

유체포화 다공매체의 단계적 굴착해석을 위한 유한요소해석방법

Finite Element Analysis for Incremental Excavation in Fluid-Saturated Porous Media

구정회* · 홍순조** · 김문겸*** · 황학주****
Koo, Jeong Hoi · Hong, Soon Jo · Kim, Moon Kyum, · Hwang, Hak Joo

Abstract

In this paper, a finite element analysis procedure is proposed for the incremental multi-step excavations in a fluid-saturated porous medium such as saturated soil ground. As the basis of derivation, Biot's equation was used. The proposed procedure was applied to some one- and two-dimensional problems under incremental excavations. Unsaturated cases as well as saturated cases were considered for comparison. Through numerical tests, the effects of permeability and excavation speed on the deformation history was investigated. Results showed that pore pressure built up during incremental excavation has a significant effect on the deformation and stresses of solid skeleton and validated the use of the present procedure for the analysis of multi-step excavations in fluid-saturated media such as in saturated shallow ground.

요 지

유체포화 다공매체에서의 단계적 굴착시 형상변화로 인한 구조거동을 시간종속적 배수이론으로 예측하기 위한 유한요소해석방법을 제시하였다. 시간종속적 배수거동을 고려한 유한요소방정식을 유도하기 위하여 Biot의 방정식을 사용하였다. 이론해가 존재하는 재하 하중에 의한 시간종속적 배수거동 문제의 해석과 완전배수거동시 1단계 굴착과 다단계 굴착시의 변형이 동일한가를 확인하므로써 유도된 방법의 타당성을 검증하였다. 1차원 및 2차원 문제에 대하여 시간종속적 배수모형과 완전배수모형에 의한 결과를 비교하여 그 차이를 예시하였다. 또한 단계적 굴착시 굴착속도 및 투수계수의 변화에 따른 영향도 분석하였다. 수치해석 시뮬레이션을 통해, 다공매체지반의 굴착해석시에는 시간종속적 배수거동에 근거한 해석이 보다 신뢰할 수 있음을 고찰하였다.

1. 서 론

최근 지하철과 같은 교통시설이나 고층건물의 지

하주차장 등을 건설하면서 대규모 지반굴착이 빈번해지고 있다. 지하구조물을 설계함에 있어서 완성된 지하구조물의 안정성 뿐만 아니라 시공 시의 굴착 단계별 안정성을 확보하는 것이 중요하며, 이를 위해서는 인접 지반과 기존 구조물에 미치는 영향을 사전에 정확히 예측할 수 있는 해석모형이 필요하다.

* 정희원 · 연세대학교 토목공학과, 박사과정

** 신경건설 부설연구소, 부장, 공학박사

*** 정희원 · 연세대학교 토목공학과, 부교수

**** 정희원 · 연세대학교 토목공학과, 교수

이러한 지반굴착 해석모형에 대하여 여러가지 각도에서 많은 연구가 수행되어 왔지만, 대부분 전응력 이론(total stress theory)을 기초로 하였으며 지반에 포함된 유체의 영향은 무시되거나 배제되어 왔다. 고체/유체 혼합체인 다공매체(porous media)의 해석에서 굴착에 의한 지반변형과 관련된 현재까지의 해석모형은 지반을 연속체로 가정하고 재하(載荷, load)나 제하(除荷, unload)시 포함된 유체에 과잉공극수압(excess pore pressure)이 발생하지 않는다는 완전배수거동으로 가정한 전응력이론이나, 발생한 과잉공극수압이 소산(dissipate)되지 않는다는 비배수거동으로 가정한 유효응력이론(effective stress theory)에 따르는 것이 일반적이었다. 그러나 지하수위면 이하가 완전포화되어 있거나 부분포화되어 있는 경우 배수가 어느 정도 억제되는 것이 일반적이므로 전응력이론에 의한 완전배수거동모형으로는 다공매체를 이루고 있는 고체와 유체 사이의 상호작용을 고려할 수 없다. 또한 지반이 불투수성이거나 굴착기간이 매우 짧은 경우를 제외하고는 시공 중 굴착에 의하여 발생한 과잉공극수압의 분포에 의하여 유체흐름이 발생하고 시간경과에 따라 과잉공극수압의 소산이 일어나므로 비배수거동이라고 가정할 수 없다. 이러한 점에서 지하수위면 이하의 지반 내에 포함된 유체가 지반거동에 미치는 영향은 비교적 투수율(permeability)이 낮은 지반에서는 무시할 수 없는 요소이다. 실제로 다공매체인 지반에서는 굴착에 의한 응력해제(stress relief)와 이로 인한 과잉공극수압의 발생 및 소산과정에 의하여 지반변형이 결정되므로 시간종속적 배수거동이 일어난다.

포화된 다공매체의 역학적 거동에 관한 이론적 발전의 시초는 Terzaghi의 유효응력이론⁽¹⁾에 의해서다. Terzaghi 이론의 기본가정은 포화된 다공매체에 물체력과 표면력이 작용할 때 임의의 점에서의 전응력은 그 점에서 고체입자에 작용하는 유효응력과 유체에 작용하는 공극수압의 합과 같다는 것이다. Terzaghi는 완전포화된 다공매체기동에 대하여 개발한 1차원 압밀이론을 적용하고 이론해를 제시하였다. Biot⁽²⁾는 다공매체의 고체입자는 선형탄성거동을 하고 유체흐름은 Darcy의 법칙을 따른다는 가정 하에 탄성지반 내 유체흐름의 조합문제에 대한

일반적인 3차원 압밀이론을 세운 후 비등방성⁽³⁾과 점탄성 효과⁽⁴⁾를 고려한 이론으로 발전시켰다. Schiffman 등⁽⁵⁾은 포화된 선형탄성 반무한체에 등분포 하중이 재하된 경우에 대하여, 또 Gibson 등⁽⁶⁾은 불투수성 암반 위에 놓인 반무한층에 등분포하중이 작용한 경우에 대하여 각각 2차원 이론해를 제시하였다.

그러나 다공매체의 거동파악은 이론해를 구할 수 있는 경우가 지극히 한정되어 있고, 실험에 의한 분석에도 많은 제약이 따르므로 실용적 해석방법으로서 Biot의 방정식을 이용한 수치해석모형개발에 많은 연구가 있어 왔다. Biot의 방정식에 의한 유한요소해석모형은 Sandhu 등,⁽⁷⁾ Hwang 등,⁽⁸⁾ Booker,⁽⁹⁾ Small 등,⁽¹⁰⁾ 그리고 Christian 등^(11,12)의 주도하에 개발되어 왔다. Sandhu 등⁽⁷⁾은 Gurtin⁽¹³⁾의 변분원리를 이용하여 유한요소모형에 의한 조합해석방법을 개발하였고, Hwang 등⁽¹⁴⁾은 가중잔차법(weighted residual method)에 의한 유한요소모형을 개발하였다. Booker⁽⁹⁾는 변분이론으로부터 유한요소해석모형을 유도하였으며, Small 등⁽¹⁰⁾은 가상일의 원리로부터 단계적 시간증분을 이용한 유한요소해석모형을 제시하였다. Booker 등⁽¹⁵⁾은 다공매체인 지반에 대한 조합해석시 시공간에서 수치적분방법의 안정성에 대하여 논의하였다. 한편 Christian 등^(11,12)은 각 시간증분에 대하여 변위와 공극수압을 조합하지 않는 유한요소해석법을 제안하였으나, 이 방법은 해석단계별 시간증분이 어떤 한계를 넘지 않아야 한다는 수치적 불안정성(numerically unstable)을 가지고 있다. 또 구정희 등⁽¹⁶⁾도 가상일의 원리를 이용하여 다공매체해석을 위한 유한요소모형을 제시한 바 있다.

탄성지반에서 시간비종속인 완전배수거동을 가정한 경우라면 1단계의 해석으로 굴착과정을 모형화할 수 있지만, 비선형지반거동이나 포화된 다공매체지반의 경우와 같이 시간종속적으로 과잉공극수압의 발생 및 소산과정을 거치는 경우 다단계 해석결과는 1단계 해석결과와 달라진다. 따라서 다공매체지반에서 지하구조물의 시공과정을 모형화하기 위하여는 다단계 굴착 시뮬레이션(multi-stage incremental excavation simulation)이 요구된다. 단계적 시공에 대한 유한요소법은 Clough 등⁽¹⁷⁾에 의하여 댐시공

해석에 시도한 것이 처음이다. 이와는 별도로 유한 요소법에 의한 굴착해석방법은 굴착경계면에서의 등가절점력을 계산하는 방법에 대하여 Duncan 등⁽¹⁸⁾, Dunlop 등⁽¹⁹⁾의 많은 연구가 있었으며, Ishihara⁽²⁰⁾는 이론적으로 다단계 굴착해의 유일해를 구하는 과정을 증명하였고, Christian 등⁽²¹⁾은 탄성지반에 대하여도 굴착단계수에 의하여 오차가 누적됨을 지적하고 굴착단계수를 최소화할 것을 제안하였다. 또한 Clough 등⁽²²⁾은 굴착경계면의 국부평형조건으로부터 등가절점력의 계산방법을 제시하였다. Ghoubssi 등⁽²³⁾과 Brown 등⁽²⁴⁾은 가상일의 원리를 적용하여 Ishihara⁽²⁰⁾에 의하여 증명된 유일해와 일치하는 유한요소해석모형을 제안하였고, Borja 등⁽²⁵⁾은 변분이론에 기초하여 탄소성 문제에 적용할 수 있는 유한요소해석모형을 제안하였다. Osaimi 등⁽²⁶⁾은 다공매체에서 굴착에 의한 과잉공극수압의 발생과 소산과정을 고체입자의 변형과 조합하여 시간종속적으로 해석하였고, Hsi 등⁽²⁷⁾은 굴착에 의한 지하수 위치하를 고려한 유한요소해석기법을 가상일의 원리를 이용하여 개발하였다.

본 논문에서는 Biot 방정식을 기초로 Galerkin 법을 이용하여 다공매체에서 고체/유체의 상호작용을 조합해석 할 수 있는 시간종속적 배수거동해석을 위한 유한요소방정식을 유도하고, 이로부터 단계적 굴착을 고려한 유한요소해석방법을 제시한다. 제시된 방법을 포화된 다공매체지반의 단계적 굴착해석에 적용하여 지하구조체의 보다 신뢰할 수 있는 해석방법에 대하여 연구하도록 한다.

2. 유체포화 다공매체의 유한요소모형화

2.1 기본방정식의 유도

일반 연속체에서 응력텐서성분을 σ_{ij} , 물체력성분을 b_i 로 나타내면 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

다공매체에서 유효응력텐서성분을 σ'_{ij} , 공극수압을 π 로 나타내면 전응력텐서성분 σ_{ij} 은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \pi \quad (2)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta 이다. 따라서 다공

매체의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma'_{ij,j} + \delta_{ij} \pi_j + b_i = 0 \quad (3)$$

고체입자의 응력-변형률 관계를 선형으로 가정하면 Hooke의 법칙으로부터 다음과 같이 된다.

$$\sigma'_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4)$$

여기서 c_{ijkl} 은 탄성계수텐서성분이고 ϵ_{kl} 은 고체의 변형률텐서성분이다. 또한 변형률-변위 관계식은 미소변형이라 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \equiv u_{(i,j)} \quad (5)$$

그림 1과 같은 다공매체인 미소육면체에서의 유체흐름을 생각하자. 유체는 고체입자에 비하여 비압축성으로 생각할 수 있기 때문에, 유체의 유출률은 다공매체의 체적변형률과 같다. 단위시간에서 단위 길이에 대한 유체의 흐름속도성분을 v_i , 다공매체의 체적변형률을 ϵ_v 라 하면 연속방정식은 다음과 같다.

$$v_{i,i} - \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (6)$$

여기서 체적변형률 ϵ_v 은 압축을 정(+)으로 가정하였으며, $\dot{\epsilon}_v$ 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 이때 공극수압의 소산을 일으키는 유체의 흐름이 Darcy의 법칙을 따르는 것으로 가정하면

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\gamma_w} \pi_{,j} \quad (7)$$

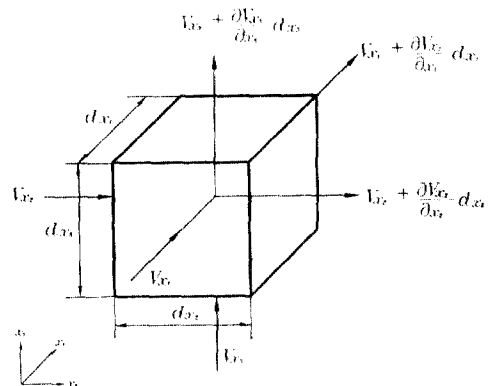


그림 1. 다공매체에서의 유체흐름

이고, 여기서 γ_w 는 유체의 단위중량, k_{ij} 는 투수율 텐서성분으로, 부(-)부호는 흐름이 수압경사가 감소하는 방향으로 일어난다는 것을 나타낸다. 다공매체를 균질이라 가정하면 k_{ij} 는 전체영역 Ω 에서 일정하고, 등방성이라 가정하면 $k_{ij}=k\delta_{ij}$ 로 쓸 수 있다.

2.2 적분방정식의 유도

그림 2와 같이 영역 Ω 과 경계 Γ 를 가지고 있는 정적 선형탄성다공매체계를 생각하자. 영역의 전체 경계 Γ 는 기하학적 경계 Γ_1 과 역학적 경계 Γ_2 로 분할할 수 있다. 경계조건은 기하학적 경계 Γ_1 와 역학적 경계 Γ_2 에 대하여 식 (8)과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (8a)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = (\sigma'_{ij} + \delta_{ij}\pi)n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (8b)$$

여기서, t_i 는 표면력벡터성분이며, u_i 및 t_i 는 기지의 변위벡터성분 및 표면력벡터성분이다. 또한 n_j 는 외부로 향한 단위법선벡터성분이다.

또한 영역의 전체 경계 Γ 는 기하학적 경계 Γ_3 와 역학적 경계 Γ_4 로 분할할 수 있다. 경계조건은 기하학적 경계 Γ_3 와 역학적 경계 Γ_4 에 대하여 식 (9)와 같다.

$$\pi = \bar{\pi} \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (9a)$$

$$q_i = v_i, n_i = \bar{q}_i \quad \text{on } \Gamma_4 \quad (9b)$$

이다. 여기서 q_i 는 유출률(fluid flux rate)성분이며,

π 및 q_i 는 기지의 공극수압성분 및 유출률성분이다. 식 (3)의 평형방정식으로부터 다음과 같은 가중잔차식(weighted residual equation)을 구성할 수 있다.^(25,28)

$$\int_{\Omega} w_i (\sigma'_{ij} + \delta_{ij} \pi_j + b_i) d\Omega = 0 \quad (10)$$

여기서, w_i 는 가중함수이다. 위 식을 전개하여 부분적분하고 divergence theorem을 적용하고 식 (8)의 경계조건과 식 (4)의 응력-변형률 관계, 식 (5)의 변형률-변위관계를 각각 적용하여 정리하면 다공매체의 평형적분방정식은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega + \int_{\Omega} w_{,i} \pi d\Omega = \int_{\Omega} w_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma} w_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (11)$$

마찬가지로 식 (6)의 연속방정식으로부터 다음과 같은 가중잔차식을 구성할 수 있다.

$$\int_{\Omega} p(v_{,i} - \dot{\epsilon}_v) d\Omega = 0 \quad (12)$$

여기서 p 는 가중함수이다. 위 식을 전개하여 부분적분하고 divergence theorem을 적용하고 식 (9)의 경계조건과 식 (7)의 Darcy의 법칙을 각각 적용하여 정리하면 다공매체의 연속적분방정식은 다음과 같다.

$$-\int_{\Omega} p_{,i} \frac{k_{ij}}{\gamma_w} \pi_j d\Omega + \int_{\Omega} p \dot{u}_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} p \bar{q}_i d\Gamma \quad (13)$$

적분방정식 (11)과 (13)에서 시도함수 u_i 와 π , 그리고 가중함수 w_i 와 p 는 시도해공간을 S_u , 가중해공간을 S_w 라 할 때 각각 다음과 같은 함수공간에서 정의함으로써 기본방정식 (3), (6)과 경계조건 (8), (9)를 만족할 수 있다.

시도함수 u_i, π

$$U = \{u_i \mid u_i \in S_u, u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_1\} \quad (14a)$$

$$\Phi = \{\pi \mid \pi \in S_u, \pi = \bar{\pi} \text{ on } \Gamma_3\} \quad (14b)$$

가중함수 w_i, p

$$W = \{w_i \mid w_i \in S_w, w_i = 0 \text{ on } \Gamma_1\} \quad (15a)$$

$$P = \{p \mid p \in S_w, p = 0 \text{ on } \Gamma_3\} \quad (15b)$$

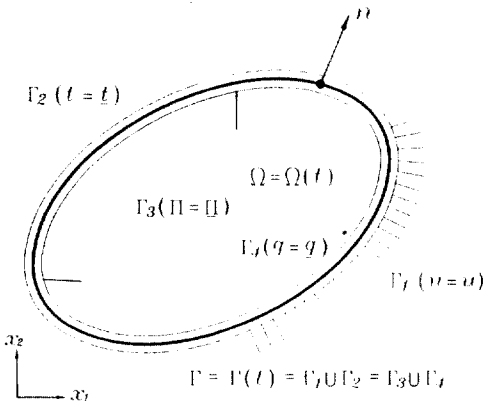


그림 2. 경계영역의 정의

2.3 적분방정식의 수치화

전체 영역 Ω 에서 식 (14)에서 정의된 함수공간을 만족하는 시도함수 u_i^a 와 π^a 는 이산화 영역 내에서 만족하는 미지의 항 U_i^a 와 Π^a , 그리고 경계조건을 만족하는 기지의 항 \bar{u}_i^a 와 $\bar{\pi}^a$ 의 합으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_i^a = U_i^a + \bar{u}_i^a \quad (16a)$$

$$\pi^a = \Pi^a + \bar{\pi}^a \quad (16b)$$

여기서 상첨자 a는 전체 영역 Ω 와 각각 이산화 부영역 Ω^a 와의 근사관계를 나타낸다.

따라서 이산화 영역에서의 평형적분방정식 (11)과 연속적분방정식 (13)은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)}^a c_{ijkl} U_{(k,l)}^a d\Omega + \int_{\Omega} w_{ij}^a \Pi^a d\Omega = \int_{\Omega} w_i^a b_i d\Omega + \int_{\Gamma} w_i^a t_i d\Gamma \quad (17a)$$

$$-\int_{\Omega} w_{(i,j)}^a c_{ijkl} \bar{u}_{(k,l)}^a d\Omega - \int_{\Omega} w_{ij}^a \bar{\pi}^a d\Omega - \int_{\Omega} p_i^a \frac{k_{ij}}{\gamma_w} \bar{\Pi}_j^a d\Omega + \int_{\Omega} p_i^a \bar{U}_{ii}^a d\Omega \quad (17b)$$

$$= \int_{\Gamma} p_i^a q_i d\Gamma + \int_{\Omega} p_i^a \frac{k_{ij}}{\gamma_w} \bar{\Pi}_j^a d\Omega - \int_{\Omega} p_i^a \bar{u}_{ij}^a d\Omega$$

Galerkin 형태의 적분방정식으로 이산화하기 위하여 변위벡터 $\{U^a\}$ 와 공극수압벡터 $\{\Pi^a\}$ 를 형상함수로 나타내고, 또한 가중변위벡터 $\{w^a\}$ 와 가중공극수압벡터 $\{p^a\}$ 를 같은 형상함수를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$\{U^a\} = [N_s] \{\bar{U}\} \quad (18a)$$

$$\{w^a\} = [N_s] \{\bar{w}\} \quad (18b)$$

$$\{\Pi^a\} = [N_f] \{\bar{\Pi}\} \quad (18c)$$

$$\{p^a\} = [N_f] \{\bar{p}\} \quad (18d)$$

여기서 $[N_s]$, $[N_f]$ 는 각각 변위와 공극수압의 형상함수행렬이며, $\{\bar{U}\}$, $\{\bar{\Pi}\}$ 는 각각 유한요소절점에서의 변위벡터와 공극수압벡터이다. 또한 변형률벡터 $\{\epsilon\}$, 체적변형률벡터 $\{\epsilon_v\}$, gradient $\{\Pi_{,i}^a\}$ 와 $\{p_{,i}^a\}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\epsilon\} = [B_s] \{\bar{U}\} \quad (19a)$$

$$\{\epsilon_v\} = [b_s] \{\bar{U}\} \quad (19b)$$

$$\{\Pi_{,i}^a\} = [B_f] \{\bar{\Pi}\} \quad (19c)$$

$$\{p_{,i}^a\} = [B_f] \{\bar{p}\} \quad (19d)$$

이상에서 변형률-변위행렬 $[B_s]$, 그리고 변환행렬 $[b_s]$ 와 $[B_f]$ 는 2차원 평면변형률 문제에서 각각 다음과 같이 정의된다. 아래 식에서 n_{nd} 는 요소를 구성하고 있는 절점의 수이다.

$$[B_s] = \sum_{i=1}^{n_{nd}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial x_i} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_s}{\partial y_i} \\ \frac{\partial N_s}{\partial y_i} & \frac{\partial N_s}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$[b_s] = \{1 \ 1 \ 0\}^T [B_s] \quad (20b)$$

$$[B_f] = \sum_{i=1}^{n_{nd}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial N_f}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (20c)$$

식 (18)부터 식 (20)을 이용하여 식 (17)의 형태로 정의된 평형적분방정식과 연속적분방정식을 변위 $\{\bar{U}\}$ -공극수압 $\{\bar{\Pi}\}$ 이 조합된 행렬형태로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K] \{\bar{U}\} + [C] \{\bar{\Pi}\} = \{F\} \quad (21a)$$

$$[C]^T \{\bar{U}\} + [M] \{\bar{\Pi}\} = \{H\} \quad (21b)$$

여기서 사용된 행렬 $[K]$, $[C]$, $[M]$ 과 하중벡터 $\{F\}$, $\{H\}$ 가 표 1에 정의되어 있다.

2.4 시각력 해석

행렬형태로 변형된 연속방정식 (21b)는 변위 $\{\bar{U}\}$ 가 아닌 속도 $\{\dot{\bar{U}}\}$ -공극수압 $\{\bar{\Pi}\}$ 이 조합된 시공간에서 정의된 형태이므로 동일한 영역에 대한 평형방정식 (19a)도 시공간으로 정의할 수 있다. 따라서 시공간에 대한 평형방정식과 연속방정식을 구성하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K] \{\dot{\bar{U}}\} + [C] \{\bar{\Pi}\} = \{F\} \quad (22a)$$

표 1. 사용된 행렬과 하중벡터의 정의

	정 의
강성행렬	$[K] = \int_{\Omega} [B_s]^T [D] [B_s] d\Omega$
조합행렬	$[C] = \int_{\Omega} [b_s] [N_f]^T d\Omega$
흐름행렬	$[M] = -\frac{1}{\gamma_w} \int_{\Omega} [B_f]^T [k] [B_f] d\Omega$
하중벡터	$\{F\} = \int_{\Omega} [N_s]^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N_s]^T \{t\} d\Gamma$ $- [K] \{u\} + [C] \{p\}$ $\{\dot{H}\} = \int_{\Gamma} [N_f]^T \{q\} d\Gamma$ $- [C]^T \{\dot{u}\} + [M] \{p\}$

$$[C]^T \{\dot{U}\} + [M] \{\bar{P}\} = \{\dot{H}\} \quad (22b)$$

시간 t_n 에서 변위 $\{\bar{U}\}$ - 공극수압 $\{\bar{P}\}$ 의 해 ($\{\bar{U}_{tm}\}$, $\{\bar{P}_{tm}\}$)가 구해지면, 식 (22)를 증분형태 ($\{\Delta\bar{U}\}$, $\{\Delta\bar{P}\}$)로 변환할 수 있다. 따라서 시간 t_{n+1} 에서의 해를 구하기 위하여는 시각력 해석이 요구된다.

식 (22)를 시간 (t_n, t_{n+1})에서 적분하여 증분형태로 변환하면 다음과 같다.

$$[K] \{\Delta\bar{U}\} + [C] \{\Delta\bar{P}\} = \{\Delta F\} \quad (23a)$$

$$[C]^T \{\Delta\bar{U}\} + [M] \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\bar{P}\} dt = \{\Delta H\} \quad (23b)$$

또한 식 (23)의 적분항은 다음과 같이 근사화될 수 있다.^(15,25)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\bar{P}\} dt = \alpha \Delta t \{\bar{P}_{t_{n+1}}\} + (1-\alpha) \Delta t \{\bar{P}_{tm}\} = \Delta t (\{\bar{P}_{tm}\} + \alpha \{\Delta\bar{P}\}) \quad (24)$$

여기서 계수 α 는 $0 \leq \alpha \leq 1$ 범위의 값을 가지게 된다. 만약 $\alpha=0$ 이면 순수 explicit(Euler) 기법, $\alpha=1/2$ 이면 implicit(Crank-Nicolson) 기법, $\alpha=1$ 이면 순수 implicit 기법이다. Booker 등⁽¹⁵⁾은 $\Delta t > 0$ 일 때 $\alpha \geq 1/2$ 이면 무조건 안정(unconditionally stable)이라는 것을 증명하였다. 식 (24)는 $\alpha=1/2$ 인 경우 무조건 안정이고 최적의 정확도를 나타낸다. 따라서 $\{\bar{P}\}$ 가 미지벡터함수이면 $\alpha=1/2$ 을 취하는 것이 좋다. 적분계수 α 를 사용하여 식 (23)의 증분행렬식을

다시 쓰면 다음과 같은 시간중속적 배수거동해석을 위한 유한요소방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [K] & [C] \\ [C]^T & \alpha \Delta t [M] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta\bar{U}\} \\ \{\Delta\bar{P}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\Delta F\} \\ \{\Delta H\} - \Delta t [M] \{\bar{P}_{tm}\} \end{pmatrix} \quad (25)$$

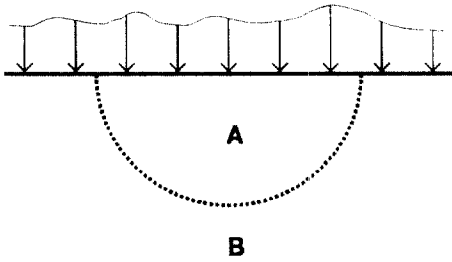
여기서 $\{\bar{P}_{tm}\}$ 은 증분 초기 단계에서의 절점공극수압이다.

3. 형상변형 구조물의 단계적 유한요소해석

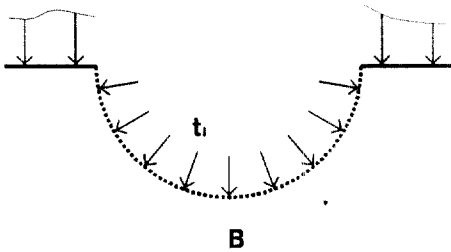
3.1 굴착 시뮬레이션

유효응력이론에 의한 지하굴착해석에서 응력, 변형과 공극수압을 결정하기 위하여는 특히 시공 과정에 따라 변화하는 구조물(geometrically altered structure)에 대한 단계적 수치해석 시뮬레이션이 중요하다. 시공 과정에는 성토나 굴착이 포함되는데, 유한요소법을 사용하여 시공 과정을 시뮬레이션할 때 초기 유한요소망으로부터 유한요소를 추가(성토시)하거나 제거(굴착시)하는 과정이 필수적이다. 유한요소법을 사용하여 이 두 가지 과정 모두를 시뮬레이션 할 수 있지만, 본 논문에서는 굴착과정으로 한정하여 논하고자 한다.

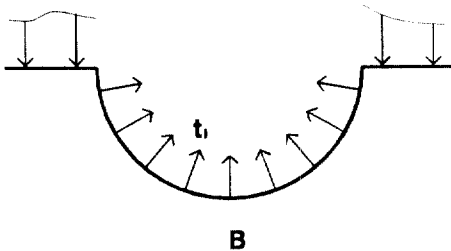
유한요소법을 이용한 단계적 굴착 시뮬레이션은 그림 3에서 보는 바와 같이 간접법(indirect method)이 널리 사용되고 있다. 초기조건으로써 영역 A를 굴착하기 전에 영역 B의 변형률, 공극수압 그리고 응력을 계산한다. 그림 3(a)에서 A로 표시된 영역을 제거하면 해석영역에는 B로 표시된 영역 만이 남게 된다. 그림 3(b)에서 보는 바와 같이 영역 A에 해당하는 응력제거량을 표면력 t_i 로 계산하여 남은 영역 B의 굴착경계면에 작용시킨다. 여기서 작용표면력 t_i 는 영역 A를 제거하기 전에 영역 A와 영역 B 사이를 따라 존재하고 있는 표면력을 나타낸다. 그러면 영역 A의 굴착에 의하여 남은 영역 B에 발생하는 영향은 그림 3(c)에서 보는 바와 같이 크기는 같고 방향이 반대인 표면력 t_i 를 등가절점력으로 작용시킴으로써 계산할 수 있다. 따라서 그 결과로 발생하는 변위, 공극수압, 변형률과 응력의 증분을 그림 3(a)의 초기계산 결과값에 더하고, 다음 시간 단계 또는 굴착 단계에서 각각 위의 과정을 반복하게 된다.



(a) 초기응력상태



(b) 초기응력상태에서 영역 B의 작용표면력



(c) 영역 A 굴착 후 굴착경계면의 등가절점력

그림 3. 굴착 시뮬레이션 개념도

이와 같은 간접법에서는 굴착에 의하여 발생한 응력자유면에 작용시켜야 하는 표면력 t_i 를 정확히 계산하는 것이 가장 중요한 문제이다. 지금까지 간접법을 고려한 많은 굴착방법이 연구되어 왔지만,^(20-27,29) 정확한 표면력을 결정하기 위한 기법은 아직까지 연구되고 있는 문제이다. 본 논문에서는 Ghaboussi 등⁽²³⁾과 Brown 등⁽²⁴⁾에 의하여 제안된 방법에 따라 외적 일과 내부 일이 굴착단계별로 항상 평형조건을 만족시키는 방법으로 다공매체에 대하여 수정된 유한요소방정식을 유도하였다.

3.2 단계적 굴착의 유한요소정식화

다공매체의 평형적분방정식 (11)을 변형하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma'_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} w_{ij} \pi d\Omega = \int_{\Omega} w_i b_j d\Omega + \int_{\Gamma} w_i t_i d\Gamma \quad (26)$$

여기서 $w_{(i,j)}$ 는 가상변형률벡터성분 $\delta\epsilon_{ij}$ 이므로 윗 식은 가상일의 원리형태로 변형된 것이다. 윗 식에서 좌측항은 가상내적 일의 합을, 우측항은 외적 일의 합이라 할 수 있으므로 각 굴착단계별로 평형조건을 만족하여야 한다. 따라서 이 식으로부터 평형조건에 의하여 n 번째 굴착단계에서의 필요한 등가절점력을 계산할 수 있다. n 번째 굴착단계에 대한 평형적분방정식은 행렬식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma'\}_n d\Omega + \int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{I\} \{\pi\}_n d\Omega = \int_{\Omega_n} \{w\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \{w\}^T \{t\} d\Gamma \quad (27)$$

여기서 Ω_n, Γ_n 는 각각 n 번째 굴착단계에서 남아 있는 영역의 체적과 면적이며, $\{I\}$ 는 단위벡터로써 $\{1 \ 1 \ 0\}^T$ 이다. 이 때

$$\{\sigma'\}_n = \{\sigma'\}_{n-1} + \{\Delta\sigma'\}_n \quad (28a)$$

$$\{\pi\}_n = \{\pi\}_{n-1} + \{\Delta\pi\}_n \quad (28b)$$

로 쓸 수 있으므로, 식 (27)은 다음과 같이 변형된다.

$$\int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{\Delta\sigma'\}_n d\Omega + \int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{I\} \{\Delta\pi\}_n d\Omega = - \int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma'\}_{n-1} d\Omega - \int_{\Omega_n} \{\delta\epsilon\}^T \{I\} \{\pi\}_{n-1} d\Omega + \int_{\Omega_n} \{w\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \{w\}^T \{t\} d\Gamma \quad (29)$$

윗 식을 앞에서와 마찬가지로 Galerkin 법을 써서 변형하고, 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$[K] \{\Delta\bar{U}\}_n + [C] \{\Delta\bar{\Pi}\}_n = \{\Delta G\} \quad (30)$$

여기서

$$\{\Delta G\} = -[K] \{\bar{U}\}_{n-1} - [C] \{\bar{\Pi}\}_{n-1} + \{\Delta F\} \quad (31)$$

로서 $(n-1)$ 번째 굴착 후의 응력과 공극수압에 의한 절점력의 변화를 포함하고 있는 하중벡터로, n 번째 굴착에서 굴착경계면에 작용하는 등가절점력이 된다.

따라서 식 (25)에 주어진 증분행렬식을 식 (30)을 써서 다공매체에서 형상변형 구조물의 단계적 굴착에 따른 증분행렬식으로 변형하면 다음과 같이 수정된 유한요소방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [K] & [C] \\ [C]^T & \alpha \Delta t [M] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \bar{U}\}_n \\ \{\Delta \bar{\Pi}\}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\Delta G\} \\ \{\Delta H\} - \Delta t [M] \{\bar{\Pi}\}_n \end{pmatrix} \quad (32)$$

4. 해석결과와 고찰

4.1 재하 하중에 대한 해석

앞에서 유도한 다공매체의 시간종속적 배수거동 해석을 위한 유한요소모형을 이론해석치가 알려져 있는 1, 2차원 문제에 대하여 검증하였다. 해석에 필요한 물성(탄성계수, 포아송비, 투수계수 등)은 무차원 값을 이용하여 해석결과를 도시하므로 임의의 물성에 대하여 성립하도록 하였다. 1차원 문제는 그림 4와 같은 Terzaghi의 압밀모형으로 유한요소

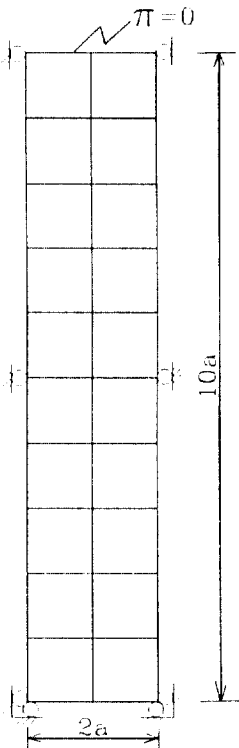
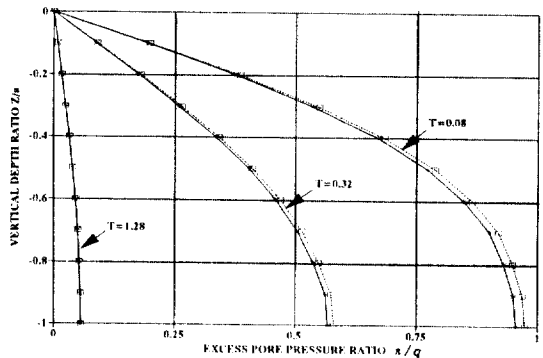


그림 4. 1차원 검증모형

해석을 위해 20개의 4변형 요소로 분할하였고 모든 절점의 x 변위는 구속하고 y 변위는 하부면만 구속하였다. 배수는 상면으로만 허용되고 측면과 하부면으로의 배수는 억제된 것으로 가정하였다. 그림 5는 수직깊이비에 따른 과잉공극수압의 해석결과를 Terzaghi의 이론해석치와 비교한 것이다. 시간경과는 무차원 시간계수 $T(=C_v H^2/t)$ 를 이용하여 도시하였다. 여기서 C_v 는 압밀계수로서 Biot⁽²⁾에 의하여 표 2와 같이 정의되었다. 그림 6은 그림 4의 1차원 모형에서 중앙하부층의 투수계수가 상부층의 투수계수에 비하여 4배 큰 경우에 대한 수직깊이비에 따른 과잉공극수압의 해석결과를 Christian 등⁽¹²⁾의 해석결과와 비교한 것이다. 그림 5에서 보는 바와 같이 무차원 시간계수 T가 작을 때는 약간의 오차가 발생하고 T가 커지면 이론해석치와 거의 일치한다. 그림 6에서의 해석결과는 Christian 등의 수치해석결과와 거의 오차없이 일치함을 알 수 있다.

표 2. 압밀계수 C_v 의 정의

차원	응력	C_v
1	σ_z	$\frac{k}{\gamma_w} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
1	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$	$\frac{k}{\gamma_w} \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$
3	$\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$	$\frac{k}{\gamma_w} \frac{E}{3(1-2\nu)}$



— 이론해석치 — 수치연구

그림 5. 수직깊이비에 따른 공극수압(단일층)

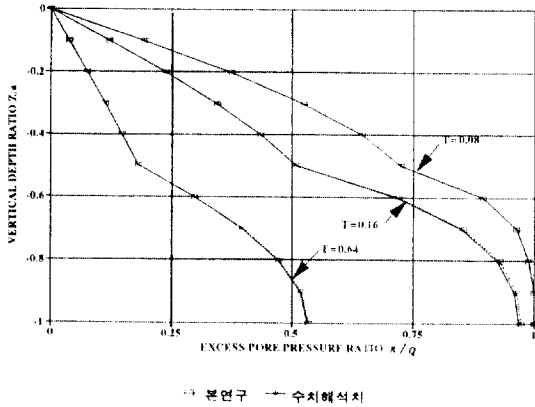


그림 6. 수직깊이비에 따른 공극수압(2개층)

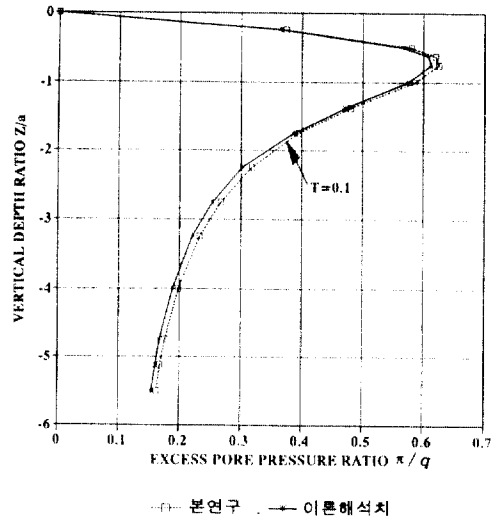


그림 8. 수직깊이비에 따른 공극수압(x/a=0)

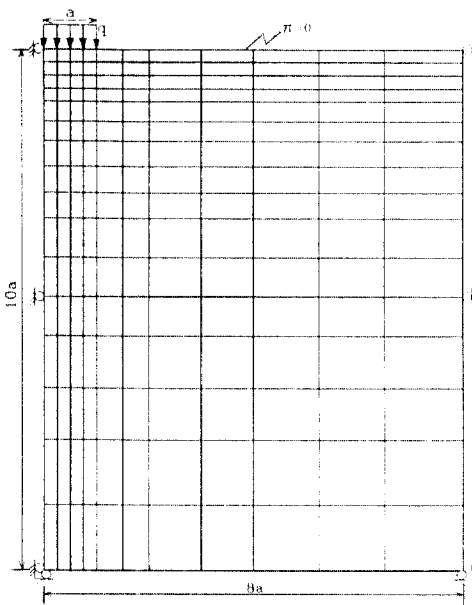


그림 7. 2차원 검증모형(반무한체)

2차원 문제에 대한 해석결과의 검증은 그림 7과 같이 반무한체(half-space)에 수직하중이 가해진 유한요소모형에 대해 실행하였다. 이 모형에서 배수는 상면으로만 허용하고 측면과 하부면으로의 배수는 억제된 것으로 가정하였다. 그림 8은 $x/a=0$, 시간계수 $T=0.1$ 에서 수직깊이비에 따른 공극수압의 해석결과를, 그리고 그림 9는 $z/a=0.5$ 에서 수평거리비에 따른 공극수압의 해석결과를 시간계수 $T=0.1$

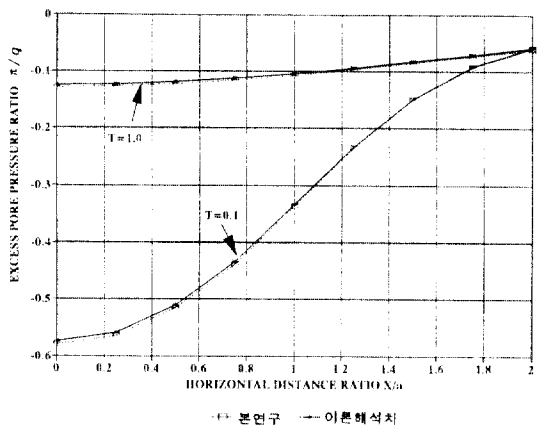


그림 9. 수평거리비에 따른 공극수압(z/a=0.5)

과 1.0에서 Schiffman 등⁽⁵⁾의 이론해석치와 비교한 것이다. 두가지 경우 모두 해석결과가 이론해석치와 잘 일치함을 보여주고 있다.

2차원 문제의 변위해석결과는 그림 10과 같이 반무한층(semi-infinite layer)에 수직하중이 가해진 유한요소모형에 대하여 검증하였다. 이 모형에서 배수는 상면으로만 허용하고 반무한층이므로 모형의 우측경계는 자유단으로 하였다. 그림 11은 시간경과에 따른 지표침하를 Gibson 등⁽⁶⁾의 이론해석치와 비교한 것으로 결과가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

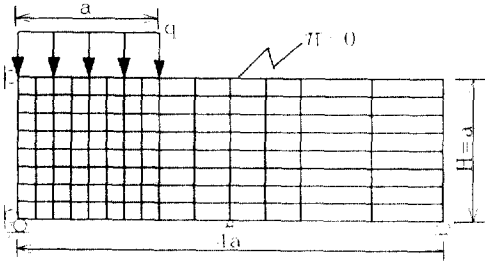


그림 10. 2차원 검증모형(반무한층)

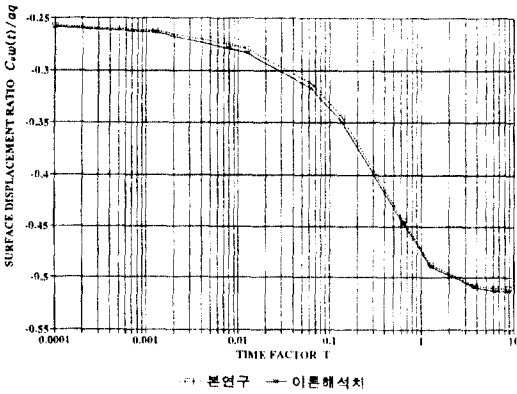


그림 11. 시간경과에 따른 지표침하

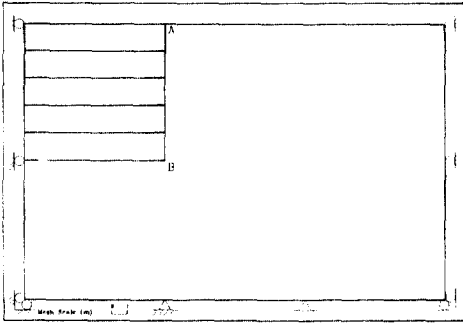


그림 12. 단계적 굴착 검증모형

4.2 다공매체의 단계적 굴착해석결과 고찰

앞에서 제시한 형상변형 구조물의 단계적 유한요소해석방법을 그림 12와 같은 문제에 적용하였다. 그림에서 폭은 90 ft, 높이는 60 ft이며, 굴착영역은 30 ft×30 ft이다. 먼저, 단계적 굴착해석결과가 올바른 지를 확인하기 위하여 완전배수조건으로 가정하여 전응력이론에 의한 굴착해석결과를 분석하였다.

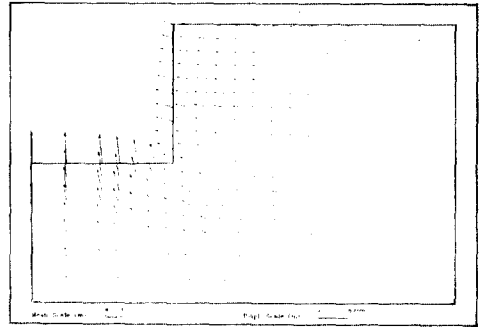


그림 13. 점 A, B의 변위이력

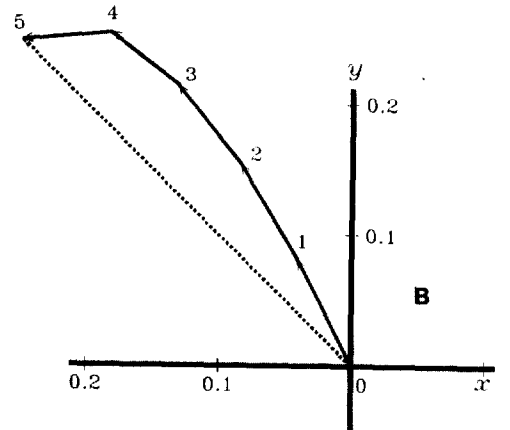
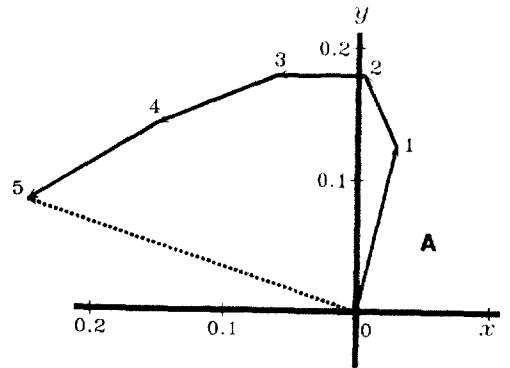


그림 14. 배수거동에 의한 변위

해석에 사용된 물성은 탄성계수 10^5 psf, 포아손비 0.3, 단위중량 $\gamma_t=120$ pcf이며 축압계수 $K_0=0.8$ 이다. 그림 13은 1단계로 굴착한 결과와 5단계로 굴착한 경우에 대한 A, B 점의 변위이력을 나타낸다.

여기에서 1단계로 굴착한 경우는 0→5로(점선), 5단계로 굴착한 경우는 0부터 5까지(실선)의 순서로 굴착에 따른 변형이 진행되고, 그림에서 A, B 점 모두 최종해석변위는 1단계와 5단계 굴착이 일치함을 알 수 있다. 따라서 단계적 굴착에 대한 작용점력의 계산과정과 해석과정이 올바르다는 것을 알 수 있다. 그림 14에는 모형에 대한 전체 변위도를 나타내었다.

유체포화 다공매체에서 단계적 굴착으로 인해 형상이 변형되는 구조물의 시간종속적 배수거동을 분석하기 위하여 1차원 및 2차원 문제를 해석하였다. 1차원 문제는 그림 4의 유한요소모형에서 폭은 20 ft, 높이는 100 ft로 가정된 것으로 경계 및 배수조건은 앞서와 동일하게 적용하였다. 물성은 탄성계수 144000 psf, 포아손비 0.3, 단위중량 $\gamma_1=100$ pcf, 투수계수 $k_x=k_y=0.0433$ ft/day를 사용하였다. 굴착은 5단계로 하고 굴착속도에 의한 거동을 고찰하기 위하여 0.1 ft/day(5단계 굴착완료 500일), 1.0 ft/day(5단계 굴착완료 50일), 10 ft/day(5단계 굴착완료 5일) 등 3가지 경우를 고려하였다. 그림 15는 5단계 굴착완료 후 유효응력과 공극수압분포를 도시한 것으로 직선은 이론적인 유효응력과 공극수압분포이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 굴착속도가 0.1 ft/day인 경우 굴착이 서서히 진행되므로 굴착에 의하여 발생한 부(-)과잉공극수압이 거의 소산되어 공극수압은 직선에 가까운 형상을 나타내고 굴착속

도가 10 ft/day인 경우와 같이 굴착이 빠른 속도로 진행되면 부과잉공극수압이 소산되지 못하므로 공극수압은 직선과 매우 떨어져 있고 유효응력이 매우 크게 나타남을 알 수 있다. 그림 16은 Osami 등⁽²⁶⁾의 해석결과와 본 결과를 부과잉공극수압에 대하여 비교한 것으로 차이가 남을 알 수 있다. 이 차이는 본 논문에서는 완전포화상태로 가정하여 초기응력을 수중단위중량 γ_{sub} , 물의 단위중량 γ_w , 습윤단위중량 γ_1 라 할 때

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}\pi = \gamma_{sub}z + \gamma_w z \quad (33)$$

로부터 초기유효응력과 초기공극수압을 계산하였으

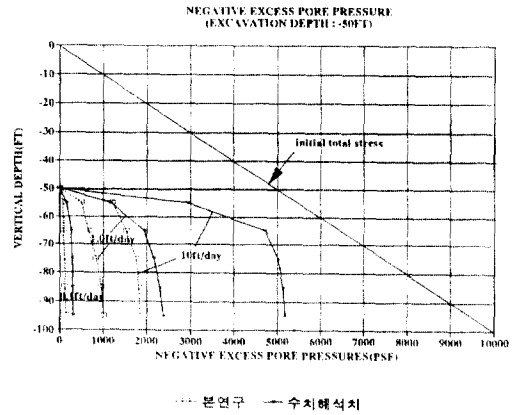


그림 16. 부과잉공극수압 분포

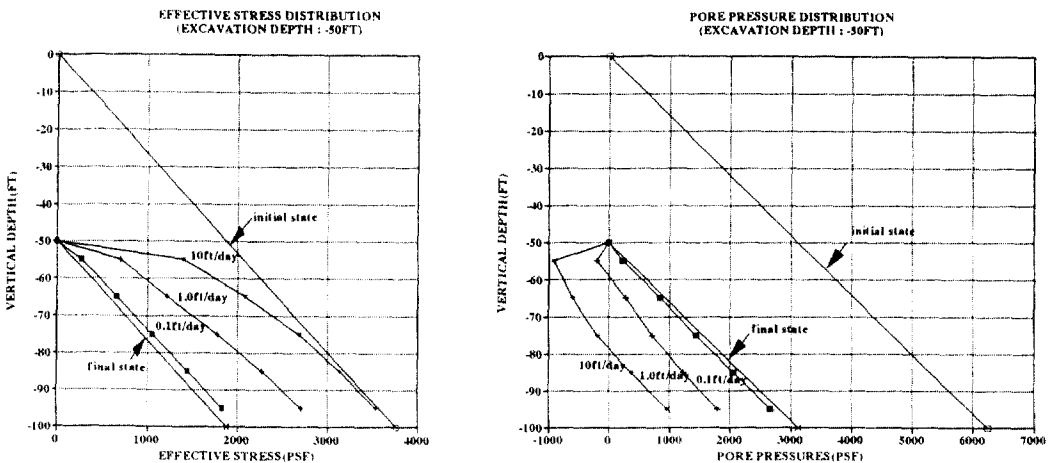


그림 15. 유효응력과 공극수압 분포

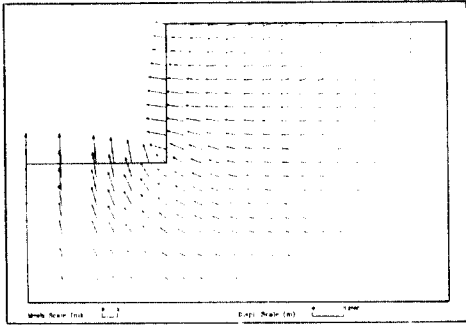


그림 17. 투수계수 $k=10^{-4}$ cm/sec의 굴착완료 후 변위

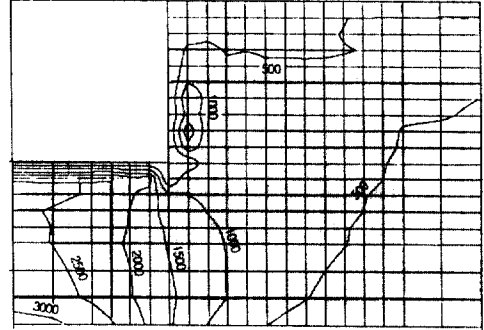


그림 19. 투수계수 $k=10^{-8}$ cm/sec의 굴착완료 후 공극수압

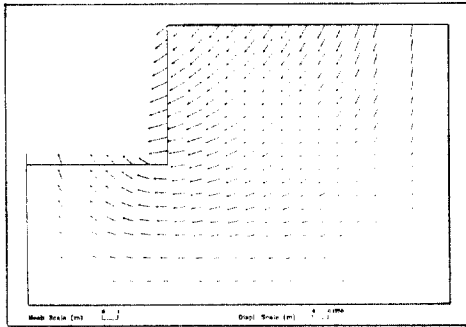


그림 18. 투수계수 $k=10^{-8}$ cm/sec의 굴착완료 후 변위

나 Osami 등⁽²⁶⁾은

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \gamma_i z, \quad \pi = 0 \quad (34)$$

를 초기상태로 설정하였기 때문이다. 즉, 이는 해석 모형의 중앙하부만 포화되어 있다고 가정한 결과가 된다. 따라서 본 해석에서 가정한 초기조건에 의한 해석결과가 타당하다고 사료된다.

한편, 2차원 문제는 그림 12의 유한요소모형을 해석하였다. 해석에 사용된 물성은 앞에 주어진 바와 같으며 투수계수의 영향을 고찰하기 위하여 투수계수 10^{-4} cm/sec, 10^{-8} cm/sec로 변화시켜 굴착거동을 비교하였다. 굴착은 굴착속도 0.5 ft/day의 5 단계로 하여 굴착완료일이 60일이 되도록 하였다. 그림 17과 18은 각각 투수계수 10^{-4} cm/sec, 10^{-8} cm/sec인 경우 굴착완료일에서의 변위형상을 도시한 것이다. 그림 17과 같이 투수계수가 큰 경우에는

그림 14의 배수거동으로 해석한 결과와 거의 변형이 같은 형상으로 일어남을 알 수 있다. 이는 부과잉공극수압이 거의 발생하지 않았기 때문이다. 그러나 그림 18과 같이 투수계수가 작은 경우에는 배수거동에 비하여 전반적으로 하향처짐이 크게 발생하고 굴착저면에서의 솟음(heaving)이 작게 발생함을 알 수 있다. 이는 고체입자가 굴착저면에 부과잉공극수압이 크게 발생한 영역으로 이동을 일으킴으로써 발생한 결과로 판단된다. 그림 19는 투수계수 10^{-8} cm/sec인 경우 굴착저면에 발생한 부과잉공극수압의 분포를 도시한 것이다. 지하수위가 상부에 존재하는 연약한 지반의 굴착시 계측결과는 그림 18에 가까운 형상을 나타내므로⁽³⁰⁾ 시간종속적 배수거동에 의한 단계적 굴착해석이 실제 상황을 보다 정확히 예측하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 Biot 방정식을 기초로 하여 변위와 공극수압이 조합된 시간종속적 배수거동에 관한 유한요소방정식을 Galerkin 법으로 유도하였다. 유도된 방정식으로부터 일반적인 연속체 문제에서 사용되는 배수거동에 의한 굴착해석방법을 유효용력이론에 의하여 다공매체에서 시간종속적 배수거동에 의한 단계적 굴착해석이 가능하도록 변형하여 변위-공극수압의 조합해석을 실시하였다. 개발된 해석방법을 재하하중에 의한 시간종속적 배수거동해석은 기존의 이론해석치와 비교하여 검증을 실시하므로써

타당성을 보였다. 굴착 시물레이션은 완전배수거동에 의한 굴착해석을 실시하여 1단계와 다단계 굴착해석결과의 변위이력을 비교하므로써 검증하였다. 또한 굴착속도와 투수계수의 영향에 의한 다공매체의 단계적 굴착해석결과를 완전배수거동에 의한 굴착해석과 비교, 고찰하였다.

다공매체로 모형화한 지반에서 단계적 굴착해석 결과로부터 굴착속도에 따라 유효응력과 공극수압의 분포가 완전히 다른 형태를 보임을 알 수 있다. 또한 투수계수의 크기에 따라 상대적으로 큰 투수계수에 대하여는 완전배수거동해석결과와 거의 같은 변형 형태를 보인다. 그러나 투수계수가 작은 경우에는 굴착에 의하여 발생한 공극수압이 굴착진행기간 동안 소산되지 않고 굴착거동해석에 크게 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 따라서 투수계수가 작은 지반에서는 완전배수거동에 의하여 공극수압이 발생하지 않는다고 가정한 해석결과에 비하여 전체적으로 하향의 처짐이 발생하며 특히 굴착저면의 솟음량은 작게 일어남을 알 수 있다. 그러므로 지하수 위면 이하의 다공매체에서 시공 중의 거동을 정확히 평가하기 위해서는 변위-공극수압이 조합된 시간 종속적 배수거동에 의한 해석이 매우 중요하다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York, 1943.
2. Biot, M.A., "General Theory of Three Dimensional Consolidation", *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, 1941, pp. 155-164.
3. Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid", *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, 1955, pp. 182-185.
4. Biot, M.A., "Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid", *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, 1956, pp. 459-467.
5. Schiffman, R.L., Chen, A. T-F. and Jordan J.C., "An Analysis of Consolidation Theories", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 95, 1969, pp. 285-312.
6. Gibson, R.E., Schiffman, R.L. and Pu, S.L., "Plane Strain and Axially Symmetric Consolidation of Clay Layer on a Smooth Impervious Base", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 16, 1970, pp. 34-50.
7. Sandhu, R.S. and Wilson, E.L., "Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 95, 1969, pp. 641-652.
8. Hwang, C.T., Morgenstern, N.R. and Murray, D. W., "On Solutions of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 8, 1971, pp. 109-118.
9. Booker, J.R., "A Numerical Method for the Solution of Biot's Consolidation Theory", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 26, 1973, pp. 457-470.
10. Small, J.C., Booker, J.R. and Davis, E.H., "Elasto-Plastic Consolidation of Soil", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, 1976, pp. 431-448.
11. Christian, J.T., "Undrained Stress Distribution by Numerical Method", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 94, 1968, pp. 1333-1345.
12. Christian, J.T. and Boehmer, J.W., "Plane Strain Consolidation by Finite Elements", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 96, 1970, pp. 1435-1457.
13. Gurtin, M., "Variational Principles for linear Elastodynamics", *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, 1964, pp. 34-50.
14. Hwang, C.T., Morgenstern, N.R. and Murray, D. W., "Application of the Finite Element Method to Consolidation Problems", *Proceedings of the Symposium, Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering*, Vol. 2, 1972, pp. 109-118.
15. Booker, J.R. and Small, J.C., "An Investigation of the Stability of Numerical Solutions of Biot's Equations of Consolidation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, 1975, pp. 907-917.
16. 구정희, 홍순조, 김문겸, 황학주, "침수지반거동 해석을 위한 유한요소모델", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제5권 제2집, 1992, pp. 168-172.
17. Clough, R.W. and Woodward, R.J., "Analysis of embankment stresses and deformation", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 93, 1967, pp. 529-549.
18. Duncan, J.M. and Dunlop, P., "Slopes in Stiff-Fissured Clays", *Journal of the Soil Mechanics and*

- Foundation Division, ASCE, Vol. 95, 1969, pp. 467-492.*
19. Dunlop, P., Duncan, J.M. and Seed, H.B., "Finite Element Analyses of Slopes in Soil", *Report No. TE68-3*, Office of Research Services, University of California at Berkeley, 1968.
 20. Ishihara, K., "Relations Between Process of Cutting and Uniqueness of Solutions", *Soils and Foundations*, Vol. 10, 1971, pp. 50-65.
 21. Christian, J.T. and Wong, I.H., "Errors in Simulating Excavation in Elastic Media By Finite Element", *Soils and Foundations*, Vol. 13, 1973, pp. 1-10.
 22. Clough, G.W. and Mana, A.I., "Lessons Learned in Finite Element Analyses of Temporary Excavations in Soft Clay", *Proceedings of Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg*, Vol.1, 1976, pp. 496-510.
 23. Ghaboussi, J. and Pecknold, D.A., "Incremental Finite Element Analysis of Geometrically Altered Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 2051-2064.
 24. Brown, P.T. and Booker, J.R., "Finite Element Analysis of Excavation", *Computers and Geotechnics*, Vol. 1, 1985, pp. 207-220.
 25. Borja, R.A., Lee, S.R. and Seed, R.B., "Numerical Simulation of Excavation in Elastoplastic Soils", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, 1989, pp. 231-249.
 26. Osaimi, A.E. and Clough, G.W., "Pore-pressure Dissipation During Excavation", *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 105, 1979, pp. 481-498.
 27. Hsi, J.P. and Small, J.C., "Simulation of Excavation in a Poro-Elastic Material", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 16, 1992, pp. 25-43.
 28. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987, Prentice-Hall Inc.
 29. 구정희, 홍순조, 김문겸, 황학주, "침수지반의 단계적 굴착해석", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제6권 제1집, 1993, pp. 207-212.
 30. Yang, K.Y., Lee, F.H., Parnpoy, U. and Lee, S.L., "Elasto-plastic Consolidation Analysis for Struttred Excavation in Clay", *Computers and Geotechnics*, Vol. 8, 1989, pp. 311-328.

(接受 : 1993. 8. 17)