

非對稱 薄壁보 要素를 利用한 圓形 아치의 橫挫屈 解析

Lateral-Torsional Buckling Analysis of the Circular Arches Using Unsymmetric Thin-Walled Beam Elements

金 文 榮*
Kim, Moon Young

Abstract

For the lateral-torsional buckling analysis of the thin-walled space frame and circular arch with the unsymmetric cross section, the tangent stiffness matrices are derived by introducing Vlasov's assumption for the thin-walled beam and using the principle of virtual displacement. In the cases of the unrestrained torsion and the restrained torsion, the elastic and geometric stiffness matrices corresponding to semitangential rotation and semitangential moment are evaluated by using the Hermitian polynomials as the shape function. In order to illustrate the accuracy and convergence characteristics of the derived formulations, numerical examples for the lateral-torsional buckling analysis of the hinged circular arch under pure bending and uniform compression are presented and compared with the analytic solutions of references.

요 지

非對稱斷面을 갖는 薄壁空間뼈대와 圓形아치의 휨-비틀 挫屈解析을 수행하기 위하여, 假想일의 原理를 이용한 空間뼈대要素의 接線剛도매트릭스가 誘導된다. 兩端 拘束된 비틀을 無視하는 경우와 拘束된 비틀을 考慮하는 경우 각각에 대하여 semitangential rotation and moment에 對應하는 薄壁空間 뼈대要素의 彈性 및 幾何的인 剛도매트릭스를 산정한다. 이 때, 휨을 받는 平面보의 처짐함수를 空間 뼈대要素의 軸方向 및 橫方向 처짐과 비틀회전각에 대한 形狀函數로 사용한다. 순수휨과 균일한 압 축력을 받는 圓形아치의 橫挫屈問題를 解析하여 本 研究에 의한 解析結果와 文獻의 嚴密解에 의한 結果들을 比較, 分析하여 本 研究에서 제시한 理論의 正當性을 立證한다.

1. 序 論

有限要素法을 사용하여 薄壁空間뼈대 構造의 安定性 및 大變形解析을 수행하는 경우에 幾何學的인 剛도매트릭스의 계산은 필수적이다. 薄壁空間보의 挫屈解析 및 幾何的 非線形解析을 수행한 연구들은

文獻^{1,2)}에서 찾아 볼 수 있다. 空間보로 부터 空間 뼈대 構造에 대한 것으로 확장시킨 연구논문에서 Argyris^{3,4)}는 有限要素法을 이용한 挫掘 및 幾何的 非線形解析에 대한 이제까지 연구들이 범하고 있는 근본적인 오류를 지적하였다. 이는 有限한 回轉角을 취급하거나, 幾何的인 剛도매트릭스를 유도할 때 방향이 다른 고정된 軸들에 대한 回轉角들이 Non-

* 정회원 · 成均館大學校 工科大學 土木工學科 助敎授

commutativity의 성질을 나타내기 때문이다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 Argyris는 처음으로 Semitangential rotation을 도입하여 空間 뼈대 構造의 幾何的인 非線形解析을 수행하였다. 固定된 軸들에 대한 回轉角과는 대조적으로 Semitangential rotation은 다른 방향의 축들에 대하여 물체를 회전시켰을 때 최종위치가 동일하다는 매우 중요한 성질을 가질 뿐만 아니라 Semitangential moment와 力學的인 對應性을 갖는다.

圓形아아치의 橫挫屈舉動을 조사한 Timoshenko⁽⁶⁾와 Vlasov⁽⁶⁾의 古典的인 研究 이후, 아아치등과 같은 曲線 뼈대 構造의 橫挫屈舉動에 대한 研究⁽⁷⁻¹⁰⁾가 최근에 다시 상당한 관심을 모우고 있다. 이는 여러 研究者에 의해서 제시된 아아치구조의 횡좌굴하중에 대한 嚴密解가 상당한 차이를 보이고 있을 뿐만 아니라 有限要素法에 의한 數值解도 만족스러운 결과를 주지 못하고 있기 때문이다.

本 論文에서는 假想일의 原理를 이용하여 初期應力을 받는 連續體의 平衡方程式으로부터, 拘束된 비틀효과 및 非對稱斷面의 영향을 고려한 薄壁斷面의 變位場을 도입하여 空間 뼈대 構造에 대한 平衡方程式을 얻는다. 이때 Semitangential rotation에 대응하는 斷面回轉角들의 2차항을 고려하여 휨모멘트 및 비틀모멘트의 포텐셜은 모두 Semitangential moment에 대응하는 포텐셜로 표시되도록 한다. 이제 空間 뼈대 構造를 有限要素로 나누어 要素의 變位場을 要素變位벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 平衡方程式에 대입함으로써, 圖心 및 剪斷中心의 영향을 嚴密히 고려한 彈性 및 幾何的인 剛度 매트릭스를 유도하고 그 결과들을 표로 제시한다. 이때 軸方向 變位에 대해서는 1차, 橫方向 變位들에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 사용하고, 회전각에 대해서는 部材 兩端의 拘束된 비틀을 고려하는 경우와 兩端의 비틀을 무시하는 경우에 대응하여 3차 및 1차 Hermitian 다항식을 도입한다. 이렇게 얻은 2절점 薄壁直線 뼈대 要素에 대한 剛度 매트릭스는 Semitangential rotation과 Semitangential moment에 대응하는 幾何的인 剛度 매트릭스가 된다. 圓形아아치의 橫挫屈解析을 수행하고, 다른 文獻의 解析結果들과 比較, 檢討하므로써 本 研究에서 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

2. 初期應力을 받는 薄壁空間 뼈대의 平衡方程式

初期應力을 받는 3차원 연속체의 평형방정식은 假想일의 原理를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V (C_{ijrs} \cdot e_{rs} \cdot \delta e_{ij} + {}^0\tau_{ij} \cdot \delta \eta_{ij} + {}^0\tau_{ij} \cdot \delta e_{ij}) dV = \delta R \quad (1)$$

$$e_{ij} = 1/2 \cdot (U_{ij} + U_{ji}), \quad \eta_{ij} = 1/2 \cdot U_{k,i} \cdot U_{k,j}$$

$$\underline{e}_{ij} = 1/2 \cdot (\underline{U}_{ij} + \underline{U}_{ji}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

여기서, C_{ijrs} 는 Elasticity Tensor, e_{ij} 와 η_{ij} 는 Green-Lagrange Strain의 선형항과 비선형항, 그리고 ${}^0\tau_{ij}$ 는 초기응력을 나타낸다. U_i 및 \underline{U}_i 는 變位成分의 선형항 및 2차항, δR 은 外力이 하는 假想 일을 표시한 것이다. 그리고 \underline{e}_{ij} 는 變位成分의 2차항에 의한 변형도의 선형항을 의미한다. 식 (1)의 첫번째 항은 彈性剛度 매트릭스, 두번째 및 세번째 항은 幾何的인 剛度 매트릭스를 산정하는데 사용된다. 또한 ()_i는 괄호를 x_i 로 편미분한 것을 나타낸다.

Fig. 1은 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3)에서 비대칭 단면을 갖는 박벽공간 뼈대의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것이다. 여기서 x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 단면의 주축, 0는 전단중심축을 각각 표시하며, U_x, U_y, U_z 는 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동 변위(Rigid body translation), $\theta, -U'_z, U'_y$ 는 각각 x_2, x_3 축 및 전단중심축에 대한 강체회전 변위(Rigid body rotation)을 나타낸다. 여기서 (')는 x_1 에 관한 미분을 의미한다.

박벽 단면에 대한 Vlasov의 가정을 도입하고, 회전 변위를 Argyris의 Semitangential rotation⁽³⁾으로

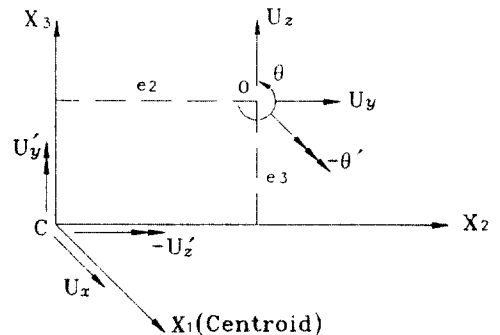


Fig 1. Notation for displacement

가정하면 박벽공간보의 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 + \underline{U}_1 \\ U_2 + \underline{U}_2 \\ U_3 + \underline{U}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_x - \theta' \cdot \phi \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -U_y' - U_z' \\ U_y' & 0 & -\theta \\ U_z' & \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -U_y' - U_z' \\ U_y' & 0 & -\theta \\ U_z' & \theta & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (2a) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} U_1 &= U_x - x_2 \cdot U_y' - x_3 \cdot U_z' - \theta' \cdot \phi \\ U_2 &= U_y - \theta \cdot (x_3 - e_3) \\ U_3 &= U_z + \theta \cdot (x_2 - e_2) \\ U_1 &= 1/2 \cdot (-\theta \cdot U_z' \cdot x_2 + \theta \cdot U_y' \cdot x_3) \\ U_2 &= 1/2 \cdot [-(U_y'^2 + \theta^2) \cdot x_2 - U_y' \cdot U_z' \cdot x_3 + \theta^2 \cdot e_2] \\ U_3 &= 1/2 \cdot [-U_y' \cdot U_z' \cdot x_2 - (U_z'^2 + \theta^2) \cdot x_2 + \theta^2 \cdot e_3] \end{aligned} \quad (2b)$$

식 (2)에서 $\phi(x_1, x_2)$ 는 뒹함수 (Warping function)를 나타내며, 밀출친 항들은 Semitangential rotation에 대응하는 변위파라미터의 2차항이다.

초기응력으로 인한 断面力들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} {}^0F_1 &= \iint {}^0\tau_{11} dA, \quad {}^0F_2 = \iint {}^0\tau_{12} dA, \quad {}^0F_3 = \iint {}^0\tau_{13} dA \\ {}^0M_1 &= \iint (x_2 \cdot {}^0\tau_{13} - x_3 \cdot {}^0\tau_{12}) dA \\ {}^0M_2 &= \iint x_3 \cdot {}^0\tau_{11} dA, \quad {}^0M_3 = -\iint x_2 \cdot {}^0\tau_{11} dA \\ {}^0M_R &= \iint ({}^0\tau_{12} \cdot \phi_2 + {}^0\tau_{13} \cdot \phi_3) dA, \quad {}^0M_w = \iint {}^0\tau_{11} \cdot \phi dA \\ {}^0M_p &= \iint {}^0\tau_{11} \cdot [(x_2 - e_2)^2 + (x_3 - e_3)^2] dA \\ &= \beta_1 \cdot {}^0F_1 + \beta_2 \cdot {}^0M_2 + \beta_3 \cdot {}^0M_3 + \beta_w \cdot {}^0M_w \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_w$ 에 대한 정의식은 문헌(12)를 참조할 수 있다. 0F_1 은 軸方向力, ${}^0F_2, {}^0F_3$ 는 剪斷力, ${}^0M_2, {}^0M_3$ 는 휨모멘트 그리고 0M_1 은 비틀모멘트, 0M_w 는 Bimoment, 0M_R 은 Restrained torsion을 나타낸다. 拘束된 뒹을 무시하는 경우에 0M_w 와 0M_R 는 0이 된다. 이제 식 (1)에 식 (2)을 대입하고 단면에

대하여 적분할 때 단면력에 대한 정의 식 (3)들을 고려하면 아래와 같이 연속체에 대한 평형방정식은 박벽공간보대에 대한 평형방정식으로 바뀌게 된다.

1) 식 (1)의 첫째항은 선형탄성에너지를 변분한 것이며 계산결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1 &= \int_0^L (EA \cdot U_x' \delta U_x' + EI_3 \cdot U_y'' \delta U_y'' + EI_2 \cdot U_z'' \delta U_z'' \\ &+ EI_w \cdot \theta'' \delta \theta'' + GJ \cdot \theta' \delta \theta') dx_1 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 EA, EI₂, EI₃, GJ, EI_w는 각각 축방향 강성, x₂ 및 x₃ 축방향의 휨강성, 비틀강성 그리고 뒹강성 (Warping rigidity)을 의미한다.

2) 식 (1)의 두번째 및 세번째항은 初期應力에 대한 포텐셜에너지를 변분한 것이며 단면에 대하여 적분한 계산결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \delta\Pi_2 &= \int_0^L [{}^0F_1 \cdot \delta(U_y'^2 + U_z'^2 - 2e_2 \cdot U_z' \theta' + 2e_3 \cdot U_y' \theta') \\ &+ {}^0M_3 \cdot \delta(U_z' \theta - U_z' \theta') + {}^0M_2 \cdot \delta(U_y' \theta - U_y' \theta') \\ &+ {}^0M_p \cdot \delta(\theta'^2) + {}^0F_2 \cdot \delta(U_z' \theta) - {}^0F_3 \cdot \delta(U_y' \theta) \\ &+ {}^0M_1 \cdot \delta(U_z' U_y'' - U_y' U_z'')] dx_1 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 축방향변위와 연계된(coupled) 항들과 고차항은 무시하였다.

3) 식 (1)의 마지막 항은 아래와 같이 부재양단의 재단력으로 인한 假想일을 나타낸다.

$$\delta R = F_e^T \cdot \delta U_e \quad (6)$$

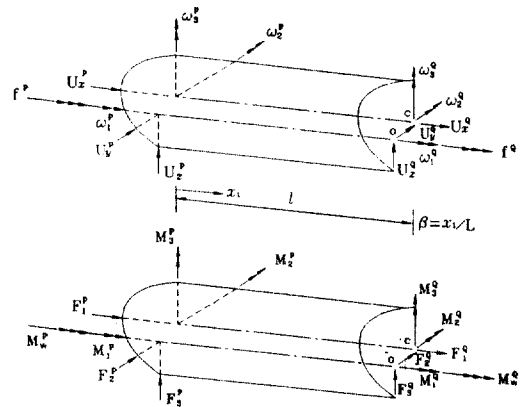


Fig. 2. Member displacement and member force vector for the thin-walled space frame element

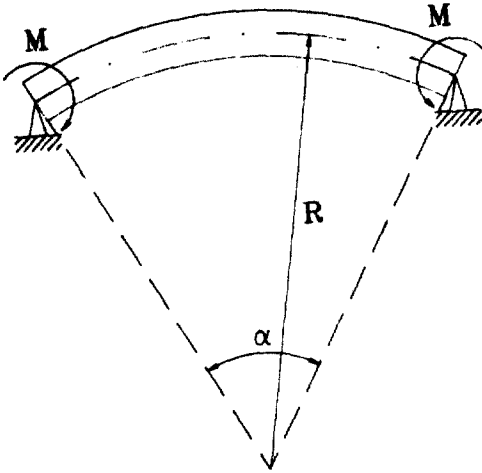


Fig. 3 The hinged circular arch under positive bending moment

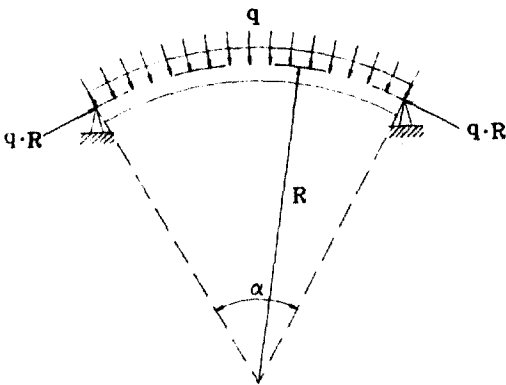


Fig. 4 The radially loaded, hinged circular arch

4. 兩端 힌지인 圓形아아치의 橫挫屈荷重에 대한 嚴密解

본 장에서는 원형아아치의 횡-비틀좌굴거동을 생각한다. 여러 연구자들이 이 문제에 대한 엄밀해와 유한요소해석에 의한 수치해를 제시하였지만 아직 명확한 결론에 도달하지 못한 상태이다. 문헌의 결과들과 본 연구에 의한 결과를 비교·분석하기 위하여, 4.1절에서는 순수 휨을 받는 원형아아치의 좌굴거동(Fig. 3), 4.2절에서는 균일한 압축력을 받는 원형아아치의 좌굴거동(Fig. 4)에 대한 문헌⁽⁵⁻⁹⁾의 嚴密解를 제시한다.

4.1 휨모멘트에 의한 아아치의 面外 橫挫屈解析
순수 휨을 받는 원형아아치의 횡-비틀좌굴에 대한 임계모멘트를 산정하는 식들은 다음과 같다.(Fig. 3 참조)

$$A_1 \cdot M_{cr}^2 + A_2 \cdot M_{cr} + A_3 = 0 \quad (12)$$

여기서, $\lambda = n\pi/L$, $\gamma = \lambda^2 - (1/R)^2$

1) Timoshenko의 해:

$$A_1 = 1.$$

$$A_2 = -(EI_y + GJ)/R \quad (13)$$

$$A_3 = -EI_y \cdot GJ \cdot \gamma$$

2) Vlasov의 해:

$$A_1 = 1.$$

$$A_2 = -EI_y/R - (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ)/R - 2\beta_2 \cdot \lambda^2 \cdot EI_y \quad (14)$$

$$A_3 = -EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \gamma$$

3) Yoo의 해:

$$A_1 = -\lambda^4$$

$$A_2 = 2(\lambda^2 \cdot EI_w + GJ)\lambda^2 \cdot \gamma/R \quad (15)$$

$$A_3 = EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \lambda^2 \cdot \gamma^2$$

4) Yang and Kuo의 해:

$$A_1 = -\lambda^2 \cdot \gamma \cdot [1 - r^2/R^2]$$

$$A_2 = \lambda^2 \cdot \gamma \cdot [EI_y + GJ - EI_w \cdot \gamma + r^2(EI_w/R^2 + EI_y \cdot \gamma)]/R \quad (16)$$

$$A_3 = \lambda^2 \cdot \gamma^2 \cdot [EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) + GJ \cdot EI_w/R^2]$$

5) Trahair and Papangelis의 해:

$$A_1 = -1.$$

$$A_2 = [\lambda^2 \cdot EI_y + (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ)/R^2] \cdot \{\beta_2 + 1/(R \cdot \lambda^2)\} - 2(EI_y + \lambda^2 \cdot EI_w + GJ)/R \quad (17)$$

$$A_3 = [\lambda^2 \cdot EI_y + (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ)/R^2] \cdot [EI_y/(R \cdot \lambda^2) + \lambda^2 \cdot EI_w + GJ] - (EI_y + \lambda^2 \cdot EI_w + GJ)^2/R^2$$

4.2 均一한 壓縮力을 받는 아아치의 面外 橫挫屈解析

균일한 압축력을 받는 원형아아치의 횡-비틀좌굴에 대한 임계하중을 산정하는 식들은 다음과 같다.(Fig. 4 참조)

$$B_1 \cdot (q_{cr} \cdot R)^2 + B_2 \cdot (q_{cr} \cdot R) + B_3 = 0 \quad (18)$$

여기서, $\lambda = n\pi/L$, $\gamma = \lambda^2 - (1/R)^2$

1) Timoshenko의 해:

$$q_{cr} \cdot R = EI_y \cdot GJ \cdot \gamma^2 / [\lambda^2 \cdot GJ + EI_y/R^2] \quad (19)$$

2) Vlasov의 해:

$$B_1 = 1.$$

$$B_2 = -\lambda^2 \cdot EI_y - (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) / R^2 \quad (20)$$

$$B_3 = EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \gamma / R^2$$

3) Yoo의 해:

$$B_1 = \gamma \cdot [\lambda^4 \cdot r^2 \cdot (1 + r^2 / R^2) - (0.5 / R + r^2 \cdot \lambda^2 / R)^2]$$

$$B_2 = \gamma \cdot [(\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \lambda^2 \cdot \gamma + EI_y \cdot \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \gamma^2] \quad (21)$$

$$B_3 = EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \lambda^2 \cdot \gamma^3$$

4) Yang and Kuo의 해:

$$B_1 = r^2 \cdot \lambda^4$$

$$B_2 = \lambda^2 \cdot (EI_w \cdot \gamma^2 + EI_y / R^2 + GJ \cdot \lambda^2) + (r \cdot \lambda \cdot \gamma)^2 \cdot (EI_w / R^2 + EI_y) \quad (22)$$

$$B_3 = \lambda^2 \cdot \gamma^2 \cdot [EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) + GJ \cdot EI_w / R^2]$$

5) Trahair and Papangelis의 해:

$$q_{cr} \cdot R = EI_y \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) \cdot \gamma^2 / [\lambda^2 \cdot (\lambda^2 \cdot EI_w + GJ) + EI_y / R^2] \quad (23)$$

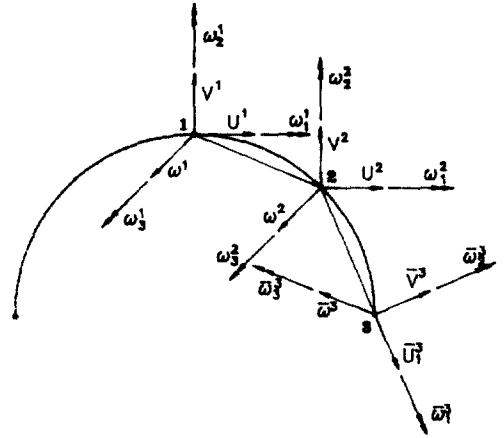


Fig. 5 Finite element modelling of the hinged circular arch

5. 數値解析例

본 연구에서 제시된 이론을 적용하여 이전의 박벽공간뼈대구조의 좌굴하중을 구하기 위한 유한요소해석 프로그램 [SEIG]를 수정·보완하였다. 요소당 절점수는 2개이므로 사용된 부재강도매트릭스의 크기는 절점당 자유도수가 7개인 경우(구속된 비틀 고려) 14×14 , 6개(구속된 비틀 무시)인 경우 12×12 로 된다. 본 장에서는 원형아아치의 횡-비틀좌굴 문제를 해석하여, 본 연구의 결과와 문헌의 엄밀해와 비교·검토한다.

5.1 兩端 힌지인 圓形아아치의 橫-비틀 挫屈解析

양단이 힌지로 지지된 원형 아아치가 휨모멘트에 의해서 좌굴을 일으키는 문제를 생각한다(Fig. 3 참조). 이 때 구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 아아치 구조의 절반만을 직선유한요소로 분할하여 해석한다. Fig. 5는 양단의 모멘트에 의해서 좌굴을 일으키는 원형 아아치구조의 절반을 두개의 유한요소로 모델링한 결과를 나타낸 것이다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= R \cdot \alpha = 100 \text{ cm}, & A &= 1.0 \text{ cm}^2, \\ I_y &= 0.125 \text{ cm}^4, & I_z &= 1.0 \text{ cm}^4, & I_w &= 0.0 \text{ cm}^4, \\ E &= 10^4 \text{ N/cm}^2, & GJ &= E/2, & J &= 0.01 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Table 1은 아아치의 절반을 직선요소로 모델링하고, 아아치의 사이각 α 가 180° 인 경우에 유한요소의 갯수를 증가시킴에 따라 절점당 6개 및 7개의 자유도를 갖는 강도매트릭스를 사용하여 해석한 결과를 나타낸 것이다. 이 때 방법 2는 부재좌표계에서 강도매트릭스를 산정하여 전체좌표계로 좌표변환하고 직접강도법에 의하여 구조물 강도매트릭스를 산정하고 아래와 같이 대칭형태의 좌굴모우드를 가정한 경계조건을 적용하여 해석한 것이다.

$$U^1 = 0, \quad V^1 = 0, \quad W^1 \neq 0, \quad (24a)$$

$$\omega_1^1 \neq 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad f^1 = 0$$

$$U^3 = 0, \quad V^3 = 0, \quad W^3 = 0, \quad (24b)$$

$$\omega_1^3 \neq 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^3 \neq 0, \quad f^3 \neq 0$$

방법 1은 힌지단을 포함하는 유한요소의 강도매트릭스를 전체좌표계로 변환시킬 때 양쪽 힌지단의 절점변위는 전체좌표계로 변환시키지 않고 부재좌표계에서 강도매트릭스를 산정한다. 이 때 1번 절점의 경계조건은 식 (24a)와 동일하고 3번 절점의 경계조건은 식 (25)를 적용한다.

$$\bar{U}^3 = 0, \quad \bar{V}^3 = 0, \quad \bar{W}^3 = 0, \quad (25)$$

$$\bar{\omega}_1^3 = 0, \quad \bar{\omega}_2^3 \neq 0, \quad \bar{\omega}_3^3 \neq 0, \quad \bar{f}^3 \neq 0$$

그 결과 Table 1에서 보는 바와 같이 요소수의 증가에 따라 힌지단의 경계조건을 보다 정확히 구

Table 1. Critical moment of the circular arch in pure bending

Number of element	Thin-walled beam element with 6 degree of freedom		Thin-walled beam element with 7 degree of freedom	
	Method 1	Method 2	Method 1	Method 2
2	+48.922358	+42.505442	+35.556693	+28.558481
	-0.688867	-3.770803	-0.717541	-3.950991
5	+42.008055	+39.759413	+41.119593	+38.406591
	-0.290141	-4.067603	-0.292357	-4.131928
10	+41.125721	+39.391339	+40.947268	+39.245415
	-0.147732	-4.104337	-0.147978	-4.124643
20	+40.910279	+39.300207	+40.868286	+39.282369
	-0.074641	-4.113302	-0.074678	-4.118896
30	+40.870951	+39.283370	+40.841970	+39.272824
	-0.049947	-4.114953	-0.049959	-4.117384
40	+40.857342	+39.277479	+40.842553	+39.273026
	-0.037533	-4.115530	-0.037539	-4.116935

Timoshenko's solution⁽⁵⁾: $M_{cr} = +40.840705$, 0.000000

현하였다고 사료되는 방법 1에 의한 결과가 방법 2에 의한 결과보다 더 정확히 엄밀해에 수렴하였다.

5.2 拘束된 비틀을 무시한 兩端 힌지인 圓形아치의 橫-비틀 控屈解析

구속된 비틀을 무시하는 경우에 양단의 휨모멘트 및 균일한 압축력에 의해서 횡좌굴을 일으키는 원형 아아치를 생각한다. 구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 아아치 구조의 절반만을 50개의 직선유한요소로 분할하여 해석하였다. 이 때 힌지단을 포함하는 유한요소의 강도매트릭스를 전체좌표계로 변환시킬 때 힌지단의 자유도는 전체좌표계로 변환시키지 않고 강도매트릭스를 산정하고 경계조건을 적용하는 5.1절의 방법 1을 사용하였다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$L = R \cdot \alpha = 403.32 \text{ cm}, \quad A = 14.4 \text{ cm}^2, \quad I_y = 273.0 \text{ cm}^4, \\ I_z = 93.0 \text{ cm}^4, \quad I_w = 0.0 \text{ cm}^4, \quad E = 29000 \text{ N/cm}^2, \\ G = 11200 \text{ N/cm}^2, \quad J = 1.414 \text{ cm}^4$$

본 연구에서는 아아치의 사이각 α 를 10° 간격으로

$10^\circ - 360^\circ$ 로 증가시킴에 따라 구속된 비틀을 무시한 12×12 강도매트릭스(K_{e2} , K_{e3})를 사용하여 양단에서 작용하는 휨모멘트에 의한 횡좌굴 임계모멘트, 균일하게 분포하는 압축력에 의한 임계하중을 산정하였다. Table 2는 본 연구의 결과와 팔호안에 표시된 Timoshenko의 엄밀해⁽⁵⁾를 함께 나타낸 것이다. 각각의 경우에 식 (24a)의 경계조건을 적용하는 대칭형태(symmetric)의 좌굴모우드 및 식 (26)의 경계조건을 적용하는 역대칭형태(antisymmetric)의 좌굴모우드에 대응하는 좌굴하중을 산정하였다.

$$U^1 = 0, \quad V^1 = 0, \quad W^1 = 0, \quad (26) \\ \omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 \neq 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad f^1 \neq 0$$

Table에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 임계하중값이 Timoshenko의 엄밀해와 전체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5.3 拘束된 비틀을 고려한 兩端 힌지인 圓形아치의 橫-비틀 控屈解析

구속된 비틀을 고려하는 경우에 양단의 휨모멘트

Table 2. Critical lateral buckling loads of the two-hinged circular arch subjected to pure bending moment and uniform compression.

α°	Lateral buckling by bending moment				buckling by compression	
	Symmetric mode I		Antisymmetric mode II		Symmetric Mode I	Antisymm. Mode II
10°	4961.91	-1528.62	7493.81	-4058.83	156.086	531.044
20°	7826.85	-960.266	9927.0	-3057.03	59.8803	382.319
30°	10974.3	-674.380	12687.8	-2382.78	29.1921	267.466
40°	14241.6	-508.355	15660.2	-1920.22	16.5003	189.789
50°	17566.9	-400.339	18766.4	-1591.36	10.2049	138.061
60°	20924.0 (20920.4)	-324.013 (-323.226)	21958.7 (24341.0)	-1348.50 (-1453.39)	6.67377 (6.71206)	103.029 (122.000)
70°	24300.1	-266.687	25208.1	-1162.81	4.51648	78.6760
80°	27688.6	-221.587	28497.0	-1016.50	3.11580	61.2743
90°	31085.3	-184.790	31814.0	-898.233	2.16575	48.5136
100°	34488.1	-153.881	35151.6	-800.516	1.50121	38.9349
110°	37895.2	-127.294	38504.8	-718.261	1.02693	31.5948
120°	41305.7 (41296.7)	-103.970 (-102.339)	41869.9 (46404.8)	-647.899 (-637.266)	.684878 (.664286)	25.8675 (26.8483)
130°	44718.8	-83.1687	45244.5	-586.867	.438132	21.3277
140°	48134.0	-64.3579	48626.6	-533.277	.262294	17.6796
150°	51550.9	-47.1452	52014.8	-485.715	.140716	14.7133
160°	54969.2	-31.2319	55408.1	-443.099	.061742	12.2765
170°	58388.7	-16.3920	58805.7	-404.590	.017006	10.2573
180°	61809.3 (61791.5)	-2.43336 (0.00000)	62206.8 (68937.7)	-369.526 (-305.390)	.000378 (.000000)	8.57159 (8.57924)
190°	65230.7	10.7317	65611.0	-337.380	.007291	7.15567
200°	68652.9	23.2809	69017.8	-307.726	.034281	5.96037
210°	72075.9	35.2745	72426.9	-280.216	.078673	4.94743
220°	75499.5	46.7900	75838.1	-254.567	.138395	4.08664
230°	78923.7	57.8917	79251.0	-230.539	.211812	3.35395
240°	82348.4 (82316.8)	68.6292 (71.8779)	82665.6 (91600.5)	-207.934 (-126.109)	.297603 (.326597)	2.73004 (2.65714)

Table 2. Continued

α°	Lateral buckling by bending moment				buckling by compression	
	Symmetric mode I		Antisymmetric mode II		Symmetric Mode I	Antisymm. Mode II
250°	85773.6	79.0486	86081.5	-186.584	.394724	2.19922
260°	89199.3	89.1845	89498.8	-166.348	.502313	1.74867
270°	92625.5	99.0683	92917.3	-147.103	.619670	1.36781
280°	96052.1	108.729	96336.9	-128.746	.746212	1.04789
290°	99479.1	118.188	99757.5	-111.188	.881451	.781563
300°	102907. (102854.)	127.465 (131.487)	103179. (114316.)	-94.3498 (-30.5675)	1.02499 (1.09248)	.562686 (.515254)
310°	106334.	136.580	106602.	-78.1669	1.17647	.386055
320°	109763.	145.546	110025.	-62.5836	1.33561	.247248
330°	113191.	154.378	113449.	-47.5575	1.50217	.142489
340°	116620.	163.088	116874.	-33.0716	1.67591	.068534
350°	120050.	171.685	120299.	-19.1983	1.85667	.022591
360°	123479. (123398.)	180.180 (184.944)	123725. (137059.)	-7.28603 (0.00000)	2.04426 (2.16089)	.002237 (.000000)

및 균일한 압축력에 의해서 횡좌굴을 일으키는 원형 아아치를 생각한다. 5.2절의 경우와 마찬가지로 구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 아아치 구조의 절반만을 50개의 직선유한요소로 분할하여 5.1절의 방법 1을 사용하여 해석하였다. 휨관성모멘트($I_w = 2070.0 \text{ cm}^4$)를 제외하면, 해석에 사용된 재원은 5.2절의 값들과 동일하다.

Table 3은 아아치의 사이각 α 를 10° 간격으로 $0^\circ - 360^\circ$ 로 증가시키에 따라 구속된 비틀을 고려한 14×14 강도매트릭스 (K_{e1}, K_{g1})를 사용하여 해석한 결과를 나타낸 것이다. 5.2 절의 경우와 마찬가지로 각각의 경우에 첫번째, 두번째 좌굴모우드에 대응하는 임계모멘트 및 임계하중을 산정하였다. 또한, Fig. 6, 7, 8은 각각 양단에 양의 휨모멘트, 음의 휨모멘트 그리고 균일한 압축력에 의한 첫번째, 두번째 좌굴모우드에 대응하는 횡좌굴하중을 본 연구의 결과와 문헌⁽⁵⁻⁹⁾의 결과를 함께 나타낸 것이다. 그림에

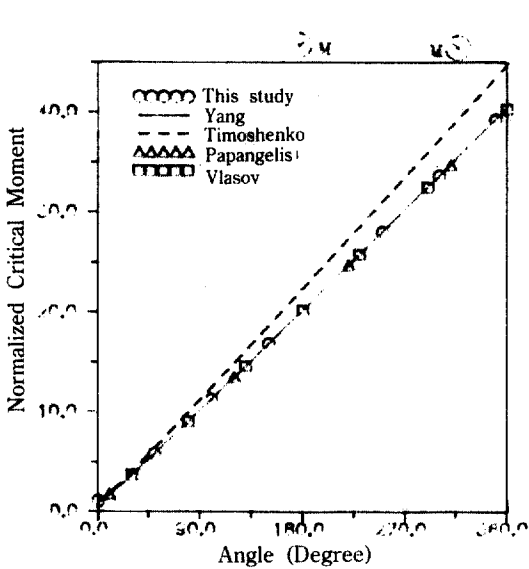
서 휨모멘트와 압축력값은 각각 사이각이 영이고 첫번째 좌굴모우드에 대응하는 임계모멘트 및 임계하중으로 나눈 값이다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 임계하중값이 Yang의 엄밀해와 전체적으로 잘 일치하고 있으며, Vlasov의 결과는 휨모멘트에 의한 좌굴은 본 연구와 잘 일치하지만 균일한 축하중에 의한 좌굴하중값은 다른 결과를 보이고 있다. Papangelis와 Trahair의 엄밀해는 본 연구의 결과와 대체로 잘 일치하지만 음의 모멘트에 의한 횡좌굴의 경우에 아아치의 사이각이 커짐에 따라 상당한 차이를 보이고 있다. Timoshenko의 엄밀해는 아아치 사이각이 변화함에 따라 본 연구의 결과와 대체로 비슷한 경향의 변화를 나타내었지만, 약간의 값의 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 Timoshenko의 해가 구속된 비틀을 고려하지 못하는 데에서 기인한다고 판단된다.

Table 3. Critical lateral buckling loads of the two-hinged circular arch subjected to pure bending moment and uniform compression.

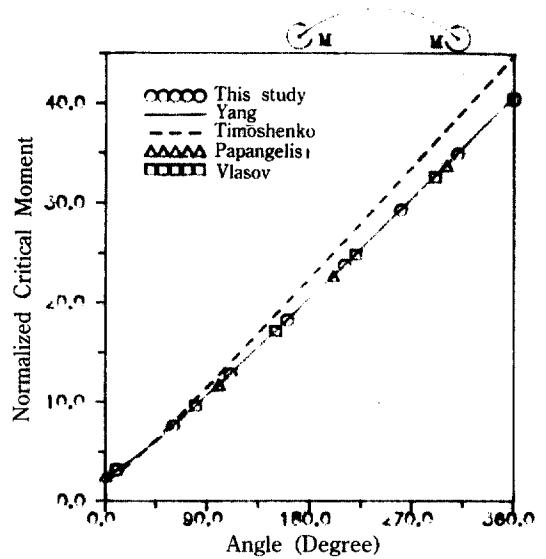
α°	Lateral buckling by bending moment				buckling by compression	
	Symmetric mode I		Antisymmetric mode II		Symmetric Mode I	Antisymm. Mode II
0°	3058.89	-3058.89	7643.43	-7643.43	480.353	1921.41
10°	5221.00	-11786.73	9551.08	-6112.18	180.740	957.023
20°	8020.98	-1152.43	11809.8	-4931.97	71.7238	673.024
30°	11121.3	-818.447	14358.0	-4041.29	35.4082	474.249
40°	14357.3	-620.179	17125.8	-3370.12	20.1255	341.085
50°	17661.2	-489.734	20053.0	-2858.36	12.4826	251.285
60°	21002.9	-397.004	23094.6	-2460.90	8.17675	189.475
70°	24367.4	-327.091	26218.6	-2145.80	5.53928	145.865
80°	27746.8	-271.956	29402.8	-1890.90	3.82399	114.317
90°	31136.3	-226.900	32631.9	-1680.80	2.65925	90.9519
100°	34533.0	-189.011	35895.0	-1504.64	1.84392	73.2735
110°	37935.1	-156.393	39184.3	-1354.68	1.26167	59.6401
120°	41341.2	-127.762	42494.4	-1225.27	.841595	48.9476
130°	44750.6	-102.217	45820.8	-1112.23	.538475	40.4368
140°	48162.5	-79.1073	49160.7	-1012.43	.322404	33.5745
150°	51576.4	-57.9544	52511.4	-923.446	.172981	27.9787
160°	54992.1	-38.3972	55871.2	-843.420	.075906	23.3713
170°	58409.1	-20.1531	59238.7	-770.881	.020908	19.5457
180°	61827.5	-3.01453	62612.6	-704.661	.000465	16.3467
190°	65246.9	13.1985	65992.0	-643.819	.008967	13.6558
200°	68667.2	28.6288	69376.1	-587.590	.042154	11.3815
210°	72088.4	43.3778	72764.4	-535.344	.096746	9.45217
220°	75510.3	57.5402	76156.4	-486.565	.170189	7.81112
230°	78932.9	71.1947	79551.5	-440.815	.260479	6.41320
240°	82356.1	84.4014	82949.5	-397.730	.365998	5.22199
250°	85780.0	97.2175	86350.1	-357.003	.485447	4.20790

Table 3. Continued

α°	Lateral buckling by bending moment				buckling by compression	
	Symmetric mode I		Antisymmetric mode II		Symmetric Mode I	Antisymm. Mode II
260°	89204.3	109.686	89752.9	-318.364	.617783	3.34669
270°	92629.2	121.845	93157.8	-281.595	.762137	2.61836
280°	96054.6	133.729	96564.5	-246.497	.917787	2.00628
290°	99480.4	145.366	99973.0	-212.905	1.08414	1.49655
300°	102907.	156.781	103383.	-180.671	1.26071	1.07749
310°	106333.	167.994	106795.	-149.672	1.44706	.739208
320°	109761.	179.027	110208.	-119.798	1.64283	.473284
330°	113188.	189.894	113622.	-90.9602	1.84773	.272527
340°	116616.	200.611	117037.	-63.1002	2.06147	.130764
350°	120044.	211.191	120454.	-36.2552	2.28384	.042664
360°	123473.	221.645	123871.	-11.7411	2.51464	.003605

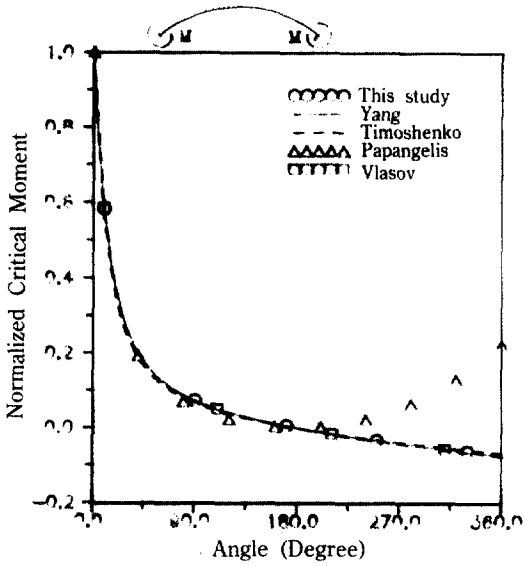


(a) symmetric buckling mode

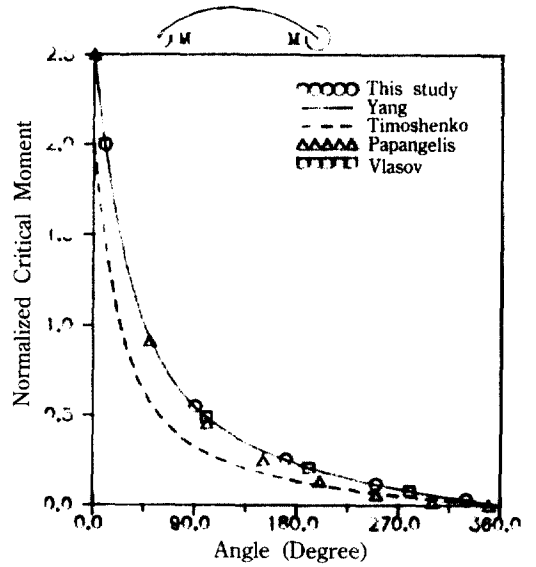


(b) antisymmetric buckling mode

Fig. 6 Critical moments of the circular arch under positive bending moment

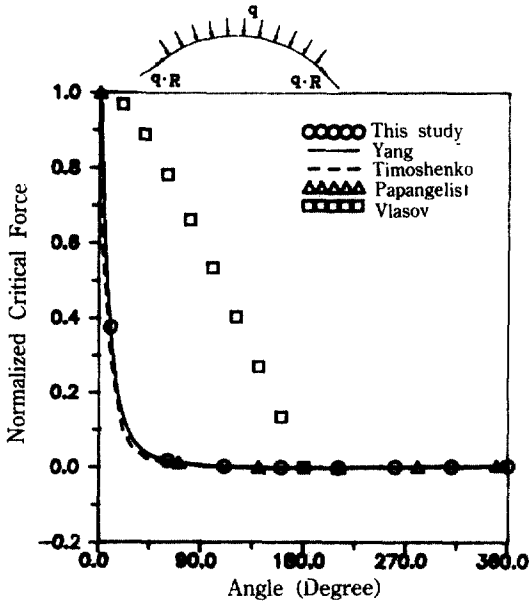


(a) symmetric buckling mode

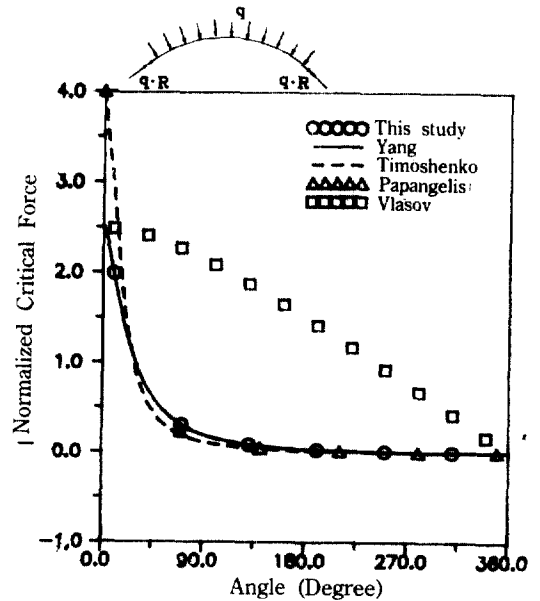


(b) antisymmetric buckling mode

Fig. 7 Critical moments of the circular arch under negative bending moment



(a) symmetric buckling mode



(b) antisymmetric buckling mode

Fig. 8 Critical loads of the circular arch under uniform compression

5.4 一軸 對稱斷面을 갖는 圓形아아치의 휨모멘트 에 의한 橫撻屈解析

구속된 비틀을 고려하는 경우에 양단의 휨모멘트

에 의해서 순수휨을 받고 일축대칭단면을 갖는 원형 아아치를 생각한다. 아아치 구조의 절반만을 50개의 직선유한요소로 모델링하고 방법 1을 사용하여 해

Table 4. Critical buckling loads of the two-hinged monosymmetric circular arch subjected to pure bending moment.

α°		Lateral buckling by bending moment			
		Symmetric buckling mode I		Antisymmetric buckling mode II	
0°	This study	13604.4	-3734.77	44445.6	-4967.20
	Vlasov	13604.4	-3734.77	44445.6	-4967.20
	Trahair	13604.4	-3734.77	44445.6	-4967.20
30°	This study	18703.5	-2785.56	51629.1	-4476.71
	Vlasov	18103.7	-2728.60	49441.5	-4434.27
	Trahair	18278.7	-2627.41	49694.4	-4381.07
60°	This study	24148.8	-2089.37	59151.8	-4045.97
	Vlasov	22856.6	-1975.96	54476.0	-3940.04
	Trahair	23150.5	-1734.11	54963.3	-3796.63
90°	This study	29831.1	-1519.99	67043.2	-3653.89
	Vlasov	27759.0	-1372.78	59541.0	-3476.13
	Trahair	28135.5	-1015.80	60247.0	-3220.68
120°	This study	35705.1	-1010.74	75352.4	-3285.37
	Vlasov	32753.6	-861.809	64630.0	-3036.37
	Trahair	33189.1	-472.500	65541.4	-2661.46
150°	This study	41759.4	-522.828	84149.4	-2928.96
	Vlasov	37807.9	-410.629	69738.5	-2616.09
	Trahair	38285.9	-123.904	70843.7	-2128.18
180°	This study	48003.5	-30.4452	93530.4	-2575.37
	Vlasov	42902.8	0.00000	74862.9	-2211.75
	Trahair	43410.9	0.00000	76151.5	-1630.74

석하였다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$L = R \cdot \alpha = 100.0 \text{ cm}, \quad A = 30.0 \text{ cm}^2, \quad J = 10.0 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 100.0 \text{ cm}^4, \quad I_z = 800.0 \text{ cm}^4, \quad I_w = 150.0 \text{ cm}^4,$$

$$E = 10000 \text{ N/cm}^2, \quad G = 5000 \text{ N/cm}^2, \quad \beta_2 = 10.0 \text{ cm}$$

아아치의 사이각 α 를 30° 간격으로 0° - 180°로

증가시킴에 따라 구속된 비틀을 고려한 14×14 강도매트릭스(K_{e1} , K_{g1})를 사용하여 양단에서 작용하는 휨모멘트에 의한 첫번째, 두번째 좌굴모우드에 대응하는 임계모멘트를 구하였다. Table 2는 본 연구의 결과와 일축대칭 아아치의 횡좌굴에 대한 엄밀해를 제시한 Vlasov⁽⁶⁾와 Papangelis et al⁽⁸⁾의 결과를 함께

나타낸 것이다. 본 연구의 결과는 Papangelis et al의 해석결과보다 Vlasov의 결과에 더 근접하는 경향을 나타내었다.

6. 結 論

부재단면의 Semitangential rotation를 고려한 변위장을 도입하여 3차원 연속체의 假想일의 原理로부터 박벽공간뿔대요소 평형방정식을 유도하고, Hermitian 다항식을 薄壁空間뿔대의 축방향 및 횡방향 처짐, 비틀회전각의 形狀函數로 사용하여 非對稱斷面을 갖는 空間뿔대要素의 彈性 및 幾何的인 剛度 매트릭스를 유도하였다. 이때 拘束된 비틀을 무시하는 경우와 拘束된 비틀을 고려하는 경우에 대하여 Semitangential rotation 및 Semitangential moment에 대응하는 기하적인 강도매트릭스를 산정하였다. 휨모멘트와 균일한 압축력을 받는 兩端힌지인 원형아아치의 橫-비틀 挫屈解析을 수행하여 문헌의 엄밀해와 비교·분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 힌지단의 自由度만은 부재座標係로 정의하고 나머지 절점의 自由度들은 全體座標係로 變換시키고 境界條件을 적용함으로써 嚴密解에 보다 近接하는 解析結果를 얻었다.

2) Yang and Kuo의 해는 본 연구의 결과와 전체적으로 잘 일치하였다.

3) Timoshenko의 엄밀해는 구속된 비틀이 무시되는 경우에 원형아아치의 횡좌굴하중을 정확히 산정한다.

4) Vlasov의 엄밀해는 구속된 비틀을 고려하는 경우에 균일한 압축력을 받는 원형 아아치의 횡좌굴해석을 제외한 경우에 본 연구의 결과와 잘 일치하였다.

5) Papangelis와 Trahair의 엄밀해는 음의 휨모멘트를 받는 원형 아아치의 횡좌굴해석을 제외한 경우에 본 연구의 결과와 잘 일치하였다.

6) 이제까지 문헌에서 제시된 이론은 원형아아치의 횡좌굴해석에만 적용될 수 있는데 반하여 본 연구에서 제시한 유한요소는 직선요소이므로 임의의 곡선형상을 갖는 구조의 횡좌굴거동을 정확히 산정 하리라 사료된다.

참 고 문 헌

1. Barsoum R.S. and Gallagher R.H., "Finite element analysis of torsional-flexural stability problems", *Int. J. Numer. methods. Eng.*, Vol. 12, 1970, pp 335-352.
2. Chen W.F. and Atsuta T., "Theory of Beam-Columns", Vol. 2, Space Behavior and Design, McGraw-Hill, New York, 1977.
3. Argyris J.H., Dunne P.C. and Scharpf D.W., "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 14, 1978, pp 401-451 and Vol. 15, 1978, pp 99-135.
4. Argyris J.H., Hilpert O., Malejannakis G.A. and Scharpf D.W., "On the geometrical stiffness of a beam in space-a consistent v.w. approach", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 20, 1979, pp 105-131.
5. Timoshenko S.P. and Gear J.M. *Theory of elastic stability*, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1961, pp 212-277.
6. Vlasov V.Z., "Thin-walled Elastic Beams", 2nd ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1961.
7. Yoo C.H., "Flexural-torsional stability of curved beams", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, Vol. 108, 1982, pp 1351-1369.
8. Papangelis J.P. and Trahair N.S., "Flexural-torsional buckling of arches", *J. Struct. Eng. Div. ASCE*, Vol. 113, 1987, pp 880-906.
9. Yang Y.B. and Kuo S.R., "Effect of curvature on stability of curved beams", *J. Struct. Eng. Div. ASCE*, Vol. 113, 1987, pp 1185-1202.
10. Saleeb A.F. and Gendy A.S., "Shear-flexible for spatial buckling of thin-walled curved beams", *Int. J. Numer. methods. Eng.*, Vol. 31, 1991, pp 729-757.
11. 金文榮, 申鉉穆 "有限要素法을 이용한 薄壁 空間뿔대構造의 挫屈解析", *大韓土木學會 論文集*, 제13권, 제1호, 1993.
12. 金文榮, 申鉉穆 "薄壁 空間뿔대構造의 橫挫屈解析", *大韓土木學會 論文集*, 제13권, 제1호, 1993.
13. 金文榮, 張丞弼 "非對稱 斷面을 갖는 薄壁 空間뿔대의 挫屈 및 自由振動解析", *韓國鋼構造學會*, 1993. 3. (接受: 1993. 7. 8)