

강성기초의 3차원 동적 경계요소해석

Dynamic Analysis of 3-D Rigid Foundations by Boundary Elements

이찬우* · 김문겸** · 황학주***

Lee, Chan Woo · Kim, Moon Kyum · Hwang, Hak Joo

Abstract

In this work the dynamic response of 3-D arbitrarily shaped rigid massless foundation is numerically obtained using boundary element under non-relaxed boundary condition. The problem is formulated in time domain by the boundary element method. The fundamental solutions used in this work are the Stokes solutions of the three dimensional elastodynamics. This method has advantages over frequency domain techniques in that it provides in a natural and direct way the time history of the response and forms the basis for extension to nonlinear problems. This work is verified and can be used for practical purpose.

요 지

본 연구에서는 강성기초의 동적응답을 얻기 위해서 비완화 경계조건(non-relaxed boundary condition)을 적용한 3차원 경계요소를 사용하였다. 경계요소는 장래의 비선형문제의 확장을 위해서 시간영역에서 형식화되었으며 기본해는 무한영역의 Stokes 해를 사용하였다. 본 연구는 검증되었으며 지반기초 및 임의 형상의 지하구조물의 동적응답을 얻는데 이용할 수 있다.

1. 서 론

점차 도시가 복잡해지고 인구의 증가와 교통수요의 폭발로 인하여 지하공간의 개발과 지하교통수단의 개발이 절실하게 되었다. 이러한 필요성 때문에 지하구조물의 건설에 앞서 시공중에 일어날 수 있는 진동이나 소음 그리고 시공 후에 일어날 수 있는, 사용하중으로 인한 구조물의 손상이나 진동, 소음 등을 예측하기 위한 연구가 필요하게 되었으며 우리나라에서 한창 논의되고 있는 고속전철건설사업

이나 지하철도 건설, 미래 도시 지향적인 지하공간 개발에 앞서 이러한 연구는 필수적이라고 할 수 있다.

지반-구조물계의 동적해석을 위한 수치해석기법으로는 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법 등이 있다. 여태까지 실제 공학문제에서 사용되어 왔던 수치방법중에서 가장 보편적인 것은 유한요소법이라 할 수 있으나 유한요소법은 손쉽게 재료의 비선형성이나 기하학적 비선형성등을 고려할 수 있는 잇점이 있는 반면, 전영역에 걸쳐 유한요소망을 생성해야 하는 시간적 손실 이외에 무한 매개체인 지반등을 해석할 때 인위적인 경계조건을 설정해야 하는 등의 문제점이 있으며, 유한차분법은 복잡한

* 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 대학원 박사과정

** 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수

*** 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

형태로 구성된 대상물이나 경계조건을 다루는 데는 어려움이 있다. 따라서 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 이를 대체할만한 수치해석방법으로 경계요소에 관한 많은 연구가 지난 20여년 동안 행해져 왔다.

2차원 탄성동역학에 대한 경계요소법은 진동수영역에서 1968년 Cruse와 Rizzo,⁽¹⁾ 시간영역에서 1975년 Eringen과 Suhubi⁽²⁾에 의해서 그 기초가 마련된 이래, 주로 기초(foundation) 문제에 대하여 연구가 집중적으로 이루어졌으나,⁽³⁻⁶⁾ 이러한 연구들은 대부분 선형상태를 가정한 진동수 영역에서의 동적응답을 구한 것이었으므로 비선형문제로의 확장을 위해서는 부적절한 것이었다. 따라서 이러한 단점을 극복하고자 Cole,⁽⁷⁾ Mansur,⁽⁸⁾ Manolis,⁽⁹⁾ Karabalis,⁽¹⁰⁾ Spyrakos⁽¹¹⁾ 등은 시간영역에서의 천이 동적거동을 형식화하였으나 Manolis,⁽⁹⁾ Karabalis⁽¹⁰⁾를 제외한 이들 연구 대부분은 경계요소의 형식화 및 2차원 문제에 국한된 것들이었다. 반무한 영역의 Kelvin 해를 사용하여 3차원 문제를 다룬 Manolis⁽⁹⁾의 연구는 등매개 선형요소를 사용하여 반무한 영역에서의 지하공동(cavity)의 파동 분산효과(wave scattering effect)를 규명하기 위한 것으로 직접적으로 공동에 하중을 작용시킬 수 없는 것이었으며, 무한 영역의 Stokes 해를 사용하여 3차원 반무한영역을 다룬 Karabalis⁽¹⁰⁾ 등의 연구는 낮은 정확도 및 느린 수렴속도를 가지는 일정요소(constant element)를 사용한 기초 문제에 관한 연구로서, 계산시간 및 요구되는 컴퓨터 용량을 줄이기 위하여 모든 자유도를 서로 분리하여 각각 대응하는 계산을 수행하는 완화 경계조건(relaxed boundary condition)을 적용한 것으로 가급적 실제 현장조건과 같게 제약조건을 최소화하려는 학문적 경향에 비추어 볼 때 부족한 점이 있었다. 따라서 공간과 시간상의 현장변수들을 근사화하기 위하여 공간상에서 2차(quadratic) 형상함수, 시간상에서 선형 형상함수를 사용한 Ahmad와 Banerjee⁽¹⁸⁾의 연구는 종전보다 진일보한 수치기법임에 틀림없는 것이라 할 수 있다. 그러나 Ahmad⁽¹⁸⁾ 등이 경계에서의 응력을 구하는데 이용한 현장변수들의 선형시간 변이(linear temporal variation)는 적용하기에 상대적으로 복잡하며, 본 연구처럼 장차 동적응답으로써 최대 입자속도(peak particle velo-

city)를 얻는 것을 목적으로 할 때 그 정확성의 의미는 반감될 것이며, 구조물을 모형화하는데 가장 효율적이라 할 수 있는 유한요소와의 조합을 고려할 경우, 용이하지 못한 단점이 있다. 본 연구에서는 지금까지 발표된 경계요소에 관한 연구 대부분이 지상의 2차원 기초문제에 국한된 것들임을 고려하여 지반매립기초의 3차원 동적 거동을 규명하고자 한다. 경계요소법은 특히 3차원 문제에 있어 유한요소법이나 유한차분법보다 높은 정확도를 나타내므로,⁽¹²⁾ 효율적일 것이다. 경계요소의 기본해로써 Kelvin 해를 반무한영역에 적용할 경우, 요구되는 적분영역의 범위를 줄일 수 있고 계산상으로 무한영역의 기본해보다 경제적인 장점이 있지만 적용하기에 복잡하며 모든 지반문제에 적용하기 어려운 제약이 있다. 반면, Stokes 해를 반무한영역에 적용할 경우, 원칙적으로 반무한영역의 전 자유면 및 접촉면을 이산화하여야 하지만 접촉면 및 자유면 일부만 이산화하더라도 요구되는 만큼의 정확도를 얻을 수 있기 때문에,^(3,13) 거의 모든 지반문제에 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있다. 따라서 본 연구에서는 거의 모든 일반적 파동전달문제에 적용할 수 있는 Stokes 해를 사용하기로 하며, 요소 임의점에 하중이 작용되었을 때 실제처럼 모든 자유도가 영향을 받는 것으로 생각하는 비완화 경계조건을 적용하고, 일정요소보다 정확도가 높으며 적용하기 쉬운 등매개 선형요소를 사용하기로 한다. 본 연구의 제한사항으로 기초는 강체운동을 하는 것으로 가정하고 질량은 무시하며 기초와 지반의 완전한 부착과 균질성을 가정한다.

2. 경계요소해석

경계요소법은 크게 직접경계요소법과 간접경계요소법으로 나눌 수 있는데 본 연구에서는 유한요소와의 조합 확장성을 고려하여 보다 효율적이고 적분과정이 간편한 직접경계요소법을 사용한다.

2.1 지배방정식

미소변위이론의 가정하에서 균등질이며 등방성인 무한 선형탄성체의 동적 기본방정식, 즉, 평형방정식, 구성방정식, 그리고 운동방정식은 결합되어서 식 (1)

과 같은 Cauchy-Navier 방정식을 이룬다.

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,jj} + c_2^2 u_{i,jj} + (1/\rho) \sigma_{ijj}^0 + b_i = \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

여기서 $u_i(\underline{x}, t)$ 는 field point \underline{x} 점에서의 변위벡터 성분, b_i 는 단위질량당의 물체력의 성분을 나타내며, σ_{ijj}^0 는 초기응력, 지수 i, j 는 3차원 직각좌표계에서의 3축 x_1, x_2, x_3 에 대응하며 comma는 공간미분, dot는 시간미분을 의미한다. 그리고 ρ 는 재료의 단위질량이며 c_1 과 c_2 는 각각 P파, S파 또는 팽창파, 왜곡파의 전파속도로서 다음과 같다.

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

여기서 λ 와 μ 는 Lamé의 상수로서 각각 탄성계수 E, 포아손비 ν 에 관하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3)$$

2.2 경계적분 방정식

무한영역에 대한 식 (1)에 제기된 문제의 해에 대한 적분방정식을 구하기 위해서는 적절한 기본해를 찾는 것이 필수적이다. 시간 τ 일 때 영역내 임의점 ξ 에서 p 방향으로 단위 충격력이 가해졌을 때 작용충격력은 식 (4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\rho b_k = \delta_{pk} \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) \delta(t - \tau) \quad (4)$$

여기서 δ 는 Dirac delta function이다. 식 (4)의 작용충격력에 대한 무한매개체의 응답은 식 (5)의 운동방정식의 해를 구하면 얻을 수 있으며,

$$\sigma_{kij}^0 - \rho \dot{u}_{kp}^0 = -\delta_{pk} \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) \delta(t - \tau) \quad (5)$$

식 (6)과 같은 변위벡터로 나타낼 수 있다.

$$u_k^0 = u_{kj}^0 e_j \quad (6)$$

여기서 2차 대칭 Stokes 텐서(fundamental singular solution) u_{kj}^0 는 시간 τ 일 때의 source point ξ 점에 작용하는 j 방향의 단위충격력에 의한, 시간 t 일 때의 field point \underline{x} 점에서의 k 방향의 변위성분을 나타낸다.⁽²⁾ Stokes의 변위와 응력의 기본해 한쌍(u_{kj}^0, σ_{ijp}^0)은 식 (7)의 구성방정식을 만족하기

때문에 응력텐서 σ_{ij}^0 는 이 식에 식 (6)의 u_k^0 를 대입함으로써 구할 수 있다.

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ijp}^0 e_p = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)u_{m,m}\delta_{ij} + \rho c_2^2(u_{ikj} + u_{jki}) \quad (7)$$

여기서 3차 Stokes 응력텐서 σ_{ijp}^0 는 시간 τ 일 때의 source point ξ 점에 작용하는 p 방향의 단위충격력에 의한, 시간 t 일 때의 field point \underline{x} 점에서의 kj 방향의 응력 성분을 나타낸다.

Betti의 동적상반이론과 식 (1)의 절점력에 대한 기본해(Stokes해)를 조합하게 되면 변위벡터 \underline{u} 에 대한 Love의 적분방정식을 유도할 수 있으며 이것은 앞서 언급한 탄성동역학문제의 해로서 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 물체력과 초기조건을 0으로 가정하기 때문에 물체력과 초기조건에 관한 항은 소거되어 다음과 같이 된다.⁽¹⁴⁾

$$c_{kp} u_k(\underline{x}, \tau) = \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} t_k u_{kp}^0 d\Gamma dt - \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} u_k t_{kp}^0 d\Gamma dt \quad (8)$$

$$c_{kp} = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{\xi} \in \Omega \\ 0.5 & \text{if } \underline{\xi} \in \Gamma \text{ (smooth boundary)} \\ 0 & \text{if } \underline{\xi} \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases}$$

식 (8)에서 t_k 는 시간 t 일 때 $\underline{\Omega}$ 으로 외부지향 단위표면수직벡터가 표현되는 \underline{x} 점에서의 k 방향의 표면력 성분을 나타내며 u_k 는 시간 t 일 때 \underline{x} 점에서의 k 방향의 변위 성분을 나타낸다. c_{kp} 는 $\underline{\xi}$ 의 위치에 따른 함수로서 Ω 는 영역, Γ 는 경계를 각각 나타내며 본 연구에서는 smooth surface를 가진 경계에서의 문제만을 고려하기 때문에 c_{kp} 는 0.5이다. 식 (6)과 마찬가지로 표면력에 대해서는 다음 관계식이 성립하며

$$t_k = t_{(n)k}(\underline{x}, t) = \sigma_{kj}(\underline{x}, t)n_j \quad (9)$$

$$t_{kp}^0 = t_{(n)kp}^0 = \sigma_{kij}^0 n_j \quad (10)$$

ξ 점을 제외한 모든 \underline{x} 점에 대해서 정의되는 Stokes의 기본해 한쌍(u_{kj}^0, σ_{ijp}^0)는 Stokes의 정지과거상태(state of quiescent past)라 불리우고 있으며 다음과 같은 특징을 가지고 있다.⁽²⁾

i) 인과관계(causality)

$$u_{kj}^0 = \sigma_{ijp}^0 = 0 \text{ if } tc_1 < r \text{ or } r < tc_2$$

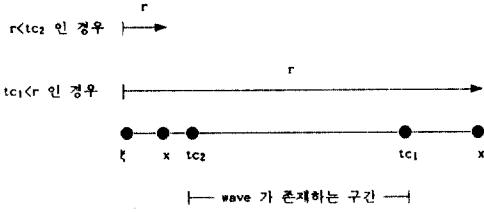


그림 1. 첨두파(wave front)의 위치

ii) 시간, 공간의 병진성(translation)

$$u_{ij}^*(\underline{x}, t, \underline{\xi}, \tau) = u_{ij}^*(\underline{x} - \underline{\xi}, t - \tau)$$

iii) 대칭(symmetry)

$$u_{ij}^* = u_{jk}^*$$

여기서 i)의 tc_1 은 가장 빠른 p파가 전파된 거리를 의미하며 tc_2 는 가장 느린 s파가 전파된 거리를 의미한다. 그림 1의 $tc_1 < r$ 는 가장 빠른 p파 조차 아직 x 점에 도달하지 못하였으며, $r < tc_2$ 는 가장 느린 s파 조차 이미 x 점을 통과한 것을 보여주고 있다. 그림 1에서 r 은 적분대상 구역을 의미하며 $\underline{\xi}$ 는 어느 기준위치에 있으나 x 는 유동적이다.

2.3 수치처리

작용표면력함수 $t_{(a)}(\underline{x}, t)$ 와 변위 $u_i(\underline{x}, t)$ 는 등간격의 연속적 구형 pulse에 의해서 시간상에서 근사화될 수 있다. 그림 2는 표면력 및 변위의 경우를 나타낸 것이다. 지반-구조물계는 3차원 기초의 경우 그림 3과 같이 경계 Γ 는 전체 Q 개의 절점으로 이루어진 M 개의 등매개 선형 사변형요소로 이산화될 수 있으며 각 시간단계 및 요소별 변위 u_k 에 대한 식 (7)의 시간단계별 해를 구할 수 있다. 여기서 $Q = 1, 2, \dots, q$ 이며 q 는 각 절점(every field point)을 의미한다. 그림 3에서 r 은 source element의 각 Gauss point로부터 field nodal point까지의 거리로서 기본해상에서 실제 적분이 행해지는 거리이며 r_0 는 source element 중심으로부터 field nodal point까지의 거리로서 단지 Stokes 기본해의 조건중의 하나인 인과관계(causality)를 만족하는지의 여부를 판단하는 근거가 된다. 본 연구에서는 선형 등매개요소를 사용하므로 표면요소상의 임의의 점 P 에 대한

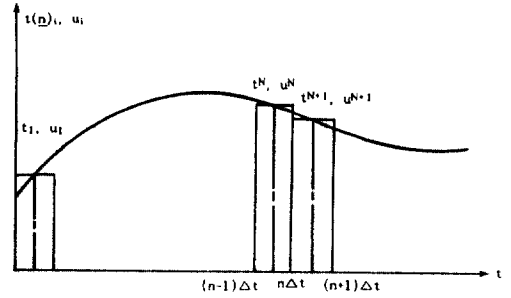


그림 2. 연속적 구형 pulse에 의한 표면력 $t(n)$ 및 변위 u_i 의 근사화

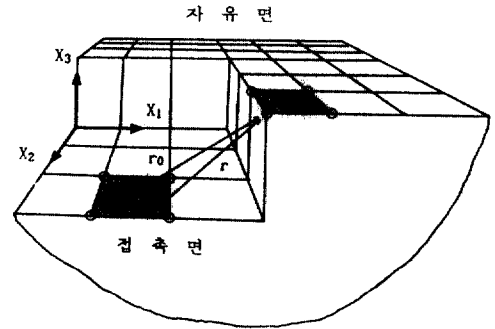


그림 3. 경계의 이산화

직각좌표 X_i 는 다음과 같이 절점좌표 X_{ia} 에 대한 항으로 나타낼 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$X_i(P) = N_a(\eta) X_{ia} \quad (11)$$

여기서 $i=1, 2, 3$, $a=1, 2, \dots, A$ 이다. A 는 요소한개당의 절점수를 의미하며 N_a 는 고유좌표계(η_1, η_2)에서 정의되는 형상함수를 의미한다. 표면력과 변위도 마찬가지로 시간간격 $(n-1)\Delta t < t < n\Delta t$ 인 범위에서 같은 형상함수를 사용해서 나타낼 수 있다.

$$u_i(\underline{x}, t) = \sum_{n=1}^N N_a(\eta) u_{ia}^n(\underline{x}) [H(t - (n-1)\Delta t) - H(t - n\Delta t)] \quad (12)$$

$$t_{(a)}(\underline{x}, t) = \sum_{n=1}^N N_a(\eta) t_{(a)ia}^n(\underline{x}) [H(t - (n-1)\Delta t) - H(t - n\Delta t)] \quad (13)$$

여기서 u_{ia}^n 는 시간 $t = (n-1/2)\Delta t$ 에서의 절점 변

위이며 $t_{(n)ia}^n$ 는 시간 $t=(n-1/2)\Delta t$ 에서의 절점 표면력벡터이다. 식 (12), (13)의 Heaviside function에 관한 항 []은 시간 t 가 주어진 범위 $(n-1)\Delta t < t < n\Delta t$ 에 존재하면 1이고 그렇지 않으면 0의 값을 갖는다. 첫번째 시간단계의 경우 ($n=1$), 식 (12), (13)은 시간 $t=(1/2)\Delta t$ 에서

$$u_i(\mathbf{x}, t) = N_a(\underline{\eta}) u_{ia}^1(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$[H(t) - H(t - \Delta t)]$$

$$t_{(n)ia}^n(\mathbf{x}, t) = N_a(\underline{\eta}) t_{(n)ia}^1(\mathbf{x}) \quad (15)$$

$$[H(t) - H(t - \Delta t)]$$

가 되며 Stokes의 기본해에 식 (14), (15)를 대입하면 $u_{ik}^n(\mathbf{x}, t; \underline{\xi} | t_{(n)ik}^1)$, $t_{(n)ik}^n(\mathbf{x}, t; \underline{\xi} | u_i^1)$ 에 대한 해를 얻을 수 있으며,⁽¹⁶⁾ 이는 식 (16)에서의 변위와 표면력의 텐서 G_{ik}^n , $H_{(n)ik}^n$ 에 상응한다. 전체 경계절점 q (field nodal point)에 대하여 표현된 경계적분방정식 (8)은 시간 convolution 적분을 의미하며 오른쪽 식은(변위의 기본해·표면력)-(응력의 기본해·변위)로 각각 분리될 수 있기 때문에 식 (11), (12), (13)을 이용하여 식 (16)과 같은 선형대수방정식으로 변환될 수 있으며,⁽¹⁷⁾ 식 (7)에서 $d\Gamma(\mathbf{x})$ 를 고유좌표로 나타내면 $d\Gamma(\mathbf{x}) = |J| d\underline{\eta}$ 의 관계가 성립하므로,

$$0.5 u_i^{nq} = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^M \left[\int_S [G_{ik}^n N_a(\underline{\eta}) \right. \right. \quad (16)$$

$$\left. \left. |J| d\underline{\eta} \right] t_{(n)ia}^{(N-n+1)s} - \left[\int_S [H_{(n)ik}^n \right. \right.$$

$$\left. \left. N_a(\underline{\eta}) |J| d\underline{\eta} \right] u_{ia}^{(N-n+1)s} \right\}$$

여기서 N 은 전체 시간단계수, n 은 현재의 시간 단계수, M 은 전체 경계요소의 수, $|J|$ 는 직각좌표계 (x, y, z) 로부터 요소의 고유좌표계 $\underline{\eta}(\eta_1, \eta_2)$ 로 변환시켜 주는 Jacobian 행렬의 determinant, $u_{ia}^{(N-n+1)s}$ 와 $t_{(n)ia}^{(N-n+1)s}$ 는 시간 $(N-n+1)\Delta t$ 일 때 $\underline{\eta}$ 으로 단위수직벡터가 표현되는 source element 절점에서의 변위와 표면력의 값, u_i^{nq} 는 시간 $N\Delta t$ 일 때 field nodal point q 에서의 변위성분, S 는 source boundary element s 의 면적, Q 는 요소전체의 절점수, a 는 한 요소당 절점수를 나타낸다. 단, $i, j=1, 2, 3, Q=1, 2, \dots, q$ 이다. 그림 4는 강체운동을 하는 구조물-지반의 접합면(interface)에서의 절점 평형조건을 나타낸 것으로 P_s^N 은 작용하중 P^N 에 대한 지반의 반력이며

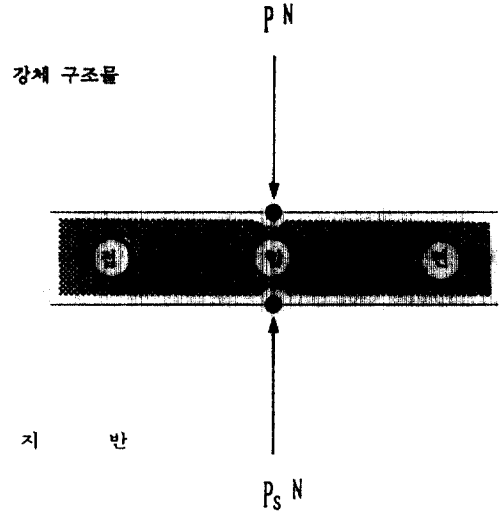


그림 4. 접합면(interface)에서의 절점 평형조건

지반으로부터의 접합면에 작용하는 절점력(nodal force)이다.

2.4 특이상태(singularity)의 처리

source element로부터 발생되는 파(wave)는 이동하는 성질이 있기 때문에 특이상태는 첫번째 시간단계에서만 발생한다는 것을 알 수 있다. 따라서 첫번째 시간단계 동안 가장 빠른 팽창파(P파)를 한 요소에 묶어 두면, source element로부터 발생되는 파가 source element 범위를 넘어 다른 인접요소로 전파되었을 때 생길 수 있는, 수치적으로 처리 곤란한 요소간의 상호효과(inter-element effect)를 방지할 수 있다. 이를 위해서는 Δt 를 첫번째 시간단계 동안 각 구형요소의 중심에 작용하는 힘에 의해서 전파되는 팽창파가 구형요소의 면적과 같은 등가원 면적에 도달하도록 조절하여야만 한다. 이 때 등가원의 면적은 구형요소의 면적과 같다고 가정함으로써 Δt 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta t = \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{ab}{\pi}} \quad (17)$$

여기서 a 와 b 는 구형요소(rectangular element)의 길이이다. 이제 식 (16)에서의 적분은 구형요소의 면적과 같은 등가원의 면적에 대해서 수행될 수

있다. 단 이는 오직 특이상태가 발생하는 첫번째 시간단계에 한하여야만 한다. 첫번째 시간단계 동안 singular element의 중심으로부터 발생하는 팽창파(P파)와 전단파(S파)가 도달하는 반경을 각각 $R_1(=c_1\Delta t)$, $R_2(=c_2\Delta t)$ 라 하면 변위텐서 G_{ijk}^1 에 관한 식은 r 과 θ 로 표현되는 극좌표에 대한 적분의 향으로 나타낼 수 있으며 $r_1=r\cos\theta$, $r_2=r\sin\theta$, $r_3=0$ 인 평면요소(plane element)를 가정했을 때 대입 소거되어

$$G_{11}^1 = G_{22}^1 = \frac{\Delta t}{2\rho c_2} \quad (18)$$

$$G_{33}^1 = \frac{\Delta t}{2\rho c_1}$$

의 대간선 항만이 남게 된다. 마찬가지로 응력텐서 H_{ijk}^1 에 대해서도 특이상태는 발생하나, 평면요소($r_1=r\cos\theta$, $r_2=r\sin\theta$, $r_3=0$)를 가정하면 응력텐서에 각각 대입되어 H_{331}^1 , H_{332}^1 , H_{323}^1 , H_{313}^1 의 성분만이 0이 되지 않으나 이 성분은 각각 수평, 수직 운동의 약한 조합(weak coupling)을 나타내는 바, 첫번째 시간단계에 한해서 앞서 설명한 완화 경계조건을 적용하면 이 non-zero term 들을 버릴 수 있을 것이다. 따라서 평면요소를 사용하고 시간단계 Δt 를 적어도 첫번째 시간단계에 한해서라도 조절하여 source-field singular element의 중심으로부터 발생되어 이동하는 파가 이 요소의 경계 밖으로 퍼지지 않는다면 응력텐서 H_{ijk}^1 는 0이 되어버리기 때문에 응력텐서의 특이상태는 고려할 필요가 없다.⁽¹⁰⁾

즉

$$H_{ijk}^1 \equiv 0 \quad (19)$$

3. 경계요소 프로그램의 흐름도

본 연구를 수행하기 위해 개발한 전산프로그램의 흐름도는 다음과 같다. 개발된 프로그램은 방대한 양의 기억용량(RAM)을 필요로 한다. 이러한 문제점을 해결하고 사용 컴퓨터(Sun Spark IPC)의 효율을 극대화하기 위하여 다음과 같이 3개의 단위 프로그램(module)로 나누어서 계산을 수행하였다. 3개의 단위프로그램은 다음과 같다.

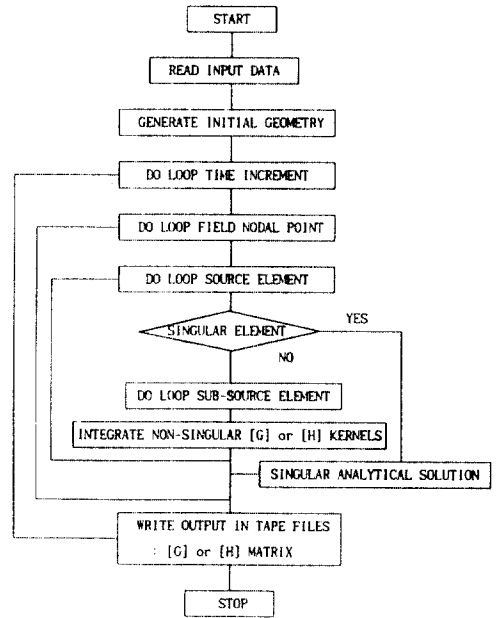


그림 5. [G] [H] 행렬의 흐름도

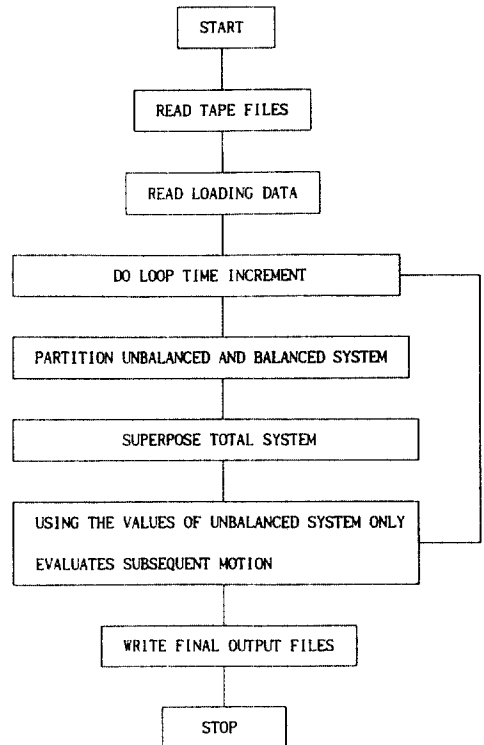


그림 6. 강제운동 응답 해석 프로그램의 흐름도

i), ii) 경계요소의 기본해인 [G], [H] 행렬을 구하는 단위프로그램

iii) 해석대상의 하중 및 구조체 특성에 따른 응답을 얻는 단위프로그램

그림 5는 i), ii)의 변위와 표면력(응력)에 관한 기본해를 얻기 위한 [G], [H] 행렬계산의 흐름도이며 그림 6은 응답을 얻는 단위프로그램의 흐름도이다.

4. 수치해석 및 검증

개발된 프로그램의 검증은 엄밀해와 비교하는 것이 이상적이나 현실적으로 불가능하기 때문에 이미 검증된 참고문헌 [3] [10] 및 범용 유한요소해석 프로그램인 GTSTRUDL과 비교하기로 한다. 유한 요소는 절점당 자유도가 3개(수직 1, 수평 2)인 solid element를 사용하였으며 동적 응답은 본 연구와 같이 직접적분법에 의해서 구하였고 모형화에 따른 차이점을 알아 보기 위하여 그림 17, 18과 같은 2개의 모형을 검토하였다. 경계요소를 적용한 참고문헌 [3] [10]은 모두 일정요소를 사용하였으나 참고문헌 [3]은 진동수영역에서 동적응답을 구한 것이며 참고문헌 [10]은 완화 경계조건을 적용하여 시간영역에서 동적응답을 구한 것으로 각기 차이가 있다. 참고문헌 [3] [10]과의 정밀한 비교를 하기 위해서는 거의 동일한 조건하에서의 수치해석을 필요로 하기 때문에 본 연구에서는 비완화 경계조건을 적용한 등매개 선형 4절점 사변형요소외에 일정요소를 사용하여 비교함으로써 완화 경계조건과 비완화 경계조건을 적용했을 때의 결과치의 차이 및 선형요소와 일정요소의 차이, 진동수영역과 시간영역에서 얻은 동적응답과의 차이 등을 규명할 수 있었다.

4.1 해석 및 검증모형

검증은 균등질이며 등방성인 선형 탄성 반무한 영역에서의 질량이 없는 강성 근입기초를 대상으로 한다. 기초의 제원은 가로 세로가 각각 1.524 m(60 in.), 깊이가 0.508 m(20 in.)이며 지반의 물성치는 탄성계수 $E=60.9 \times 10^6$ kpa(8.84×10^6 psi), 질량밀도

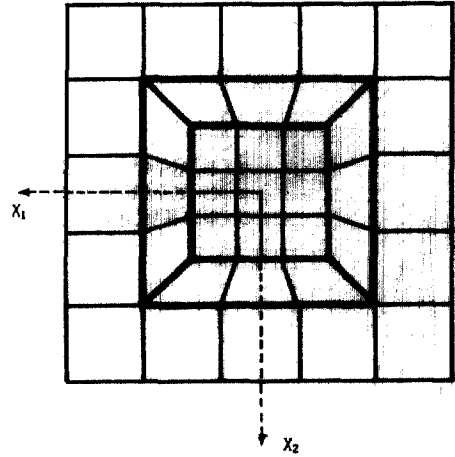


그림 7. 검증모형

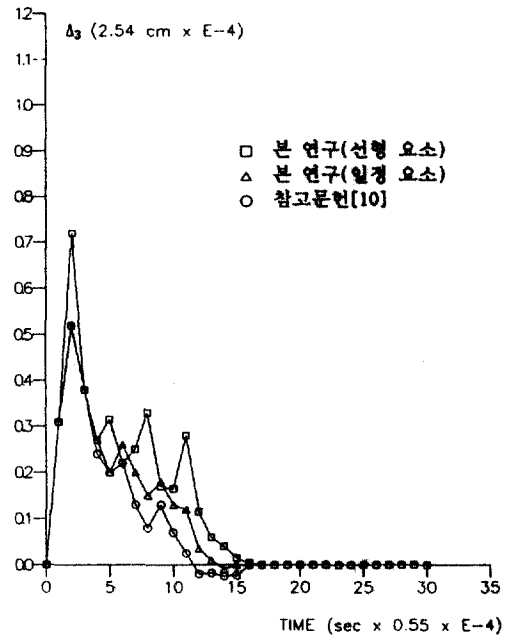


그림 8 수직 충격력에 대한 응답

$\rho=3037.818$ kg/m³(2.82×10^{-4} lb.sec²/in⁴), 포아손비 $\nu=0.3$ 이다. 해석 및 검증에 사용된 모형은 경계요소는 그림 7, 구조물과 지반으로 구성된 유한요소모형은 그림 17, 18과 같다. 그림 17은 전체 모형이 동일한 크기($0.254 \times 0.254 \times 0.254$ m)의 유한요소로 이루어져 있고, 그림 18은 구조물($0.254 \times 0.254 \times$

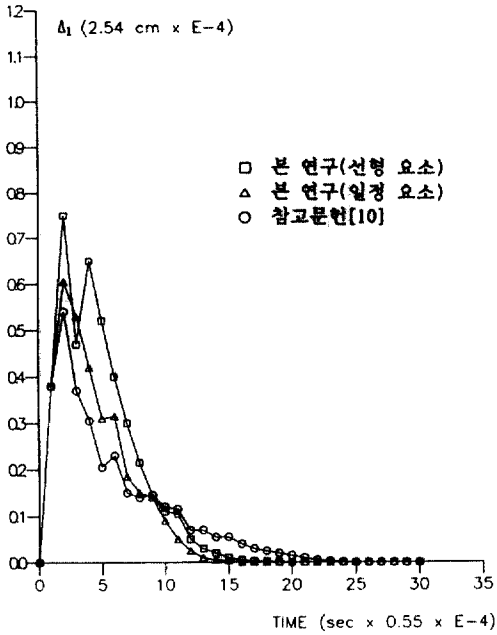


그림 9 수평 충격력에 대한 응답

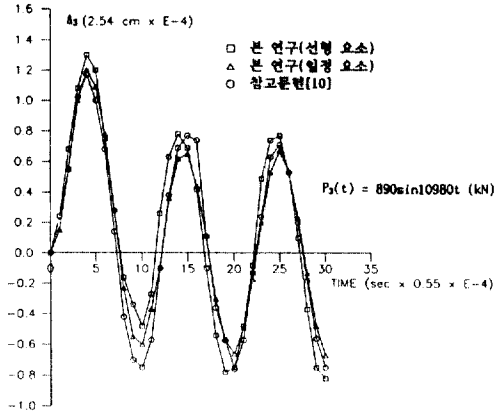


그림 11 수직 조화력에 대한 응답

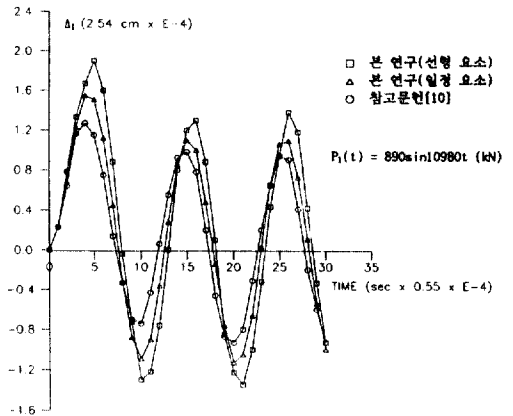


그림 12 수평 조화력에 대한 응답

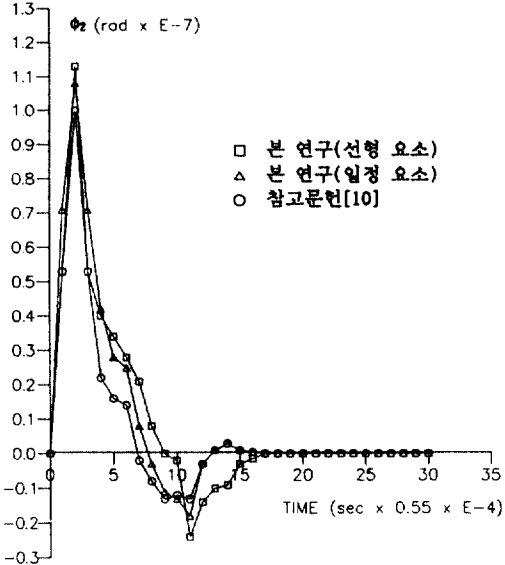


그림 10 동요 충격력에 대한 응답

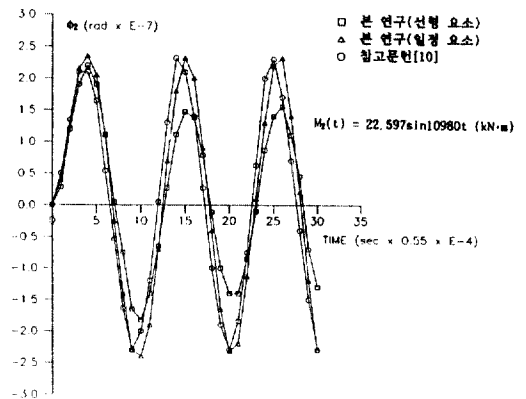


그림 13 동요 조화력에 대한 응답

0.254 m)과 지반(0.508×0.508×0.508 m)의 요소의 크기가 다르게 구성되어 있다.

본 연구에서 구조물은 강성체이며 질량은 무시하

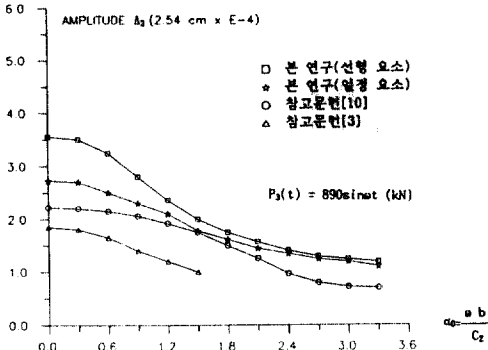


그림 14 무차원 진동수에 대한 수직력의 응답

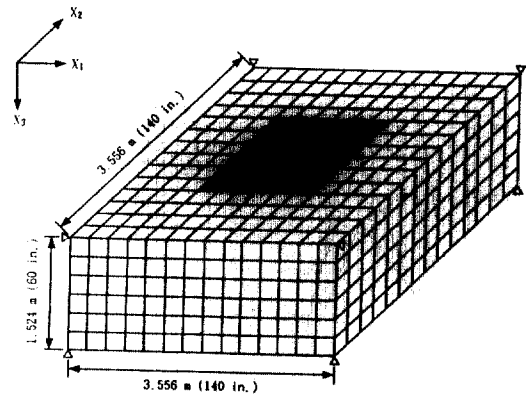


그림 17 유한요소 해석모형 I

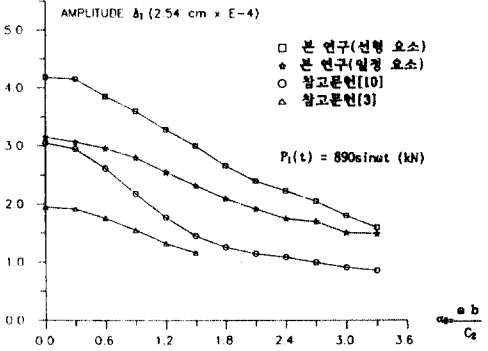


그림 15 무차원 진동수에 대한 수평력의 응답

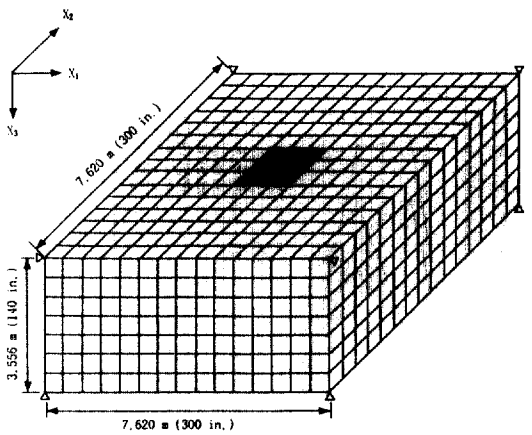


그림 18 유한요소 해석모형 II

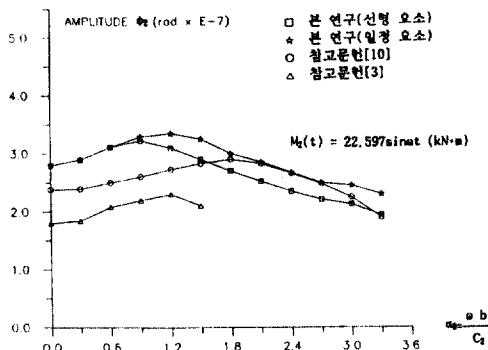


그림 16 무차원 진동수에 대한 동요력의 응답

는 것으로 가정했기 때문에 GTSTRUDL 해석모형에서의 구조물의 물성치로서, 탄성계수 E는 지반의 탄성계수의 10000배인 60.9×10^{10} kpa(8.34×10^{10} psi), 질량밀도 ρ 는 지반의 질량밀도의 1/10000배인

$\rho = 0.3037818 \text{ kg/m}^3 (2.82 \times 10^{-8} \text{ lb.sec}^2/\text{in}^4)$ 를 각각 취하였다. 유한요소 모형에서의 경계조건은 좌우측 모서리는 hinge, 나머지 측면부 및 저면은 roller, 상단면은 자유면으로 하였다. 하중은 강성기초의 저면 중심에 작용하는 집중하중으로서 첫번째 시간 단계에서만 작용하는 것으로 한다.

그림 8-13은 시간에 대한 하중함수에 의한 기초의 수직, 수평, 동요응답(rocking response)을 나타낸 것이며 그림 14, 15, 16은 진동수영역에서의 응답⁽³⁾과 시간영역에서의 응답⁽⁴⁾을 직접 비교하기 위하여 무차원 진동수 a_0 를 이용하여 각 진동수에 대한 최대진폭을 도식한 것이다.

$$a_0 = b \omega / c_2 \quad (20)$$

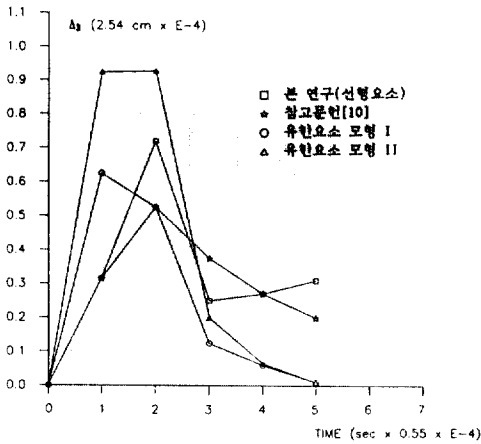


그림 19 수직 충격력에 대한 응답 비교

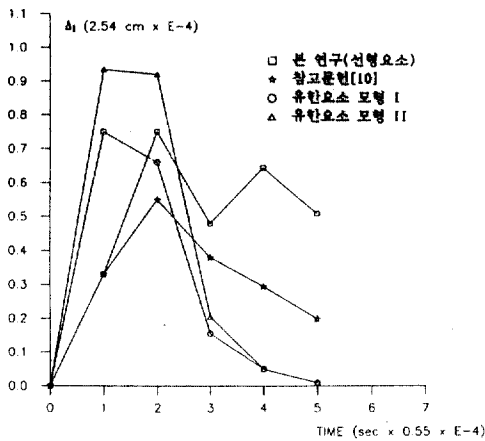


그림 20 수평 충격력에 대한 응답 비교

여기서 b 는 기초의 수평길이의 1/2이며 ω 는 회전진동수이다. 그림 8-16에서의 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 는 좌표축 중심에서의 x_1, x_2, x_3 방향 변위의 크기(amplitude)를 나타내며 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 는 좌표축 중심에서의 x_1, x_2, x_3 방향의 미소 강성체 회전의 크기를 나타낸다. 검증 모형에 작용하는 수직력, 수평력, 전도모멘트의 구형 impulse는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} P_1 = P_3 = 890 \quad (200) \\ M_2 = 22.597(200) \end{aligned} \right\} \text{첫번째 시간단계} \quad (21) \\
 & P_1, P_3, M_2 = 0 \quad \text{나머지 시간단계}
 \end{aligned}$$

여기서 P_1, P_3 의 단위는 kN(kips)이며 M_2 의 단위

는 kN-m(kip-in.)이다. 그림 19, 20은 경계요소와 유한요소의 수직, 수평 동적응답을 비교한 것이다. 유한요소는 경계면에서의 파의 반사등으로 인한 영향을 받기 때문에 인위적 경계로 인한 영향이 비교적 작은 초기 5개 시간단계에 대해서만 고려하기로 한다.

4.2 검증 및 해석모형에 대한 결과분석

대체적으로 볼 때 본 연구(선형요소, 일정요소)와 참고문헌의 전반적인 경향은 비슷하다. 그림 8의 수직 충격력(impulse force)에 대한 응답은 본 연구(선형요소, 일정요소)의 값이 개략적으로 일정한 범위로 크게 나타났으며 최대정점(peak point)은 참고문헌과 본 연구 모두 두번째 시간단계에서 일어났다. 두번째 정점은 참고문헌이 6번째 시간단계, 일정요소를 사용한 본 연구는 6번째 시간단계, 선형요소를 사용한 본 연구에서는 5번째 시간단계에서 각각 일어났다. 정점의 수는 참고문헌이 3개인데 반하여 선형요소를 사용한 본 연구에서는 4개로 나타났으며 각 정점에서의 값은 모두 참고문헌보다 크게 나타났다. 그러나 일정요소를 사용한 본 연구의 정점 수는 참고문헌과 동일한 3개이며 그 값은 같은 시간단계에서 약간 크게 나타났다. 이는 본 연구가 비완화 경계조건을 적용하였기 때문에 고려되는 에너지의 양이 많아져서 생기는 결과로 보이며 같은 경계조건을 적용한 본 연구의 값이 차이가 나는 것은 선형요소는 일정요소에 비해 상대적으로 유연하기 때문에 당연한 결과이다. 그림 9의 수평 충격력에 대한 응답의 경우에서도 본 연구의 값이 대체로 크게 나타났으며 최대 정점은 참고문헌과 본 연구 모두 두번째 시간단계에서 일어났다. 두번째 정점은 참고문헌이 6번째 시간단계, 일정요소를 사용한 본 연구는 6번째 시간단계, 선형요소를 사용한 본 연구에서는 4번째 시간단계에서 각각 일어났다. 그림 8, 9를 생각해 볼 때 충격력에 대한 각 정점은 일반적으로 선형요소가 일정요소보다 더 일찍 크게 나타나는 것을 알 수 있으며 이는 비교 요소의 특성으로 인한 결과로 생각된다. 그림 10의 동요 충격력에 대한 응답에서도 역시 본 연구의 값이 참고문헌보다 대체로 크게 나타나고 있다.

그림 11, 12, 13은 각각 수직, 수평, 동요 조화력에 대한 응답을 나타낸 것으로 개략적으로 본 연구와 참고문헌의 응답은 일치하고 있다. 여기서 공통적으로 발견할 수 있는 특징은 본 연구결과가 참고문헌보다 대체로 주기가 커진 것을 볼 수 있는데, 이는 참고문헌에서 사용한 요소가 일정요소이기 때문에 본 연구에서 사용한 선형요소보다 더 강성이 큰 것을 감안해 볼 때 타당한 결과로 보인다. 일반적으로 선형요소(flexible)는 일정요소(stiff)보다 큰 진폭을 가져야 되는데 본 연구에서 그러한 현상은 대체적으로 잘 나타나 있다. 그러나 그림 11, 12, 13의 조화력에 대한 응답에서 그림 8, 9, 10의 충격력에 대한 응답과 달리 선형요소보다 일정요소의 값이 크게 나타나는 경우도 있는 것은 특기할 만한 사항으로, 선형요소가 항상 일정요소보다 큰 진폭을 가지는 것은 아니라는 것을 의미하고 있다. 또 참고문헌이 수직, 수평 조화력에 대한 응답이 모두 첫번째 정점에서 최대값을 보이는 것과 달리 동요 조화력에 대한 응답을 나타내는 그림 13에서는 두번째 정점에서 최대값을 나타내고 있는데 이는 참고문헌의 완화 경계조건 적용으로 인한 차이로 생각된다.

여기서 특기할만한 사항으로 그림 8, 9, 10과 같은 천이상태(transient state)의 충격력 응답을 얻게 되면 convolution 접근방법을 이용하여 그림 11, 12, 13과 같은 조화력에 대한 정상상태(steady state)에서의 응답을 구할 수 있는데, 이는 충격력 응답을 영구적으로 저장하고 관련 하중함수들을 가중함수(weighting function)로 이용하여 적절하게 그러한 응답들을 중첩(superimpose) 함으로써 가능하게 될 수 있다. 이러한 방법을 이용한 본 연구의 해는, 관련된 어떠한 계산착오도 이전에 구해진 충격력 응답과 분리되기 때문에 다른 방법에서와 같이 오차가 누적되지 않아서 긴 시간(long time interval)에도 매우 안정적인 것으로 생각된다.

그림 14, 15, 16의 무차원 진동수에 대한 수직, 수평, 동요력의 응답은 선형요소를 사용한 본 연구의 값이 참고문헌 및 일정요소를 사용한 본 연구의 값보다 대체적으로 크게 나타나 있으며 시간영역에서 얻은 동적응답은 진동수영역에서 얻어진 동적응답보다 더 큰 값을 보이고 있다. 진동수영역에서 일정요소를 사용한 참고문헌 [3], 비완화 경계조건

하의 일정요소를 사용한 본 연구, 완화 경계조건하의 일정요소를 사용한 참고문헌 [10]을 비교하여 본 결과, 그림 14, 15, 16 모두에서 비완화 경계조건에서 일정요소를 사용한 본 연구의 값이 진동수영역의 참고문헌 [3]과 거의 동일한 경향을 보이고 있고 일정하게 큰 값을 유지하고 있으므로 같은 수치조건하에서 시간영역에서의 동적응답은 진동수영역에서의 동적응답보다 크게 나타난다고 할 수 있을 것이며 비완화 경계조건을 적용한 결과치는 완화 경계조건을 적용한 결과치보다 더 큰 값을 가진다고 할 수 있다. 또 그림 14, 15의 무차원 진동수에 대한 수직, 수평력의 응답은 모두 고진동수(high frequency)일 수록 진폭은 작아지며 저진동수(low frequency)일 수록 진폭은 커지는 것을 볼 수 있는데 이는 지반의 파동전달 문제에 있어서 저진동수가 critical한 것임을 보여 주는 현상이며 그림 16에서 중간 정도의 진동수에서 임계값을 보이는 것은 동요운동의 한 특징이라 할 수 있다.

그림 19, 20은 초기 5개 시간단계에 대해서 선형요소를 사용한 본 연구, 참고문헌 [10], 유한요소모형(그림 17, 18)에 대한 수직, 수평응답의 결과치를 도식한 것이다. 그림에서 볼 때 본 연구의 최대값과 유한요소의 최대값은 비슷하나 경계요소를 사용한 본 연구와 참고문헌 [10] 모두 두번째 시간단계에서 최대값을 보이는 반면 유한요소에서는 첫번째 시간단계에서 최대값을 나타낸 이후 급격한 감소를 보이고 있다. 이는 주로 감쇠의 차이로 인한 것으로 보여진다. 즉 경계요소는 파의 진행거리에 따른 감쇠(attenuation, or geometrical damping)가 기본해에 고려되어 있는 것에 비해 유한요소는 물성에 따른 감쇠(material damping)가 수치해석상에서 고려되기 때문에 이에 따른 차이 때문인 것으로 판단된다. 그림 17의 전체모형이 동일한 크기의 유한요소로 이루어진 것과 그림 18의 구조물과 지반의 적용 유한요소의 크기가 다른 것으로 이루어진 모형을 비교해 볼 때 전체요소의 크기가 동일하지 않은 모형을 사용한 것이 더 큰 값을 갖는 것이 확인되었으며 최대값을 비교해 볼 때 균일한 크기의 요소를 사용한 모형의 값이 본 연구의 결과치와 더 비슷한 것을 알 수 있다. 유한요소에서 균일하지 않은 요소를 사용한 모형의 값이 더 크게 나타나는 것은 임의의 절점으로부터 파가 진행되어 나갈 때 크기가

다른 요소를 만나면 파가 전부 진행하지 못하고 일부 파의 반사로 인한 가상 에너지(supurious energy)가 생성되기 때문이며 이를 방지하기 위해서는 균일한 크기의 요소를 사용하거나 적절한 천이요소(transition element)의 사용이 필요하다. 본 연구와 유한 요소를 비교해 본 결과, 유한요소에서는 접근방법의 차이로 인하여 실제상황에서 일어날 수 없는 비인과관계(non-causality)가 발생하는 것이 확인되었다. 즉 최초 단위시간단계 동안 임의점에 단위충격력을 가했을 때 하중 작용점으로부터 멀리 떨어진 지점에서는 소정의 시간이 흐르기 전까지는 작용 충격력으로 인한 응답이 존재할 수 없는 데도 그로 인한 응답이 상대적으로 작은 값이지만 발생하는 것이 확인되었다. 이러한 요인 및 인위적 경계에서의 파의 반사 등으로 인한 영향으로 인하여 유한요소는 경계요소보다 더 큰 에너지를 가진다고 할 수 있다.

이상과 같이 살펴볼 때 본 연구의 결과는 타당하며 보다 더 실제에 근접해 있기 때문에 정확하며 효율적이라 할 수 있을 것이다.

5. 결 론

본 연구에서는 임의 형상의 기초구조물의 거동을 효율적으로 예측할 수 있는 동적 해석 프로그램을 개발하였으며 검증모형을 통해 연구의 타당성을 입증하였다. 검증모형 해석을 통해 지반의 파동전달 문제에 있어서 구조동역학문제와 마찬가지로 일정 요소보다는 선형요소가 대체적으로 더 큰 진폭을 가지는 것이 확인되었으며 고차 형상함수를 사용할 수록 응답은 더 크게 나타날 것으로 예상된다. 또한 시간영역의 응답은 진동수영역의 응답보다 더 큰 값을 가지며 비완화 경계조건을 적용한 경계요소는 완화 경계조건을 적용한 경계요소보다 더 큰 에너지를 가지는 것이 확인되었다. 그러나 이러한 것들은 사용 컴퓨터의 수치절단오차(numerical truncation error) 및 요소(또는 부요소) 수에 따라서 어느 정도 변화를 보이고 있으며 해석대상의 중요도에 따라서 어느 것이 더 경제적인 수치해석방법이냐는 상황에 따라 달라질 수 있으므로, 정밀을 요구하는 계산과 그렇지 않은 계산을 구분하여 거기에 맞는 수치기법을 선택하는 것이 필요하다. 본 연구의 일정요소를

사용했을 경우, 본 연구의 선형요소를 사용한 경우의 (1/30~1/40) 정도의 시간으로 전 계산이 가능하고 얻어진 결과 또한 아주 큰 차이를 보이지는 않기 때문에 개략적 계산인 경우에는 일정요소를 쓰는 것이 경제적이다. 유한요소와 비교한 결과, 유한요소로써 파동전달 문제를 해석할 때 천이요소를 사용하지 않을 경우, 가급적 균일한 크기의 요소로 모형화하는 것이 정확도를 향상시키는데 도움이 될 것으로 판단된다. 본 연구에서는 강성기초만을 대상으로 하였기 때문에 고진동수의 진동을 받을 경우에 취약하게 되는 유연한 기초구조물은 고려할 수 없다. 따라서 구조물과 지반의 영향을 효율적으로 분석할 수 있는 유한요소-경계요소 조합에 대한 연구가 요구된다. 본 연구는 장차 본격적인 지하공간 개발시대에 대비한 예비적 연구로서 유한요소-경계요소 조합에 대한 연구는 현재 진행중에 있다.

참 고 문 헌

1. Cruse, T.A. and Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", *Int. J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 22, 1968, pp. 244-259.
2. Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., *Elastodynamics*, Vol. 2, Academic Press, New York, 1975.
3. Dominguez, J., "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", Publ. No. R78-20, Dept. of Civil Engr., MIT, Cambridge, MA, 1978.
4. Apsel, R.J., "Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary Value Problems", Ph. D. Thesis, Univ. of California, San Diego, California, 1979.
5. Ottenstreuer, M., "Frequency Dependent Dynamic Response Footings", in *Proc. Soil Dyn. and Earthquake Engr., Conf.*, Southampton, England, July, 1982.
6. Ottenstreuer, M., and Schmid, G., "Boundary Elements Applied to Soil-Foundation Interaction", in *Proc. 3rd Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods*, Irvine, California, July 1981.
7. Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minster, J.B., "A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics I", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 68,

- 1978, pp. 1331-1357.
8. Mansur, W.J., "A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems using the Boundary Element Method", Ph. D. Thesis, Southampton University, 1983.
 9. Manolis, G.D., Ahmad, S. and Banerjee, P.K., "Boundary Element Method Implementation for Three-Dimensional Transient Elastodynamics", *Developments in Boundary Element Methods-4*, P. K. Banerjee and J.O. Watson, Eds., 1986, pp. 29-65.
 10. Karabalis, D.L. and Beskos, D.E., "Dynamic Response of 3-D Embedded Foundations by the Boundary Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engr.*, Vol. 56, 1986, pp. 91-119.
 11. Spyarakos, C.C. and Antes, H., "Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics : A Comparative Study", *Computers and Structures*, Vol. 24, No. 4, 1986, pp. 529-535.
 12. Beskos, D.E. and Spyarakos, C.C., "Dynamic Response of Strip Foundations by the Time Domain BEM-FEM Method", Final Report Part B: NSF Earthquake Hazards Mitigation Program, 1984.
 13. Dominguez, J., "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves", Publ. No. R78-24, Dept. of Civil Engr., MIT, Cambridge, MA, 1978.
 14. Karabalis, D.L. and Beskos, D.E., "Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method", *Earth. Engr. and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, pp. 73-93.
 15. Banerjee, P.K. and Watson, J.O., *Developments in Boundary Element Methods-4*, Elsevier Applied Science Publishers, 1986, pp. 29-65.
 16. Manolis, G.D. and Beskos, D.E., *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin Hyman Ltd., 1988, pp. 110-147.
 17. Ohmi, M. and Tosaka, N., "The Dynamic Response of Two Rigid Surface Foundations by BEM", *Boundary Element VIII*, Vol. 1, M. Tanaka and C.A. Brebbia, Eds., Springer-Verlag, 1986, pp. 215-226.
 18. Ahmad, S. and Banerjee, P.K., "Time domain Transient Elastodynamic Analysis of 3-D Solids by BEM", *Int. J. for Num. Meth. in Engr.*, Vol. 26, 1988, pp. 1709-1728.

(接受：1993. 7. 9)