 | 0.12 | 30.00 | 9.77 | 10.83 | 30.00 | 9.87 | 10.83 |
| | t ₃ | — | — | — | 1.00 | 0.43 | 0.34 | 1.00 | 0.42 | 0.34 |
| | t ₄ | — | — | — | 1.00 | 0.10 | 0.13 | 1.00 | 0.10 | 0.13 |
| 3 | t ₁ | 50.00 | 69.23 | 72.82 | 50.00 | 87.80 | 94.26 | 50.00 | 87.72 | 94.26 |
| | t ₂ | 1.00 | 0.10 | 0.10 | 30.00 | 9.73 | 8.82 | 30.00 | 10.07 | 8.82 |
| | t ₃ | — | — | — | 1.00 | 0.43 | 0.27 | 1.00 | 0.42 | 0.27 |
| | t ₄ | — | — | — | 1.00 | 0.10 | 0.16 | 1.00 | 0.10 | 0.16 |
| 목적함수 | | 3848.5 | 687.39 | 693.95 | 2700.0 | 465.68 | 455.70 | 2700.0 | 465.95 | 455.70 |
| 반복횟수 | | — | 8 | 13 | — | 6 | 15 | — | 6 | 15 |

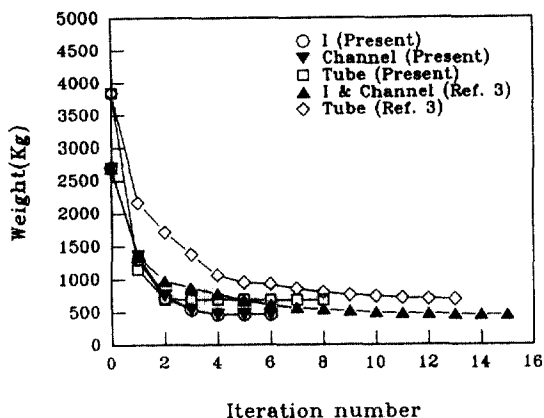


그림 6. Portal frame의 최적화 반복이력

서의 반복회수는 13~15번의 반복회수를 요했으나, 본 방법을 이용하였을 때는 6번 이내에서 수렴함을 알 수 있었고, I형과 Channel형 단면이 최소중량설계가 되어 가장 좋은 형태의 단면이 됨을 알 수 있었다.

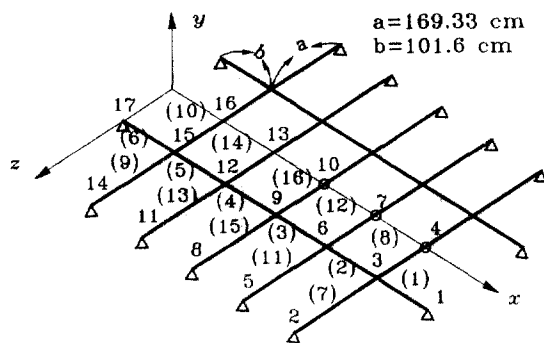


그림 7. 2×5 Grillage

4.3 2×5 Grillage

세번째 수치예는 그림 7과 같이 부재는 X-Z 평면상에 놓여있으며 하중은 Y방향으로 17.5 Kg/cm의 등분포하중을 받는 2×5 Grillage를 취하였다. 요소들은 4개의 그룹으로 분리하여 각 그룹에 4개의 독립변수를 취하였으며, 그림 7에서 그룹 1은 요소

표 3. 2×5 Grillage의 최적설계 결과

| 연결 그룹 | 요소 번호 | 설계 변수 | 최 적 해 | | | | | | | |
|-------|-------|----------------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|---------|--------|
| | | | Tube 형 | | I 형 | | Channel 형 | | Frame 형 | |
| | | | 초기치 | 본방법 | 초기치 | 본방법 | 초기치 | 본방법 | 초기치 | 본방법 |
| 1 | 1-3 | t ₁ | 48.00 | 50.80 | 43.30 | 50.72 | 48.30 | 50.78 | 38.10 | 50.80 |
| | | t ₂ | 2.00 | 0.72 | 43.20 | 16.44 | 43.20 | 17.05 | 30.48 | 22.22 |
| | 3-6 | t ₃ | — | — | 2.41 | 0.47 | 2.41 | 0.53 | 2.41 | 0.35 |
| | 6-9 | t ₄ | — | — | 2.03 | 0.15 | 2.03 | 0.12 | 2.03 | 0.12 |
| 2 | | t ₁ | 48.30 | 50.80 | 48.30 | 50.66 | 48.30 | 43.30 | 38.10 | 29.97 |
| | 2-3 | t ₂ | 2.00 | 0.25 | 43.20 | 4.71 | 43.20 | 3.53 | 30.48 | 4.71 |
| | | t ₃ | — | — | 2.41 | 0.19 | 2.41 | 0.13 | 2.41 | 0.16 |
| | 3-4 | t ₄ | — | — | 2.03 | 0.12 | 2.03 | 0.12 | 2.03 | 0.12 |
| 3 | | t ₁ | 48.30 | 50.79 | 48.30 | 50.70 | 48.30 | 50.78 | 38.10 | 50.79 |
| | 5-6 | t ₂ | 2.00 | 1.07 | 43.20 | 48.16 | 43.20 | 48.17 | 30.48 | 48.25 |
| | | t ₃ | — | — | 2.41 | 0.77 | 2.41 | 0.66 | 2.41 | 0.63 |
| | 6-7 | t ₄ | — | — | 2.03 | 0.26 | 2.03 | 0.12 | 2.03 | 0.12 |
| 4 | | t ₁ | 48.30 | 50.79 | 48.30 | 50.67 | 48.30 | 50.78 | 38.10 | 50.79 |
| | 8-9 | t ₂ | 2.00 | 1.07 | 43.20 | 48.18 | 43.20 | 48.20 | 30.48 | 48.26 |
| | | t ₃ | — | — | 2.41 | 1.55 | 2.41 | 1.39 | 2.41 | 1.38 |
| | 9-10 | t ₄ | — | — | 2.03 | 0.40 | 2.03 | 0.12 | 2.03 | 0.12 |
| 목적함수 | | | 271.9 | 876.98 | 2315.5 | 400.65 | 2315.5 | 373.50 | 2202.5 | 400.50 |
| 반복횟수 | | | — | 7 | — | 8 | — | 8 | — | 8 |

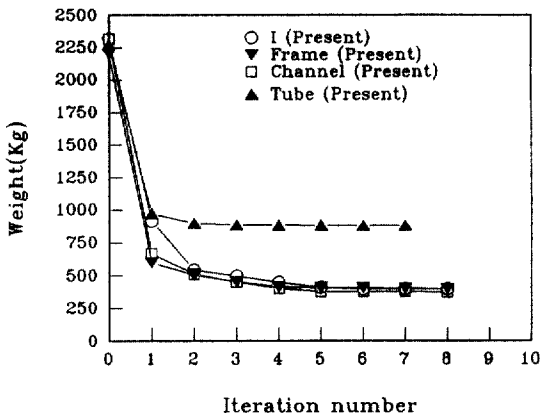


그림 8. 2×5 Grillage의 최적화 반복이력

번호 1, 2, 3이고 그룹 2는 요소번호 7, 8이며, 그룹 3은 요소번호 11, 12 그리고 그룹 4는 요소번호 15, 16이다. 유한요소 해석은 대칭성을 이용하여 전체 구조물의 1/4만을 고려하였다. 적용된 재료특성, 허용응력 그리고 허용변위는 다음과 같다;

$$\begin{aligned}
 \text{허용수직응력} & \sigma_a = 1400 \text{ Kg/cm}^2, \\
 \text{허용전단응력} & \tau_a = 800 \text{ Kg/cm}^2, \\
 \text{탄성계수} & E = 2.10 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2, \\
 \text{전단탄성계수} & G = 0.805 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2, \\
 \text{단위중량} & \rho = 8.33 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^3, \\
 & -0.254 \text{ cm} \leq \delta_{y(4,7,10)} \leq 0.254 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

근사화 생성은 양단고정보와 같으며, 각각의 최적화 수행결과는 표 3에, 반복이력은 그림 8에 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 반복횟수는 7~8

변에서 수렴함을 알 수 있었고, 이 경우 Channel형 단면이 최소중량설계가 되어 가장 좋은 형태의 단면이 됨을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 연구에서는 여러 단면형상을 갖는 뼈대구조물의 효율적인 최적설계를 수행하기 위해 단면치수로 구성된 단면성질에 대한 절점력들의 1차 Taylor급 수전개에 근거를 둔 근사화 방법을 소개하였다. 이 방법을 수치예에 적용, 비교분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 근사화방법에 대한 기존의 연구는 응력제약에 대한 직접적인 근사화를 통해 양질의 근사화를 생성시켰지만 본 연구에서는 절점력 근사식을 응력제약에 대입하는 것에 의해 양질의 근사화를 생성함으로써 보다 더 효율적인 방법임을 입증하였다.

2) 뼈대구조물에서 구조응답에 대한 근사화 생성은 단면치수의 항이 아닌 단면 성질 또는 이들의 상반의 항을 취했을 때, 더 효율적임을 알 수 있었다.

3) 변위제약인 경우 단면성질의 상반식이 수렴도에 좋았으며 응력제약인 경우 단면성질 또는 이의 상반식 중 어느식을 사용하여도 수렴도에는 별 영향을 미치지 않았다.

4) Tsai 응력 및 변위제약만을 고려하여 최적설계를 수행해 본 결과, 양단고정보에서는 Tube형 단면이, Portal frame에서는 I형과 Channel형 단면 그리고 2×5 Grillage에서는 Channel형 단면이 가장 유리한 단면임을 알 수 있었다.

參 考 文 獻

1. Schmit, L.A., and Miura, H., "Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis", *NASA CR-2552*, December, 1975.
2. Salajegheh, E., and Vanderplaats, G.N., "An Efficient Approximation Method for Structural Synthesis with Reference to Space Structure", *Space Structural Journal*, Vol. 2, 1986/1987, pp.165~175.
3. Ding, Y., and Esping, B.J.D., "Optimum Design of Beams with Different Cross-sectional Shapes", *Computer & Structures* Vol. 24, No. 5, 1986, pp. 707~726.
4. Schmit, L.A., and Farshi, B., "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 5, 1974, pp. 692~699.
5. Grierson, D.E., and Chiu, T.C.W., "Optimal Synthesis of Frameworks under Multilevel Performance Constraints", *Computer & Structures*, Vol. 18, No. 5, 1984, pp. 889~898.
6. Vanderplaats, G.N., and Sugimoto, H., "A General Purpose Optimization Program for Engineering Design", *International Journal of Computer and Structures*, Vol. 24, No. 1, 1986, pp. 13~21.
7. Han, S.H., and Vanderplaats, G.N., "Arch Shape Optimization Using Force Approximation", *Structural Optimization Journal*, Vol. 2, No. 4, 1990, pp. 193~201.
8. 한상훈, 이용종, "힘 근사화 기법에 의한 3-D 연속체 구조물의 형상최적화", *대한토목학회 논문집*, 제13권 제1호, 1993. 3, pp. 39~46.

(接受 : 1993. 4.1)