

## 균일조도 원형관 마찰계수

## Friction Factor for Circular Pipe with Uniform Roughness

유 동 훈\*

Yoo, Dong Hoon

## Abstract

On the basis of Nikuradse laboratory experiments conducted in circular pipe with uniform roughness, five flow regimes are defined with respect to the characteristics of boundary layer such as laminar, transition laminar, smooth turbulent, transition turbulent and rough turbulent flows. Two cases are found for the transition laminar flow: one for the transition between laminar flow and smooth turbulent flow and the other for the one between laminar flow and rough turbulent flow. They all can be clearly determined by the relative roughness or the ratio of pipe diameter to the roughness. Explicit functions are developed for the estimation of pipe friction factor for the various flow conditions including turbulent flow regimes, which have excellent agreement with the Nikuradse laboratory data.

## 요 지

균일조도 원형관에서 수행한 Nikuradse의 실험결과에 따라 관로흐름은 層流, 遷移層流, 緩亂流, 遷移亂流와 全亂流 등 다섯가지로 구분되며, 천이층류는 조건에 따라 층류로부터 완난류로 천이하는 경우와 층류로부터 전난류로 바로 천이하는 경우가 있다. 각 조건은 관경의 조고에 대한 비로 결정될 수 있으며, 각 조건에 대하여 원형관 마찰계수를 양해법으로 구하는 수식을 개발하였다. 본 수식은 Nikuradse의 실험결과와 비교하여 상당히 양호한 결과를 보여준다.

## 1. 서 론

수로흐름에 대한 해석은 1700년대말 Chezy의 이론식 도입으로부터 수학적 해석을 시도하게 되었으며, 이후 1800년대에 들어와서 관수로 및 개수로에 대하여 종합적인 관측결과로 평균유속산정 또는 마찰계수산정을 위한 여러 경험식이 제시되어 왔다. Manning(1890)은 그전에 발표된 여러 경험식과 관측결과를 종합적으로 검토하여 단순하면서도 개수

로에 대해서는 어느 정도 정확하리라고 인정되어 온 경험식을 제시하였다. 그러나 그의 논문제목에서도 분명히 밝혔듯이 Manning식은 개수로 뿐만 아니라 관수로에도 적용할 목적으로 제안된 식이며 공식도 출에 사용된 관측자료로서 개수로 뿐 아니라 관수로의 관측자료도 이용하였다. Williams and Hazen (1933)도 Manning과 마찬가지로 개수로 및 관수로에 적용하는 경험식을 제시하였는데 이들 경험식의 각 지수들이 Manning식의 지수들과 매우 근접한 수치임에도 불구하고 Hazen-Williams식은 주로 관

\* 정회원 · 亞洲大學校 工科大學 土木工學科 副教授

수로 계산에 적합한 수식으로 알려져 왔다. 이는 본 저자가 추측하기에 Manning은 주로 개수로 관측자료를 많이 이용한 반면에 Williams와 Hazen은 주로 관수로 관측자료를 많이 이용하는데 그 원인이 있는 것으로 사료된다.

Manning과 Williams and Hazen 이외에도 여러 연구자들이 경험식들을 제안하였는데 대부분은 관수로와 개수로에 대하여 명확히 구분하지 않은 채 개발된 수식이므로 각 경험식의 신뢰성에 많은 문제점을 내포하고 있었다. 또한 제 경험식의 개발 당시에는 완난류, 전난류 및 천이난류 등의 흐름특성이 밝혀지기 이전이므로 적용의 일반성에 의문점이 더하여진다. 따라서 마찰계수 산정의 일반성을 높이려면 제 수로형태 및 경계층 특성을 분명히 밝히고 이의 정량화가 전제되어야 할 것이다. 관수로 흐름에 비하여 개수로 흐름의 1차 특징은 자유수면의 존재와 형태의 다양성으로 2차류(secondary circulation)가 존재한다는 사실이며 이로 인하여 흐름이 더디어지거나 또는 마찰계수가 증가한다는 점이다. 관수로 특히 조도가 균일한 원형관 흐름은 2차류가 존재치 않으므로 완난류, 전난류 및 천이난류 등의 특징이 분명히 나타나게 된다. 따라서 원형관 마찰계수의 산정시에는 이러한 흐름 특성만 명확히 구분하여 산정하면 정확성을 기할 수 있으며, 이후 矩形, 蹄形, 三角形 등의 異形 개수로의 마찰계수는 2차류 흐름 특성을 추가계수로 나타내어 산정식을 개발할 수 있을 것이다(유, 1993a).

Prandtl(1925)은 혼합거리이론(mixing length theory)을 제안하여 난류시의 유속분포식을 개발하였으며, Nikuradse(1933)는 원형관 흐름에 대하여 Prandtl의 유속분포식을 적용한 결과, 緩亂流(smooth turbulent flow)와 全亂流(rough turbulent flow)에서 각기 상관변수를 달리하여 관계식을 도출하였을 때 상관계수가 일정함을 발견하였다. Colebrook(1938)은 두 조건에서의 마찰계수 산정식을 조합하여 천이난류 구간을 포함하는 전 구간에 사용할 수 있는 범용식을 제안하였으며, 기존 상용관의 조도를 Colebrook-White 식에 기초하여 산정하였다. 그러나 Colebrook-White 식은 균일조도의 원형관인 경우 천이난류 구간 뿐 아니라 완난류 구간에서도 많은 오차를 발생시키므로 범용식으로서의 신뢰성에

의문점이 많다.

Colebrook이 행한 상용관 마찰실험은 주로 천이난류 구간에 해당되는데 산정된 관마찰계수는 Nikuradse의 실험결과와 상당한 차이점을 보이고 있는 반면에 이론적인 근거가 미약한 Colebrook-White 조합식에 더 근접한 결과를 보여주고 있다. 즉 균일조도의 관에서는 천이난류에서의 관마찰계수가 전난류에서의 관마찰계수보다 작은 반면에 상용관에서는 천이난류에서의 관마찰계수가 전난류에서의 관마찰계수보다 크게 나타나고 있다. 이는 두가지 측면에서 보아지는데 하나는 상용관 실험시 흐름에 저항을 주는 요인으로 관내 조도 뿐 아니라 접착부에서의 손실, 관형태의 불완전성 등이 추가요인으로 작용할 가능성이 많다는 점이며, 다른 하나는 상용관에서는 조도가 불균일하여 이로 인한 2차류가 발생할 가능성이 있다는 점이다. 이러한 면들은 우선 이상적인 형태의 원형관 마찰에 대한 이해를 보다 충실히 한 후 제 요인들에 의한 영향은 추가계수의 도입으로 고려하면 마찰계수 산정식의 범용성을 높일 수 있을 것이다.

일반적으로 난류조건의 경계치로서 조고 레이놀즈수  $u_*z/v$ 를 사용하여 완난류와 천이난류의 경계치로 약 3, 천이난류와 전난류의 경계치로서 약 50을 기준으로 취하여 왔다. 유(1993b)는 Nikuradse의 실험결과를 재분석한 결과 각 흐름조건의 기준 경계치로서 조고 레이놀즈수보다 관경 레이놀즈수  $Ud/v$ 를 조고 대 관경비  $d/k_s$ 의 함수로 취하였을 때 뚜렷한 경향을 보이고 모든 조건에서의 유속분포식은 동일한 수식의 형태로 표현할 수 있음을 밝힌 바 있다(본고의 그림 1과 2 참조). 이밖에 완난류와 전난류의 변이조건이 되는 遷移亂流(transition turbulent flow) 조건에서도 마찰계수를 정확히 산정할 수 있는 수식을 개발하였다. 그러나 대부분의 조건에서 마찰계수 산정식은 반복법으로 구해야 하기 때문에 이용에 많은 불편을 가져다 준다. 본고는 Nikuradse의 실험결과에 기초하여 각 조건의 흐름 특성을 재고한 후 마찰계수를 양해법으로 바로 구하는 수식을 제시하며, Nikuradse의 실험결과와 비교하여 상당히 정확함을 보여준다.

## 2. 균일조고 원형관내 흐름 특징

원형관 흐름의 가장 대표적인 특징은 모든 단면의 유속분포가 중심점을 기준으로 완전 대칭을 이루며 이로써 관벽조고가 완전히 균일할 때 2차류가 전혀 존재치 않을 것이라는 점이다. 따라서 원형관 흐름은 이론식의 도출이 용이하며 흐름 특징을 분명히 밝힐 수 있는 이상적인 형태의 흐름이다. 원형관내의 흐름 특징은 그림 1에 제시된 Nikuradse(1933)의 실험결과로 뚜렷이 구분되어 나타나는데, 우선 관경 레이놀즈수 약 2,000까지는 층류로서 유속분포는 포물선분포이며 관마찰계수가 Hagen-Poiseuille 식으로부터 얻어지는 수치와 매우 흡사하다. 난류는 관경 레이놀즈수 약 4,000부터 발생되며 이후 유속분포는 대수분포를 보이고 Prandtl의 혼합거리이론으로부터 유도되는 유속분포식으로 적분하여 마찰계수산정이 가능하다(Prandtl, 1925; 유, 1993).

난류는 또한 완난류, 천이난류 및 전난류 등 세 구간으로 구분할 수 있는데, 그림 1에서 ST Point는 완난류와 천이난류의 경계점, TR Point는 천이난류와 전난류의 경계점을 나타내고 M Point는 난류구간에서 마찰계수가 최소치에 이르는 점을 나타낸다. 완난류구간에서 마찰계수는 레이놀즈수가 증가함에 따라 점차적으로 감소하게 되며 천이난류구간에 들면서 감소율이 줄어들다가 최소점을 지난 후 서서히 증가하게 된다. 마찰계수의 계속적인 증가는 전난류구간에 들면서 멈추는데 이후 마찰계수는 레이놀즈수에 관계없이 일정하게 된다. Nikuradse는 완난류구간에서는 위치 레이놀즈수  $u_*k_s/v$ 를 상관변수로 취했을 때 상관계수가 일정하고 전난류구간에서는 조고 대 위치의 비  $z/k_s$ 를 취하여 상관계수가 일정

함을 알았으며, 이에 근거하여 각 조건에서의 관마찰계수 산정식을 개발하였다.

유(1993b)는 Nikuradse의 실험결과에 기초하여 각 조건에서 상관계수를 조고 레이놀즈수  $u_*k_s/v$ 의 함수로 취하여 구할 것을 제안하였으며, 각 흐름조건구간의 경계 레이놀즈수는 조고 대 관경의 비  $d/k_s$ 로 바로 구할 수 있음을 발견하였다(그림 1과 2 참조). 즉 흐름조건의 각 구간은 다음과 같이 구분된다.

- |       |                       |     |
|-------|-----------------------|-----|
| 층류;   | $R < 2,100$           |     |
| 천이층류; | $2,100 < R < 4,000$   |     |
| 완난류;  | $4,000 < R < R_{ST}$  |     |
| 천이난류; | $R_{ST} < R < R_{TR}$ | (1) |
| 전난류;  | $R_{TR} < R$          |     |

여기서  $R$ 은 관경 레이놀즈수로서  $R = Ud/v$ 이며,  $U$ 는 단면평균유속,  $d$ 는 관경,  $v$ 는 점성계수,  $R_{ST}$ 는 완난류와 천이난류의 경계 레이놀즈수이고,  $R_{TR}$ 은 천이난류와 전난류의 경계 레이놀즈수로서 Nikuradse의 실험자료로부터 다음과 같이 유추하였다.

$$R_{ST} = \text{EXP}(1.0 \ln d_k + 4.40) \quad (2)$$

$$R_{TR} = \text{EXP}(0.8 \ln d_k + 7.83) \quad (3)$$

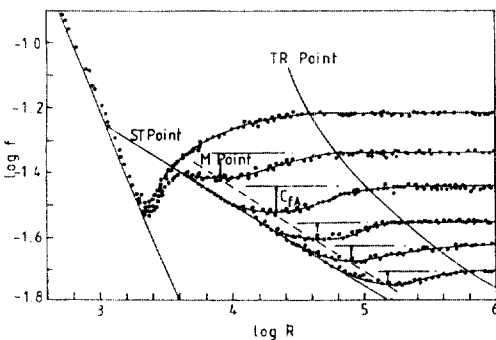


그림 1. Nikuradse의 실험결과에 의한 Darcy-Weisbach 관마찰계수

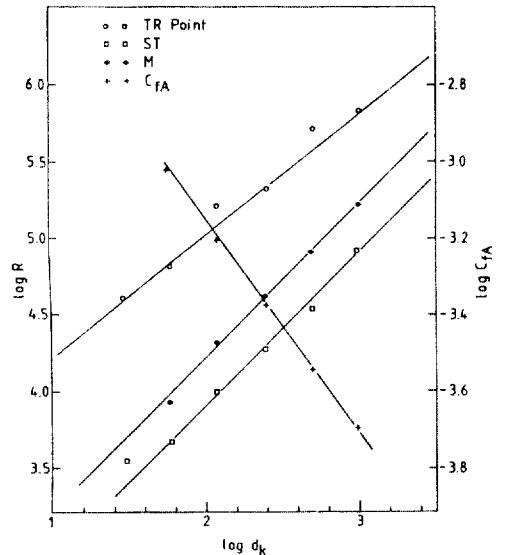


그림 2. 조고비에 대한 각 경계점에서의 관경 레이놀즈수와 천이난류 조건에서 마찰계수의 변이 진폭

여기서  $d_k$ 는 조고 대 관경비 즉  $d_k=d/k_s$ ,  $k_s$ 는 조고이다.

상기식으로 표현된 흐름조건의 경계조건식은 제한된 수조실험자료로 유추한 식이기는 하지만 그림 2에 제시된 바와 같이 상당한 일관성을 보이기 때문에 실험범위외의 넓은 범위까지 적용할 수 있을 것으로 사료된다. 단지 실험자료중 조고 대 관경비가 30일 때 상기 경계조건식이 성립하지 않는데, 이 조건에서는 완난류와 천이난류가 존재하지 않고 층류로부터 전난류로 바로 연결되는 천이구간만 존재한다. 이는 식 (2)로부터 계산되는 경계 레이놀즈수  $R_{ST}$ 가 4,000보다 작을 때 나타나는 것으로 판단된다. 즉  $EXP(\ln d_k + 4.4) < 4,000$ 일 때 천이층류, 완난류 및 천이난류의 구분이 없어지며, 층류로부터 전난류로 바로 변이하는 천이류가 존재한다. 이 경계조건에 해당하는 관경비  $d_k$ 는 약 50이다. 따라서 (1)의 경계조건식에 추가 사항으로

$$d_k < 50 \text{이면} \\ \text{천이류; } 2,100 < R < R_{TR} \quad (4)$$

유(1993b)는 천이난류를 포함한 전 구간에 대하여 관마찰계수를 산정하는 식을 개발하였다. 그러나 층류와 전난류 구간 이외의 완난류, 천이난류와 천이류 구간에서는 관마찰계수를 음해법으로 구하여야 하기 때문에 실제 적용에 많은 불편을 주고 있다. 다음은 완난류, 천이난류 및 천이류 구간에서 관마찰계수를 양해법으로 바로 구하는 수식을 제시한다. 본고에서 마찰계수  $C_f$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\sqrt{C_f} = u_* / U \quad (5)$$

여기서  $u_*$ 는 마찰속도이다. Darcy-Weisbach 마찰계수  $f = 8C_f$ 이며, Chezy 마찰계수  $C_h = \sqrt{g/C_f}$ 이다.

### 3. 완난류 구간

Nikuradse(1932, 1933)의 실험결과에 의하면, 관벽이 유속조건에 비하여 매끄러울 때는 유속분포가 위치 Reynolds수를 상관변수로 취하였을 때 경계조건계수가 일정해지며, 대수방정식으로 표현되는 유속분포식을 단면평균하였을 때 마찰계수는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = \frac{1}{k} \left( \ln \frac{u_* r}{\nu} - 1.5 \right) + A \quad (6)$$

여기서  $k$ 는 von Karman 상수로서 0.4이며,  $r$ 는 관의 반경이고, 상관계수  $A$ 는 Nikuradse의 실험자료로부터 최적치는 5.5이다. 식 (6)에서 마찰속도  $u_*$ 는 식 (5)로부터 마찰계수의 함수임을 알 수 있으며 따라서 식 (6)의 좌우변 모두에 마찰계수항을 포함하기 때문에 반복적인 시산으로만 계산이 가능하다.

완난류 구간에 대한 마찰계수 산정을 위한 약산식은 Techo 등(1965), Barr(1976), Chen(1985) 등이 1차 약산식을 Prandtl-Karman 식 (6)에 대입하는 방법으로 개발하였는데 관경 레이놀즈수를 이중으로 대입하여야 하는 단점이 있다. 본 연구에서는 산정된 마찰계수의 최종 분포형태를 파악하여 약산식을 개발하였다. 전대수지상에 식 (6)으로부터 산정된 마찰계수를 도시하면 완전한 곡선분포를 보이는데 이는 다음과 같은 형의 지수함수로 약산할 수 있다. 즉,

$$C_f = EXP(aR^b + c) \quad (7)$$

상기식에서 상수  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 는 3조의 관련치를 취하면 구할 수 있는데,  $(R, C_f)$ 에 대하여 식 (6)으로부터  $(10^4, 0.00386)$ ,  $(10^5, 0.002225)$ ,  $(10^6, 0.001438)$ 을 구하고 이를 식 (7)에 적용하였을 때,  $a=6.72$ ,  $b=-0.1$ ,  $c=-8.23$ 가 구해진다. 그림 3에는 완난류에 대하여 약산식 (7)로 산정된 Darcy-Weisbach 관마찰계수  $f$ 가 Nikuradse의 실험자료와 함께 제시

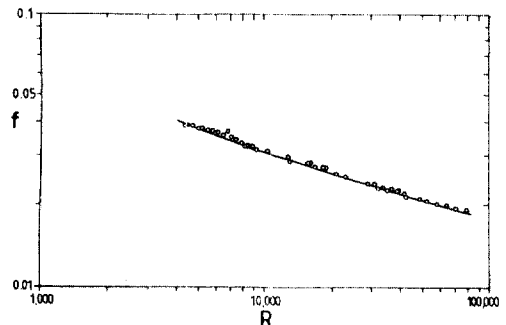


그림 3. 완난류 조건에서 Darcy-Weisbach 관마찰계수에 대한 Nikuradse의 실험치(○)와 본고의 약산식 (7) 산정치(실선)와의 비교

표 1. 이론식과 약산식으로 산정된 Darcy-Weisbach 관마찰계수(f)

관경 레이놀즈수 R	Darcy-Weisbach 관마찰계수(f)		오차 %
	이론식(6)	약산식 (7)	
0.5 * 10 <sup>4</sup>	0.03749	0.03751	0.04
1.0 * 10 <sup>4</sup>	0.03087	0.03095	0.26
0.5 * 10 <sup>5</sup>	0.02077	0.02080	0.12
1.0 * 10 <sup>5</sup>	0.01785	0.01785	0.01
0.5 * 10 <sup>6</sup>	0.01301	0.01302	0.06
1.0 * 10 <sup>6</sup>	0.01151	0.01153	0.24
0.5 * 10 <sup>7</sup>	0.00884	0.00897	1.48
1.0 * 10 <sup>7</sup>	0.00798	0.00815	2.19
0.5 * 10 <sup>8</sup>	0.00638	0.00668	4.68
1.0 * 10 <sup>8</sup>	0.00583	0.00619	6.05

되어 있는데 두 결과가 매우 근접해 있음을 알 수 있다. 표 1에는 보다 광범위한 관경 레이놀즈수에 대하여 이론식 (6)과 약산식 (7)로 각각 산정된 Darcy-Weisbach 관마찰계수 f의 이론치에 대한 약산치의 오차가 제시되어 있다. 관경 레이놀즈수가 10<sup>6</sup> 까지 약산식의 오차는 0.3% 내에 들어 본 약산식이 이 범위내에서 매우 정교함을 알 수 있으며, 관경 레이놀즈수가 10<sup>7</sup>일 때 1.48%, 10<sup>8</sup>일 때 6.05% 정도로 약간 과대 산정하기는 하나 마찰에 따른 난류운동의 복잡성을 감안할 때 실 설계에 큰 무리없이 사용될 수 있으리라 판단된다.

#### 4. 천이난류 구간

전절에서 논의된 바와 같이 Colebrook-White 식은 천이난류 구간 뿐 아니라 완난류와 전난류 구간에 대하여도 마찰계수를 산정하고자 개발된 범용식인데, 균일조도 원형관에서 수행한 Nikuradse의 실험자료와 비교하여 많은 차이점을 보이므로 기초식으로서의 신뢰도에 의문점이 많다. Colebrook의 실험자료는 상용관에 대하여 시행하여 얻어진 자료인데 Nikuradse의 실험자료와 많은 차이점을 보이며 특히 경우에 따라 천이난류 구간에서 최소점이 존재하지 않는 것으로 나타나는데 이는 불균일한 조도와 접합부 등으로 인하여 2차류가 발생하여 나타나는

현상으로 이해되며, 이의 영향에 대한 정량화는 보다 면밀한 실험에 근거한 명확한 분석이 전제되어야 할 것이다. 즉 조도의 불균일한 정도와 접합부의 손실 등을 새로운 계수의 도입으로 파악하면 보다 정교한 손실계수 산정이 가능해지리라 여겨진다. Colebrook-White 식에 기초하여 Churchill(1973), Barr (1975), Zigrang & Sylvester(1982), Haaland(1983), Chen(1985) 등이 마찰계수를 바로 산정할 수 있는 약산식을 개발하였는데 같은 이유로 사용에 주의를 요한다. 상기 연구자들 약산식의 일부에 대하여 조 등(1993)이 Moody 도표와 비교한 바 있다.

균일한 조도의 원형관내 흐름에 있어 천이난류 구간에서는 마찰계수가 독특한 분포양상을 보이고 있다. 완난류 구간을 벗어나 천이난류 구간에 들면서 레이놀즈수가 증가함에 따라 감소율이 점차 줄어들다가 최소치를 가진 후 다시 서서히 증가하며, 전난류 구간에 접근하면서 증가율이 줄어들고, 최종적으로 전난류구간에서 일정해진다. 유(1993b)는 식 (6)에서 상관계수 A를 조도 레이놀즈수의 비선형함수로 나타내어 관마찰계수를 실험결과와 매우 유사하게 산정하였는데, 이 또한 반복적으로 시산하여야 하는 번거로움이 따른다. 다음은 관마찰계수의 최종 산정결과로부터 그 특성을 파악하고 양해법으로 직접 구하는 산정식을 도출하는 과정을 설명하였다.

천이난류 구간에서 마찰계수의 분포 양상은 그림 1에 도시된 바와 같이 여섯가지 경우 모두 삼각함수 형태의 분포를 보인다. 최소점을 기준으로 취하였을 때 최소점에서의 관경 레이놀즈수를 R<sub>M</sub>이라 하면 각 분포 삼각함수의 반파장을 lnR<sub>TR</sub>-lnR<sub>M</sub>으로 가정할 수 있고 진폭은 각 경우 전난류에서의 마찰계수와 최소점에서의 마찰계수의 차 C<sub>IA</sub>로 가정할 수 있다. 즉 천이난류 구간에서의 마찰계수는

$$C_f = C_{fR} - C_{fA} \cos \frac{\pi}{2} \frac{(\ln R - \ln R_M)}{(\ln R_{TR} - \ln R_M)} \quad (8)$$

의 형태로 구한다. 여기서 C<sub>fR</sub>은 전난류 구간에서의 관마찰계수로서

$$\frac{1}{\sqrt{C_{fR}}} = \frac{1}{k} (\ln k - \ln 2 - 1.5) + B \quad (9)$$

로 직접 구해지며 Nikuradse 실험결과에 의하면

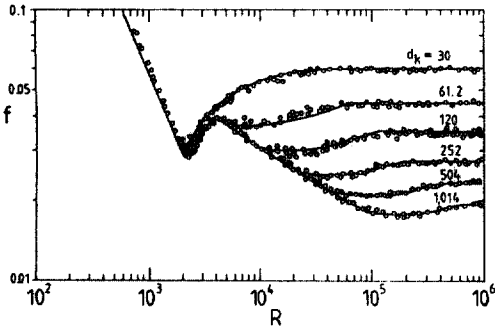


그림 4. Darcy-Weisbach 관마찰계수에 대한 Nikuradse의 실험치(○)와 본고의 약산식(7, 12, 16, 17) 산정치(실선)와의 비교

상관계수  $B=8.5$ 이며, 관경 레이놀즈수가 식 (3)으로 산정되는  $R_{TR}$ 보다 클 때 관마찰계수  $C_f$ 는  $C_{fR}$ 과 같다.

그림 1과 2에 표시된 바와 같이 최소점의 위치는 완난류-천이난류의 경계점과 평행하게 나타나며 이는 다음과 같은 식으로 표기될 수 있다.

$$R_M = \text{EXP}(1.0 \ln d_k + 5.07) \quad (10)$$

또한 진폭  $C_{fA}$ 도 그림 2에 제시된 바와 같이 전 대수지상에 직선 분포를 보이고 있으며 이를 수식으로 표기하면 다음과 같다.

$$C_{fA} = \text{EXP}(-0.56 \ln d_k - 4.62) \quad (11)$$

식 (3)과 (10)를 식 (8)에 대입하면 천이난류 구간에서 마찰계수  $C_f$ 는

$$C_f = C_{fR} - C_{fA} \cos \frac{(\ln R - \ln d_k - 5.07)}{(1.757 - 0.127 \ln d_k)} \quad (12)$$

로 간단히 구해진다.

Nikuradse가 실험한 여섯가지 경우에 대하여 상기 식 (12)를 사용하여 마찰계수와 실험결과와의 비교가 그림 4에 도시되어 있다. 대부분의 경우 실험결과와 잘 일치하는데 단지 조그 대 관경비 61.2에서 실험결과보다 약간 과소 평가하는 것으로 나타난다. 그러나 이 또한 무시할 수 있을 정도로 작은 양이다.

## 5. 천이층류 구간

관내 유체흐름이 층류인 경우 유속분포는 포물선에 따르며 Hagen-Poiseuille 식에 의한 이론에 의하면 층류 구간에서 관마찰계수는

$$C_f = 8 R^{-1} \quad (13)$$

으로 산정된다. 그림 1에 도시된 바와 같이 층류는  $R$ 가 2,100 이하의 범위에 해당하며, 대략  $R=2,100$ 인 경계점으로부터 대략  $R=4,000$ 인 경계점에 이르는 범위가 천이층류에 해당된다. 이 구간에서도 경계점 부근에서 완만한 곡선분포를 보이는데 대부분의 범위에서 직선식으로도 아주 유사한 산정식을 개발할 수 있다. 즉 천이층류조건에서 관마찰계수는 다음과 같은 비례관계식으로 산정한다.

$$C_f = (1 - \alpha)C_{fLT} + \alpha C_{fTS} \quad (14)$$

여기서  $C_{fLT}$ 는 층류-천이층류 경계점에서의  $C_f$ 이며,  $C_{fTS}$ 는 천이층류-완난류 경계점에서의  $C_f$ 이고,

$$\alpha = (\ln R - \ln R_{LT}) / (\ln R_{TS} - \ln R_{LT}) \quad (15)$$

로 가정한다. 유(1993b)는 비례계수  $\alpha$ 를 각 경계 레이놀즈수의 대수치를 사용치 않고 그대로 사용하였는데 구간이 짧은 관계로 어느 것이 더 정확한지는 분명치 않으나 자연현상이 대체적으로 대수함수적으로 변이하고 대수치를 취하였을 때 결과치가 간단하기 때문에 식 (15)의 형태가 유리하다고 판단된다.  $R_{LT}$ 는 층류-천이층류 경계점에서의 관경 레이놀즈수이며 2,100을 취하고,  $R_{TS}$ 는 천이층류-완난류 경계점에서의 관경 레이놀즈수이며 4,000을 취한다.  $R_{LT}=2,100$ 일 때 식 (13)으로부터  $C_{fLT}=0.0038$ 이며  $R_{TS}=4,000$ 일 때 식 (7)로부터  $C_{fTS}=0.005$ 가 구해진다. 이들을 식 (14)에 대입하면 천이층류 구간에서 관마찰계수는

$$C_f = 0.00186 \ln R - 0.0104 \quad (16)$$

상기식 (16)으로부터 천이층류 구간에 대하여 산출한 관마찰계수가 그림 4에 함께 도시되어 있으며, 실험자료와 비교하였을 때 대체적으로 만족할 만하다.

## 6. 천이류 구간 및 적용범위의 확장

조고 대 관경비가 작을 때는 완난류 및 천이난류 구간이 존재치 않고 층류로부터 바로 전난류로 변이하게 되는데 천이난류 구간과 달리 처음엔 마찰계수가 급격하게 증가하다가 관경 레이놀즈수가 전난류 구간에 접근하면서 증가율이 감소한다. 이와 같은 경향은 다음과 같은 형태의 식으로 표현할 수 있을 것이다.

$$C_f = C_{f,LT} + (C_{f,R} - C_{f,LT}) \tanh \frac{\beta(\ln R - \ln R_{LT})}{(\ln R_{TR} - \ln R_{LT})} \quad (17)$$

여기서  $\beta$ 는 실험결과와의 비교로서 구해지는데 Nikuradse의 실험자료와 비교하였을 때  $\beta=2.0$ 이 적합하다. 그림 4에 도시된 바와 같이 조고 대 관경비  $d_k=30$ 인 경우 식 (17)로 구해진 관마찰계수는 실험치와 매우 근접함을 알 수 있다.

그림 5는 광범위한 조건에 대하여 이상의 약산식으로 계산된 관마찰계수를 도시한 것이다. 최대 관경 레이놀즈수  $R$ 는  $10^8$ 까지 취하였으며 조고 대 관경비  $d_k$ 는 20부터 20,000까지이다. 조고 대 관경비  $d_k$ 가 30보다 작을 때 식 (17)에서  $\beta$ 를 2.0으로부터  $d_k$ 가 감소함에 따라 약간씩 증가시키는 것이 분포도의 경향에 일관성을 부여하는 것으로 나타났다. 즉,

$$\beta = -0.05 d_k + 3.5 \quad (18)$$

또한 조고 대 관경비가 500 이상이 될 때 천이난류의 초기구간에서 산정된 관마찰계수는 완난류의 마지막 구간에서 산정된 관마찰계수보다 작게 산정되는데, 이는 본고에서 제안한 천이난류 관마찰계수

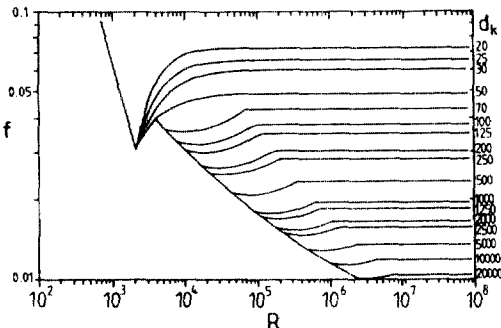


그림 5. 균일조도 원형관에 대하여 본고의 약산식으로 산정된 Darcy-Weisbach 관마찰계수

산정식 (12)가 천이난류의 초기 구간에서 부적절한 데 기인하는 것으로 판단되며, 식 (2)로 제안된 ST 경계조건식의 적합성에는 문제점이 없는 것으로 판단된다. 그러나 천이난류 구간에 적용될 산정식의 단순성을 유지하기 위하여 조고 대 관경비가 500 이상이 될 때 ST 경계조건식을 다음과 같이 수정하여 적용하였다. 즉,

$$d_k > 500 \text{ 이면} \\ R_{ST} = \text{EXP}(1.1 \ln d_k + 3.78) \quad (19)$$

을 적용하고,  $d_k < 500$ 이면 식 (2)를 적용한다.

## 7. 결론 및 토의

이제까지 마찰계수의 정확한 산정은 복잡한 수식을 반복법으로 여러 시산을 거쳐야만 가능하였는데, 본고에서 제시한 수식을 사용하면 모든 조건에서 각각 해당 수식을 사용하여 양해법으로 바로 관마찰계수를 산정할 수 있게 되었다. 각 수식은 Nikuradse 실험의 최종 결과에 따라 유추한 것이기 때문에 관내 흐름조건이 Nikuradse의 실험조건, 즉 조도가 균일하고 점합부가 없으며 원형관이 정확하게 일직선상에 설치되어 있는 경우에 적합하며 적용범위도 엄밀한 의미에서 Nikuradse의 실험범위 내에서 그 타당성이 성립한다.

Nikuradse의 실험조건중 특히 관내에 균일 입경의 모래를 부착하여 조도를 인위적으로 만든 점에 주목하게 되는데, 상용관인 경우의 조도는 Nikuradse의 조도와 상당한 차이를 보일 것으로 판단된다. Colebrook은 상용관에 대한 관마찰실험을 수행하여 여러 종류 관의 조고를 제시하였는데 그의 실험에서는 Nikuradse의 실험에서와 같이 천이난류 조건에서 마찰계수가 독특한 곡선분포를 보이며 최소치를 갖는 점이 확인되지 않았으며 천이난류 조건에서의 마찰계수가 전난류 조건에서의 마찰계수보다 오히려 크게 나타났다. 이는 여러 요인에 의한 2차류의 발생에 그 원인이 있는 것으로 판단되며 이는 상용관에 대하여 보다 면밀한 실험이 이루어진 후에야 명확한 분석이 가능할 것이다.

Nikuradse의 실험범위로 관경 레이놀즈수는 최대  $10^6$ 까지이며 조고 대 관경비는 최소 30으로부터

최대 1,014까지이다. 이 범위 밖에 대하여 본 연구에서 개발한 약산식을 사용하는데는 주의를 요하나 모든 약산식들의 체 변수가 조고 대 관경비에 대하여 일관성을 갖고 있기 때문에 상당한 범위까지 본 약산식을 사용하여도 무방할 것으로 사료된다.

### 사사

본 연구의 일부는 과학재단의 지원에 의한 1992년도 박사후 연구과정중 이루어진 것이며, 제 계산과 그림 작성에 애써 준 한상호 군에게 감사를 표한다.

### 참 고 문 헌

1. 유동훈, 완난류 개수로 마찰계수, 수공학연구발표회논문집, 1993a, pp. 49-56.
2. 유동훈, 천이류에서의 관마찰, **대한토목학회 논문집**, 제13권 제4호, 1993b, pp. 101-109.
3. 조원철, 이종철, 박환철, 관마찰계수 산정을 위한 Moody 도표와 최근의 공식들과의 비교 연구, 수공학 연구 발표회 논문집, 1993, pp. 467-474.
4. Barr, D.I.H., "Two additional methods of direct solution of the Colebrook-White function", *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part 2, Vol. 59, 1975, pp. 827-835.
5. Barr, D.I.H., Discussion on Technical Note 128, *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part 2, Vol. 61, 1976, pp. 489-497.
6. Chen, J.J.J., "Systematic explicit solutions of the Prandtl and Colebrook-White equations for pipe flow", *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part 2, Vol. 79, 1985, pp. 383-389.

7. Churchill, S.W., "Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe", *Am. Inst. Ch. Eng. J.*, Vol. 19, No. 2, 1973, pp. 375-376.
8. Colebrook, C.F., "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws", *J. Inst. Civil Eng. London*, Vol. 11, 1938, pp. 133-156.
9. Haaland, S.E., "Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow", *J. Fluids Eng.*, Vol. 105, 1983, pp. 89-90.
10. Manning, R., "On the flow of water in open channels and pipes", *Transactions, Inst. Civil Eng. of Ireland*, Vol. 20, 1890, pp. 161-207.
11. Nikuradse, J., "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Röhren", *Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh.*, Vol. 356, 1932.
12. Nikuradse, J., "Strömungsgesetze in rauhen Röhren", *Ver. Dtsch. Ing. Forsch.*, Vol. 361, 1933.
13. Prandtl, L., "Bericht ber Untersuchungen zur Ausgebildeten Turbulenz", *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 5, No. 2, p. 136, 1925.
14. Techo, R., Tickner, R.R. and James, R.E., "An accurate equation for the computation of the friction factor for smooth pipes from the Reynolds number", *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, 1965.
15. Williams, G.S. and Hazen, A., *Hydraulic Tables*, John Wiley & Sons, Inc., 1933.
16. Zigrang, D.J. and Sylvester, N.D., "Explicit approximations to the solution of Colebrook's friction factor equation", *Am. Inst. Ch. Eng.*, Vol. 28, No. 3, 1982, pp. 514-515.

(接受 : 1993. 8. 20)