

사변형 요소를 이용한 추계론적 유한요소해석

Stochastic Finite Element Analysis by Using Quadrilateral Elements

최창근* · 노혁천**

Choi, Chang Koon · Noh, Hyuk Chun

Abstract

The extension of the weighted integral method in the area of stochastic finite element analysis is presented. The use of weighted integral method in numerical analysis was extended to CST(constant strain triangle) element by Deodatis to calculate the response variability of 2D stochastic systems. In this paper, the extension of the weighted integral method for general plane-elements is represented. It has been shown that the same mesh used in the deterministic FE analysis can be used in the stochastic FE analysis. Furthermore, because the CST element is a special case which has constant strain-displacement matrix the mingling of CST elements with the other quadrilateral elements in the analysis may also be possible.

요 지

본 논문은 추계론적 유한요소해석의 한 방법인 가중적분법의 확장에 대해서 논하였다. 가중적분법의 사용은 Deodatis에 의해서 삼각형요소로 확장되었다. 이에 의해서 2차원 문제에 대한 응답변화도를 수치적인 해석에 의해서 얻을 수 있게 되었다. 본 논문에서는 가중적분법을 일반 평면요소를 사용할 수 있도록 확장한다. 제안된 방법에 의해서 확정론적 유한요소해석에서 사용된 요소망은 추계론적 유한요소해석에서도 그대로 사용할 수 있도록 되었다. 나아가서, CST요소는 상수만을 그 요소로 가지는 변위-변형을 행렬을 가지는 특수한 경우이므로 제안된 방법을 사용할 경우 CST요소와 일반 평면 사변형 요소를 혼용하여 사용할 수 있을 것이다.

1. 서 론

유한요소해법은 개념이 비교적 간단하고 응용이 쉬워서 여러가지의 공학적 문제들에 대한 해법으로서의 가치가 널리 인정되고 있다. 그러나 확정론적 유한요소해석(deterministic finite element analysis)은 구조물의 해석시 구조 자체에 대한 여러가지의

가정을 하게 된다. 이들 중 몇 가지를 예로 들어보면 구조계 내의 재료상수가 어떤 특정한 값을 가진다는 가정, 구조의 기하학적인 요소들이 일정한 값을 가진다는 가정, 구조계에 가해지는 하중이 시간에 따라 변하지 않는 정량적인 값을 가진다는 가정 등을 들 수 있다. 다시 말해서, 확정론적 유한요소해석에서는 구조계 내 외에 존재 가능한 여러가지의 추계론적인 특성들을 무시하게 되며, 위에 언급한 가정들은 추계론적 해석의 측면에서 보면 각 해석 인자들에 대한

* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수
** 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

평균치로 볼 수 있다.

해석 대상 구조가 가질 수 있는 추계론적 특성들을 열거하면 다음과 같은 세가지로 대별된다.

- (1) 재료상수의 임의성(E, v)
- (2) 구조의 기하학적 임의성(A, t)
- (3) 하중의 임의성(진동하중, 파랑하중)

이러한 임의성들을 구조물의 해석시 고려하고자 하는 것이 추계론적 유한요소해석(stochastic FE analysis)이다. 이 해석법은 우리가 생각할 수 있는 구조계 내외의 임의성이 어떤 확률론적 특성을 가진다는 가정에서 출발한다. 이러한 가정된 확률론적 특성들이 구조계의 응답에 영향을 미치므로 이들 영향을 통계학적인 특성치들로 나타내어 구조계의 응답변화도(response variability)를 얻는다.

기존의 가중적분법을 포함한 추계론적 유한요소 해석법들은 추계론적해석만을 위한 독립적인 요소망(finite element mesh)을 필요로 하며, 사용되는 요소망의 요소 그 자체는 유한요소로서의 특성을 가지지 않는다. 즉, 요소망에 쓰이는 요소는 임의적 특성을 가지는 임의장 함수 $f(x)$ 가 일정한 값을 가진다고 가정되어지는 하나의 영역에 불과하다.

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)은 N번의 난수(亂數)발생을 통해서 얻은 N개의 표본에 대해서 각각 해석을 수행해야 하므로 해석에 많은 시간을 요하게 된다.⁽⁶⁾ 시간적 절약을 도모하기 위해서 강성행렬의 역행렬에 대한 Neumann 전개를 수행한 Neumann 전개방법 역시 N개의 난수발생을 통한 표본을 이용하여 해석을 수행하게 된다.^(7,9) 가중적분법의 경우는 임의장 함수의 영역에 대한 적분을 이용하여 확률변수(random variable) X를 얻고, 이를 응답변화도의 통계적인 특성치들을 얻는데 이용한다. Deodatis는 가중적분법에 CST요소를 사용할 수 있도록 하여 FEM을 이용한 2차원 문제의 추계론적해석을 가능하게 하였다.⁽³⁾ 이에 의해서 확정론적 유한요소해석에 사용된 요소망은 추계론적 유한요소해석에서도 그대로 사용할 수 있도록 되었다. 그러나 사변형요소의 경우는 아직까지 가중적분법에 의한 추계론적 유한요소해석에서는 사용할 수 없었다. 본 논문에서는 가중적분법을 이용한 추계론적 유한요소해석에서 평면-사변형요소를 사용할 수 있도록 하여 가중적분법에 의한 추계론적 유한요소해석의 적용성을 넓힘은 물론 이에 의해서

확정론적 유한요소해석을 위해서 작성한 요소망을 그대로 추계론적 유한요소해석에서도 사용할 수 있도록 한다. 이렇게 되면 사용요소의 특성에 의해서도 해석결과가 영향을 받으므로 이에 의한 결과의 개선도 도모하고자 한다.

사용된 기호들은 Deodatis⁽³⁾가 사용한 것들을 기본으로 하였음을 밝혀 둔다.

2. 가정된 임의장과 가중치적분

2.1. 재료상수의 임의장

본 논문에서는 임의장(任意場: random field)의 특성을 가지는 인수를 편의상 재료 탄성계수로 국한한다. 가정된 재료 탄성계수의 형태를 보면 다음의 식과 같다.^(6,7)

$$E(x) = E_0 [1 + f(x)] \tag{2.1}$$

여기서 E_0 는 탄성계수의 기대치이고, $f(x)$ 는 통계적 특성을 가지는 임의장 함수이다. $f(x)$ 는 재료 탄성계수가 음의 값을 가지는 모호성을 배제하기 위해서 다음과 같은 범위를 가진다고 가정한다. 여기에서 δ_r 는 $0 < \delta_r < 1$ 의 조건을 만족해야 한다.

$$-1 + \delta_r \leq f(x) \leq 1 - \delta_r \tag{2.2}$$

2.2 가중적분

가중적분은 재료의 임의적인 특성을 표현하는 임의장을 나타내는 함수 $f(x)$ 와 알려진 어떤 함수 $g(x)$ 를 곱한 함수에 대한 주어진 영역에의 적분이다.⁽¹⁻³⁾ 이는 아래의 식과 같다.

$$X = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \tag{2.3}$$

위의 가중치적분은 영역 Ω 에 대한 하나의 확률변수 X가 된다.

2.3 Auto-correlation 함수

Auto-correlation 함수는 확률변수의 상대 공간좌표에 따른 상호관계를 나타내는 척도로 다음의 식과 같이 정의된다.

$$R_{aa}(\xi) = E[a(x)a(x+\xi)] \tag{2.4}$$

여기에서, a, x, ξ 는 각각 확률변수, 위치벡터 그

리고 상대거리 벡터이다.

위의 식에서 보듯이 auto-correlation 함수는 단지 상대거리 벡터인 ξ 만의 함수임을 알 수 있다. 본 논문에서 사용한 auto-correlation 함수^(3,5)는 아래의 식 (2.5)와 같다. 이 식은 Dedatis가 그의 CST요소를 이용한 논문에서 사용한 함수와 같은 함수이다. 이 함수는 x 와 y 방향에 대한 2차원의 함수이다.

$$R_R(\xi, \eta) = \sigma_R^2 \cdot \exp\left\{-\frac{|\xi| + |\eta|}{d}\right\} \quad (2.5)$$

위의 식에서 σ_R 는 임의장 함수 $f(x)$ 의 표준편차이고 본 논문에서는 0.1의 값을 사용하였다. ξ, η 는 각각 x, y 방향의 상대거리를 나타내는 벡터 ξ 의 성분이다. d 는 상관관계거리로 이 값의 변화에 따른 변위의 분산계수(C.O.V. : coefficient of variation)값의 변화를 결과에서 제시하게 될 것이다.

3. 임의장이 포함된 강성행렬의 구성

3.1 요소 강성행렬

확정론적 유한요소해석에서의 요소의 강성행렬 K^e 는 다음의 식으로 표현된다. 상첨자로 쓰인 e 는 고려중인 요소를 의미하며 앞으로도 같은 의미로 쓰도록 한다.

$$K^e = \int_{\Omega^e} B_e^T D_e B_e d\Omega^e \quad (3.1)$$

그러나 추계론적 유한요소해석시 위의 식에서 행렬 D_e 는 $D_e (= D_0 + f(x)D_0)$ 로 대체되어야 한다. 여기에서 말하는 행렬 D_e 는 D_0 행렬에서 재료상수에 해당하는 부분을 식 (2.1)로 대체하여 얻을 수 있는 행렬이다. 이에 의해서 요소 강성행렬 K^e 는 아래와 같은 두개의 식으로 분리된다.

$$K^e = K_0 + \Delta K^e \quad (3.2)$$

위의 두 행렬 $K_0, \Delta K^e$ 를 나타내면 각각 다음과 같다.

$$K_0 = \int_{\Omega^e} B_e^T D_0 B_e d\Omega^e \quad (3.3)$$

$$\Delta K^e = \int_{\Omega^e} f(x) B_e^T D_0 B_e d\Omega^e \quad (3.4)$$

여기에서 위에 쓰인 변위-변형률 행렬 B_e 는 다음과 같은 형식으로 분할하여 쓸 수 있다.

$$B_e = B_1 p_1 + B_2 p_2 + \dots + B_{NP} p_{NP} \quad (3.5)$$

위에서 행렬 B_i 는 각각 상수만을 요소로 가지고 있는 상수 행렬이고, p_i 는 B_i 에 곱해지는 독립적인 다항식이며, NP 는 B_e 행렬 내에 존재하는 독립적인 다항식의 수이다. 위의 식을 강성행렬식 (3.4)에 대입하여 정리하면 ΔK^e 는 다음의 식 (3.6)과 같다.

$$\Delta K^e = B_1^T D_0^e B_1 X_{11} + (B_1^T D_0^e B_2 + B_2^T D_0^e B_1) X_{12} + \dots + B_{NP}^T D_0^e B_{NP} X_{NPNP} \quad (3.6)$$

위에 나타난 가중적분에 의한 확률변수 X_{ij}^e 는 다음과 같이 표현된다.

$$X_{ij}^e = \int_{\Omega^e} F(x) p_i p_j d\Omega^e \quad (3.7)$$

위의 가중적분항 X_{ij}^e 는 식에서 볼 수 있듯이 p_i 와 p_j 에 대해서 대칭이므로 실제의 가중적분항의 갯수 N_{wi} 는 다음과 같다.

$$N_{wi} = \frac{1}{2} NP(NP + 1) \quad (3.8)$$

전체구조계에 대한 강성행렬은 아래의 식과 같이 각 요소 강성행렬의 합으로 표현할 수 있다.

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} K^e \quad (3.9)$$

위에서 N_e 는 구조계에 사용된 전체 요소의 수이며 행렬 K^e 는 각각 전체구조계의 차원으로 확장된 요소강성행렬이다. 총포텐셜에너지범함수(total potential energy functional)를 최소화(minimization)하여 평형방정식을 구성해 보면

$$KU = P \quad (3.10)$$

와 같고 U 는 구해야 할 변위벡터이다.

우리는 여기서 식 (3.2)와 식(3.6)으로부터 요소 강성행렬 K^e 가 확률변수 X_{ij}^e 의 함수이므로 그 함의 역변환으로 얻어지는 변위벡터 U 역시 확률변수 X_{ij}^e 의 함수임을 알 수 있다. 이를 식으로 나타내 보면 다음과 같다.

$$K = K(X_{ij}^e; e=1..N_e; i, j=1..NP) \quad (3.11)$$

$$U = U(X_{ij}^e; e=1..N_e; i, j=1..NP) \quad (3.12)$$

3.2 강성행렬의 기대치

전체 구조계에 대한 강성행렬의 기대치 K_0 는 각 요소강성행렬의 기대치의 합으로 얻어진다. 여기에서, K^e 는 요소의 강성행렬이다.

$$K_0 = E[K] = \sum_{e=1}^{N_e} E[K^e] \quad (3.13)$$

4. 응답 변화도의 해석

4.1 변위의 해석

전절에서 보았듯이 강성행렬은 확률변수 X_{ij}^e 의 함수임을 알 수 있다. 그러므로 변위 벡터 U 역시 확률변수 X_{ij}^e 의 함수가 된다. 여기에서, 식 (3.8)을 적용시키고, 변위벡터 U 를 확률변수 X_{wi}^e 에 대해서 1차의 Taylor series 전개를 수행해 보면 다음과 같다.

$$U \approx U_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{wi=1}^{N_{wi}} (X_{wi}^e - X_{wi}^{e0}) \left(\frac{\partial U}{\partial X_{wi}^e} \right)_E \quad (4.1)$$

위의 식에서 마지막 항은 평형 방정식 $KU=P$ 를 확률변수 X_{wi}^e 에 대해서 편미분하여 얻을 수 있으며, 이를 식 (4.1)에 대입하면 아래의 식과 같은 식 (4.2)를 얻는다.

$$U \approx U_0 - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{wi=1}^{N_{wi}} X_{wi}^e K_0^{-1} \left(\frac{\partial K}{\partial X_{wi}^e} \right)_E U_0 \quad (4.2)$$

위의 식을 이용하여 변위에 대한 평균치와 공분산치(covariance)를 얻을 수 있다. 먼저 평균치를 보면, 확률변수 X_{wi}^e 에 대한 평균치($E[X_{wi}^e] = X_{wi}^{e0}$)는 0 이므로

$$E[U] = U_0 \quad (4.3)$$

이고, 공분산을 구해 보면 다음의 식 (4.4)와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[U, U] &= E[(U - U_0)(U - U_0)^T] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{W_{i1}=1}^{N_{wi}} \sum_{W_{i2}=1}^{N_{wi}} \left(K_0^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_{W_{i1}}^{e_1}} U_0 U_0^T \left(\frac{\partial K}{\partial X_{W_{i2}}^{e_2}} \right)^T K_0^{-T} \right) \\ &\quad E[X_{W_{i1}}^{e_1} X_{W_{i2}}^{e_2}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

위의 식을 행렬에서 분배법칙이 성립한다는 사실을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\text{Cov}[U, U] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} K_0^{-1} E[\Delta K^{e_1} U_0 U_0^T \Delta K^{e_2}] K_0^{-T} \quad (4.5)$$

위에서 ΔK^e 는 다음과 같다.

$$\Delta K^e = \sum_{wi=1}^{N_{wi}} X_{wi}^e \left(\frac{\partial K}{\partial X_{wi}^e} \right)_E \quad (4.6)$$

위의 식 (4.5)에서 기대치 연산자 내의 식은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[\Delta K^{e_1} U_0 U_0^T \Delta K^{e_2}] &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} R_{ff}(\xi, \eta) B_{e_1}^T D_e^e B_{e_1} U_0 U_0^T B_{e_2}^T D_e^e B_{e_2} d\Omega_2 d\Omega_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

위의 식 (4.7)에서 $R_{ff}(\xi)$ 는 앞에서 언급한 auto-correlation 함수의 정의에 의해서 쓰여진 것으로 다음과 같이 표현된다.

$$E[f(x_1)f(x_2)] = R_{ff}(x_2 - x_1) \quad (4.8)$$

4.2 변형률의 해석

변형률에 대한 평균치와 공분산치는 각각 요소내의 적분점에서 구해져야 한다. 그러므로 이번 장에서 쓰이는 e 의 표기는 4절점 요소의 경우는 4개, 8, 9 절점 요소의 경우는 9개의 적분점에 대해서 반복적으로 적용되는 것이다. 변형률의 식은 다음과 같다.

$$\epsilon_e = B_e u_e \quad (4.9)$$

위의 식에서 U_e 는 식 (4.2)에서 쉽게 구할 수 있으며 식 (4.10)과 같다. 이 식은 식 (4.2)에서 단위 요소에 대한 합연산을 제외시킨 것이다.

$$U_e \approx U_e^0 - \sum_{wi=1}^{N_{wi}} X_{wi}^e K_0^{-1} \left(\frac{\partial K}{\partial X_{wi}^e} \right)_E U_0 \quad (4.10)$$

식 (4.10)을 식 (4.9)에 대입하면 다음의 식 (4.11)을 얻을 수 있다. 아래의 식은 확정론적 유한요소해석에서 얻어지는 항과 추계론적 해석에서 얻어지는 항으로 나누어져 있음을 알 수 있다.

$$\epsilon_e \approx B_e \left[U_e^0 - \sum_{wi=1}^{N_{wi}} X_{wi}^e K_0^{-1} \left(\frac{\partial K}{\partial X_{wi}^e} \right)_E U_0 \right] \quad (4.11)$$

여기에 쓰인 B_e 는 「3, 구조계의 자유도」의 차원으로 확장하여 계산을 수행하여야 한다. 식 (4.11)에 기대치 연산자를 작용시키면 다음과 같이 변형률의

평균치를 얻을 수 있으며, 이는 변위에서의 마찬가지로 확정론적 유한요소해석에 의한 결과와 같은 것이다.

$$E[\epsilon_e] = B_e U_e^0 = \epsilon_e^0 \quad (4.12)$$

다음으로 공분산의 정의를 이용하여 변형률에 대한 공분산식을 써보면 아래와 같다.

$$\text{Cov}[\epsilon_e, \epsilon_e] \quad (4.13)$$

$$= E\left[(\epsilon_e - E[\epsilon_e]) (\epsilon_e - E[\epsilon_e])^T \right]$$

$$= B_e \left\{ \sum_{w_{i1}}^{N_{w1}} \sum_{w_{i2}}^{N_{w2}} \left(K_0^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_{w_{i1}}} U_0 U_0^T \left(\frac{\partial K}{\partial X_{w_{i2}}} \right)^T K_0^{-T} \right) \right. \\ \left. E[X_{w_{i1}}^e X_{w_{i2}}^e] \right\} B_e^T$$

위의 식을 식 (4.6)의 관계를 이용하여 다시 정리하면 식 (4.5)와 유사한 식을 얻을 수 있으며 그 식은 아래와 같다.

$$\text{Cov}[\epsilon_e, \epsilon_e] = B_e K_0^{-1} E[\Delta K^e U_0 U_0^T \Delta K^e] K_0^{-T} B_e^T \quad (4.14)$$

위의 적분식 역시 기대치 연산자 내의 항은 식 (4.7)과 같이 auto-correlation 함수를 포함한 적분으로 변형될 수 있다.

$$E[\Delta K^e U_0 U_0^T \Delta K^e] \quad (4.15)$$

$$= \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} E[f(x)f(x+\xi)] B_e^T D_c^e B_e U_0 U_0^T B_e^T D_c^e B_e \\ d\Omega^e d\Omega^e \\ = \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} R_{ff}(\xi, \eta) B_e^T D_c^e B_e U_0 U_0^T B_e^T D_c^e B_e d\Omega^e d\Omega^e$$

여기에서 주의할 것은 위의 식 (4.15)에서 auto-correlation 함수의 변수인 상대거리벡터 ξ 의 값이 단지 0의 값을 가지는 것이 아니라 요소내의 상대 거리에 따라서 특정한 값을 가진다는 것이다.

4.3 Auto-correlation 함수의 적분

본 논문에서 사용한 auto-correlation 함수는 그 형태가 비교적 간단하여 제안된 방법의 정확성을 알아보기 위해서 직접 해석적인 적분을 수행하여 단일 부프로그램으로 삽입하여 사용하였다.

식 (4.7)과 (4.15)의 적분은 다음과 같은 주의를 필요로 한다. 이 적분은 두개의 부분으로 나눌 수 있다. 첫째는 요소 e_1 과 요소 e_2 의 영역에 대한 적

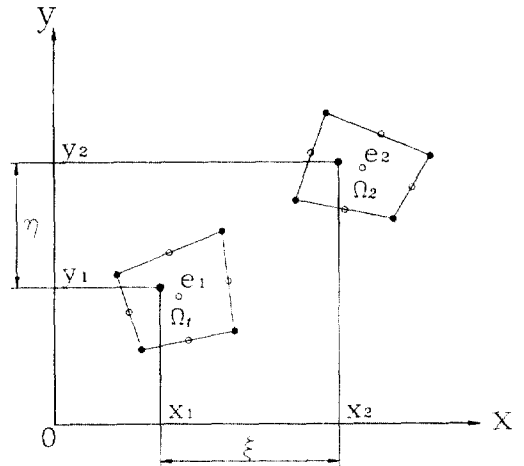


그림 1. 요소 e_1, e_2 의 상대거리 벡터

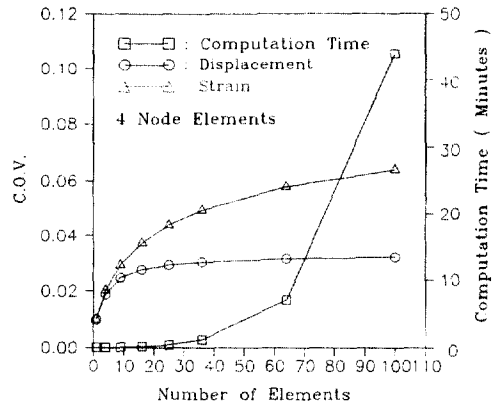


그림 2. Auto-Correlation 함수의 적분

분이고, 두번째는 두 요소 사이의 상대거리벡터 ξ 에 의한 auto-correlation 함수에 대한 적분이다. 그림 1은 두 요소 사이의 거리에 의한 상대거리벡터를 나타낸 것이다. 여기에서 두 영역 Ω_1, Ω_2 는 각 요소의 강성행렬을 구할 때 이미 고려가 되었으므로 auto-correlation 함수의 적분시에는 그 영역은 고려되지 말아야 한다. 즉 그림 2의 실선으로 표현된 적분 영역의 체적은 밀면의 면적으로 나누어져야 한다.

5. 예제 해석 및 토의

사용된 기본 예제는 그림 3과 같은 구조이다. 이

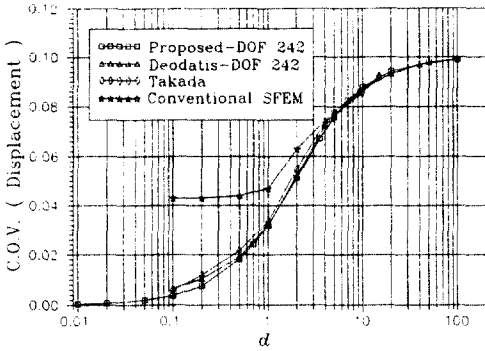


그림 3. 기본예제의 요소망

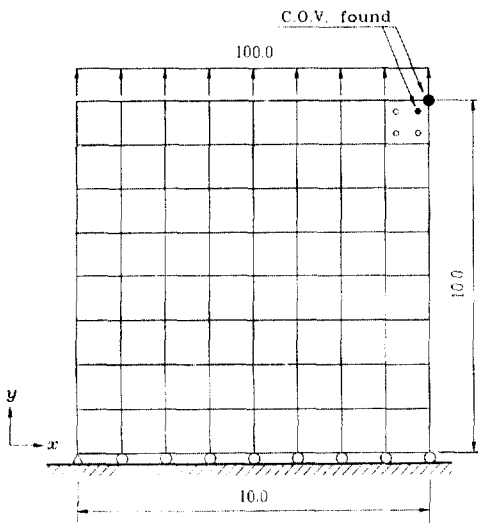


그림 4. 변위에 대한 분산계수(C.O.V.)값의 비교

예제는 추계론적 유한요소해석의 예제로 많이 사용되는 것으로서 이 예제에 대해서 Deodatis가 제시한 결과와 제안된 방법에 의한 해석결과를 비교해 보면 그림 4와 같다. 그림 4의 결과는 그림 3의 구조에서 $(x, y)=(10, 10)$ 의 점에서의 y방향의 변위에 대한 분산계수값을 도시한 것이다. 해석결과는 Deodatis는 물론 Takada의 결과와도 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.^(3,8) 그러나 상관관계거리 d의 값이 작을 경우의 수렴성은 본 논문에서 제안한 해석이 더 좋은 결과를 보이고 있다. 상관관계거리 d의 값이 커짐에 따라 분산계수값이 0.1로 수렴하는 것은 임의장 함수 $f(x)$ 의 표준편차 σ_f 를 0.1로 가정하여 해석을 수행하였기 때문이다.

그림 5는 그림 3의 예제에 대한 해석으로 요소의

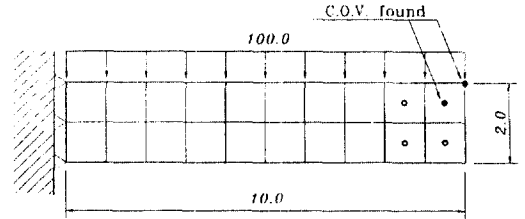


그림 5. 요소망의 세분화에 따른 해석시간과 결과의 비교

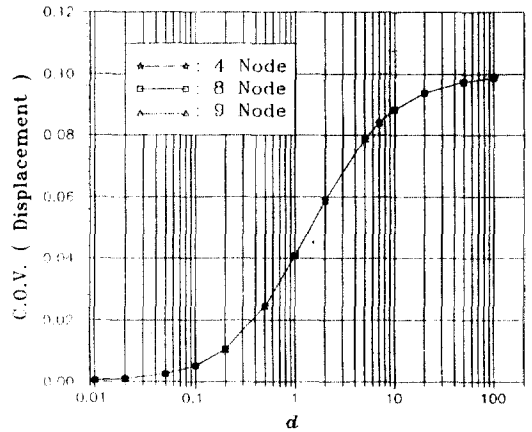


그림 6. 예제 2의 형상

세분화 정도가 적을 경우에도 만족할 만한 해석 결과를 보여주고 있는 특성을 나타내 본 것이다. 그림에서 보듯이 요소의 수가 36개 이상인 경우는 해석결과의 향상에 비해 연산시간의 증가가 상대적으로 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 그러므로 합리적인 범위 내에서는 요소의 세분화에 관계없이 좋은 해석결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 해석시의 요소분할은 가로방향과 세로방향의 요소 갯수를 같게 하여 1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 100의 요소수를 가지는 요소망에 대해서 수행하였고 auto-correlation 함수의 d값은 1.0을 사용하였다.

예제의 형태는 위의 그림 6과 같다. 기본 예제와 마찬가지로 하중으로는 상부에 등분포 하중을 작용시켰다. $(x, y)=(10, 2)$ 점에서의 분산계수의 값을 auto-correlation 함수의 상관관계거리 d값의 증가에 따라 도시해 보면 아래의 그림 8과 같다.

d값의 증가에 따라 분산계수의 값이 임의장 함수의 표준편차값인 0.1로 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다.

표 1. 사용요소에 따른 변위에 대한 표준편차의 차이

경우	사용요소 및 갯수	변위의 기대치	분산계수	분산계수에 따른 변위의 표준편차
①	4절점 20 요소	-0.82708×10^{-1}	0.05898	4.878118×10^{-3}
②	4절점 5 요소	-0.63877×10^{-1}	0.05414	3.458301×10^{-3}
③	8절점 5 요소	-0.91160×10^{-1}	0.05417	4.938137×10^{-3}
④	9절점 5 요소	-0.91876×10^{-1}	0.05422	4.981516×10^{-3}
정 확 해		-0.92857×10^{-1} (휨변위 + 전단변위)		

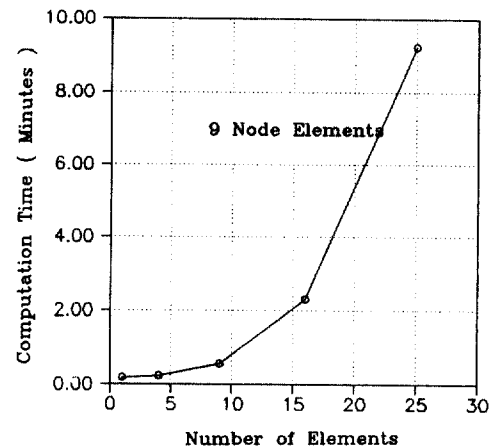
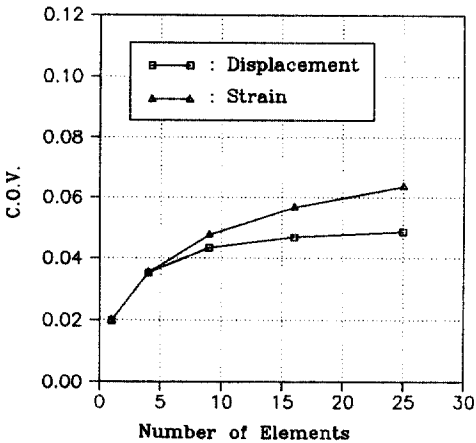
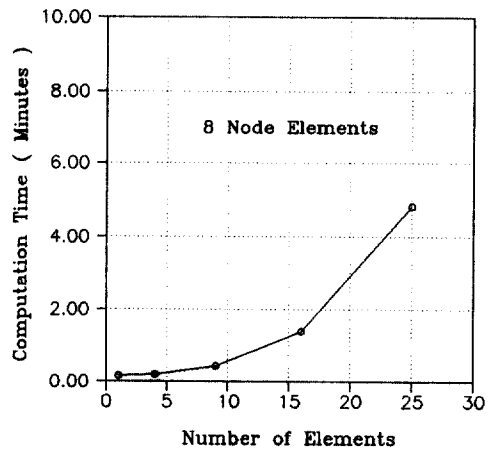
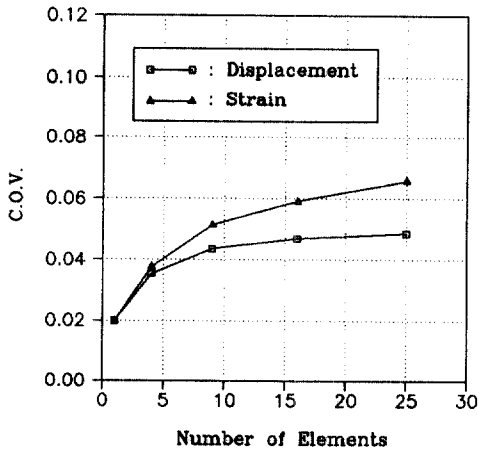
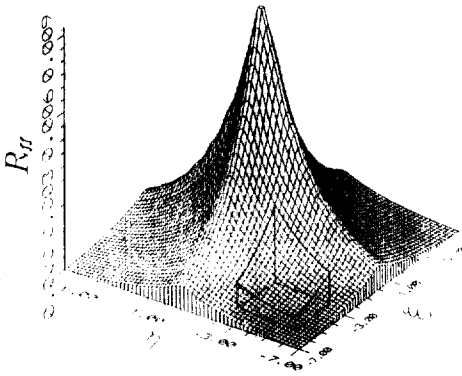


그림 7. 분산계수값 및 해석시간의 비교(8, 9절점 요소)

표 1은 가로 10, 세로 2의 형태를 가지는 외팔보에 대한 해석으로 경우 ①은 경우 ②, ③의 8, 9절점 요소 하나를 네개의 4절점 요소로 생각하고 비교해 본 것이다. 이 표는 각 사용 요소에 따른 해석결과의 특성을 보여주고 있다. 즉 4절점 요소는 경우 ①과 같이 분산계수의 값이 다른 경우보다 크게 나타난다.

이는 사용요소의 수가 많아 임의장 함수 $f(x)$ 에 대한 고려가 양호하기 때문이다. 그러나 변위의 표준편차는 경우 ②, ③의 8, 9절점 요소보다도 오히려 작은 값을 나타내고 있다. 이 결과는 확정론적 유한요소 해석의 결과(기대치)에 따라서 추계론적 해석결과가 영향을 받고 있는 것을 보여주고 있다. 즉 확정론적



Auto-correlation function ($d = 3.0$)

그림 8. 상관관계거리 d 에 따른 분산계수의 값의 변화 (외팔보)

유한요소해석에서 더 좋은 결과를 보이는 8, 9절점 요소들을 추계론적 유한요소해석에서 사용함으로써 추계론적 유한요소해석 또한 좋은 결과를 얻을 수 있다는 것이다.

이에 따른 또 다른 이점을 보면 다음과 같다. 8, 9절점 요소의 경우 고차의 형상함수를 사용하기 때문에 4절점 요소 같은 저차의 형상함수를 사용하는 요소보다 구조물의 거동을 잘 표현해 준다. 일반적으로는 고차의 형상함수를 사용하는 요소의 경우 강성도가 감소하므로 확정론적 유한요소해석으로 얻게 되는 응답의 평균치가 증가하게 된다. 또한 8, 9절점 요소는 4절점 요소에 비해 구조계내에 사용하는 요소의 수가 작아도 좋은 결과를 얻을 수 있으므로 각 요소에 대해서 반복적으로 계산을 해야 하는 해석에서 해석시간을 줄일 수 있다는 장점이 있다. 즉, 고차의 형상함수를 가지는 요소를 사용하므로써 해석의 정확도를 증가시키는 물론 해석에 필요한 시간을 감소시킬 수 있다. 그림 5와 그림 7의 비교를 통해서 위의 사실을 알 수 있다. 이들 해석은 그림 1의 구조에 대한 것이다. 그림 7에서 사용한 상관관계거리 d 의 값은 2.0이다.

6. 결 론

본 논문은 가중적분법에 의한 추계론적 유한요소 해석의 확장에 관한 것으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

제안된 가중적분법에 의한 추계론적 유한요소 해석에서는 모든 종류의 평면요소를 사용할 수 있도록 되었다. 이에 따라 확정론적 유한요소해석에서 사용된 요소망은 추계론적 해석에서도 그대로 사용할 수 있게 되었으며 해석결과들은 합리적인 범위내에서 요소망의 세분화 정도에 큰 영향을 받지 않고 좋은 결과를 나타내어 해석 시간상의 경제성이 있으며(그림 5) 고차의 형상함수를 사용할 경우 저차의 형상함수를 사용할 경우에 비해서 정확도가 증가함과 아울러 해석에 필요한 시간이 감소하는 바람직한 결과를 얻었다(그림 7).

구조물의 형상이 복잡하여 요소망에 CST요소와 사변형요소를 혼용할 경우, CST요소의 Be 행렬은 오직 상수만을 요소로 가지는 특수한 형태가 되므로 해석시 CST요소와 사변형요소를 조합한 경우의 해석도 가능할 것이다.

참 고 문 헌

1. Deodatis, G., "Weighted Integral Method. I: Stochastic Stiffness Matrix". *J. Engrg. Mech.* ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991, pp. 1851-1864.
2. Deodatis, G. and Shinozuka, M., "Weighted Integral Method. II: Response Variability and Reliability". *J. Engrg. Mech.* ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991, pp. 1865-1877.
3. Deodatis, G., Wall, W. and Shinozuka, M., "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method". In Spanos, P.D. and Brebbia, C.A., editors, "Computational Stochastic Mechanics", 1991, pp. 395-406.
4. Kleiber, M. and Hein, T.D., *The Stochastic Finite Element Method*. John Willy & Sons. pp. 3-19, 1992, pp. 83-96.
5. Lawrence, M.A., "Basis Random Variables in Finite Element Analysis". *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp. 1849-1863.
6. Shinozuka, M., "Structural Response Variability". *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 113, No. 6, 1987, pp. 825-842.
7. Shinozuka, M. and Deodatis, G., "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems". *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 114, No. 3, 1988, pp. 499-519.
8. Takada, T., "Weighted Integral Method in Stochastic Finite Element Method". *Journal of Proba-*

- bilistic Engineering Mechanics*, Vol. 5, No. 3, 1990, pp. 146-156.
9. Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis". *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 114, No. 8, 1988, pp. 1335-1354.
10. Vanmarche, E. and Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams". *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 109, No. 5, 1983, pp. 1203-1214.

(接受：1993. 2. 26)