

## AFOSM 방법에 의한 하수관망의 신뢰성 분석

## Reliability Analysis of Storm Sewer System by AFOSM Method

김문모\* · 이원환\*\* · 조원철\*\*\*

Kim, Mun Mo · Lee, Won Hwan · Cho, Won Cheol

## Abstract

The purpose of this study is to analyze the reliability of storm sewer system and AFOSM method is applied on Sinjeong detention basin area to decide the applicability of AFOSM method. The Rackwitz Algorithm, which is suitable for minimizing the error due to non-linearity, is used to find the failure point. The performance functions are established to calculate the risk, rational formula is used to determine the load and Manning equation and Darcy - Weisbach equation are used to determine the sewer capacity, and the results are 0.119, 0.127, respectively. The Risk - Safety Factor relation for each return period is derived and the designing of storm sewer system based on reliability analysis is enabled.

## 요 지

본 연구는 하수관망의 신뢰성을 분석하기 위한 것으로, AFOSM 방법의 적용성을 판단하기 위해 이 기법을 신정유수지 유역에 적용하였다. 파괴점을 찾기 위한 방법으로는 비선형성에 의한 오차를 줄일 수 있는 Rackwitz Algorithm을 이용하였다. 위험도를 산정하는데 필요한 실행함수를 설정하기 위해 하중을 결정하는 데는 합리식을 사용하였고, 용량을 결정하는 식으로는 Manning 의 식과 Darcy - Weisbach 식의 2가지를 이용하여 위험도를 구하였으며, 위험도는 각각 0.119, 0.127로 나타났다. 또한, 재현기간별 Risk - Safety Factor 관계를 유도하여 신뢰성 분석에 기초한 하수관망의 설계를 할 수 있도록 하였다.

## 1. 서 론

공학적인 설계에 자주 사용되고 있는 신뢰도 분석방법은 주로 구조물의 안전여부를 판단하는데 사용되어 왔다. 최근에는 수자원 시스템에 대한 수문학적 사상의 영향을 평가하고 적절하게 수행되도록

시스템의 주요 변수를 결정하는 과정인 수문학적 설계에도 적용되고 있다. 이와 같은 수문학적인 설계에는 변수들의 위험도 또는 불확실성이 필수적으로 내재되어 있으며, 이의 영향을 분석하기 위하여 여러가지 방법들이 제안되어 있다. 즉, 직접적분법(Direct Integration Method), Monte Carlo Simulation법, MVFOSM법(Mean Value First Order Second Moment Method), AFOSM법(Advanced First Order Second Moment Method) 등이다. 각 방법

\* 정회원 · 신구전문대학 토목과 전임강사

\*\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 교수

\*\*\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 부교수

들은 나름대로의 장단점을 가지고 있으나 본 논문에서는 여러가지 신뢰도 분석방법 중 최근에 많이 사용되고 있으며, 파괴점을 찾기 위한 Taylor series의 확장에서 1계 위험도의 산정을 할 경우 비선형성에 의한 오차를 줄일 수 있는 장점을 가지고 있는 AFOSM 방법을 이용하여 하수관망의 신뢰성을 평가한다. 하수관망의 신뢰성 분석을 하기 위하여는 먼저 파괴(Failure)에 대한 정의를 하여야 하며, 본 논문에서 파괴란 하수관의 홍수소통능력 즉, 용량(Capacity)이 하수관으로 유입되는 홍수량 즉, 하중(Load)을 초과하는 기능 수행상의 파괴(Performance Failure)를 의미하기로 한다. 하수관의 용량을 결정하는 데는 여러가지 식을 이용할 수 있으나, 본 논문에서는 하중을 결정하는 식으로 합리식을 사용하기로 하며, 용량을 결정하는 식으로는 Manning의 방정식과 Darcy - Weisbach의 공식을 이용하여 선정유수지 유역의 하수관망의 위험도를 비교, 분석하기로 한다. 또한, 위험도와 하수관의 용량을 하수관에 가해지는 하중으로 나눈 안전율 개념을 가진 Safety Factor와의 관계를 유도해 위험도의 객관적인 평가를 하기로 한다.

## 2. 신뢰성 분석

### 2.1 신뢰성의 정의

공학시스템과 관계된 위험도란 시스템이 설계된 기능을 수행하지 못할 확률을 말한다. 공학시스템에서, 시스템파괴의 개념은 일반적으로, 시스템에 작용하는 하중(Load), L이 시스템의 저항능력(Resistance Capacity), R을 초과하는 것으로 정의된다. 따라서, 시스템 위험도,  $R_s$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$R_s = 1 - R_f = P_r(L > R) \quad (2.1)$$

여기서,  $P_r(x)$ 는 사건  $x$ 가 발생할 확률이며,  $R_f$ 은 시스템의 신뢰도이다.

시스템의 파괴위험도를 산정하기 위한 간편한 방법은 시스템의 기본변량(즉, 시스템을 설명하는 자료, 모형의 매개변수, 모형 보정계수)을 하중과 저항에 연관시킨 시스템 실행함수,  $Z$ 를 이용하는 것이다. 실행함수는 음의 값이 시스템파괴를 나타내

도록 하는 수학적, 예를 들어,  $R - L, (R/L) - 1, \ln(R/L)$  등으로 나타낼 수 있다. 따라서, 시스템의 위험도는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$R_s = P_r(Z < 0) \quad (2.2)$$

여기서,  $Z = g(x_1, x_2, \dots, x_p) = g(\underline{x})$

$\underline{x}$  = 시스템 기본변량의 벡터

$p$  = 시스템에서 기본변량의 수

파괴확률, 즉 시스템의 위험도는 다음 식(2.3)과 같이 표현된다.

$$R_s = \int_0^{\infty} \int_0^l f_{R,L}(r, l) dr dl \quad (2.3)$$

여기서,  $f_{R,L}(r, l)$ 은  $R$ 과  $L$ 의 결합 확률밀도 함수(jpdf)이다. 만일, 저항  $R$ 이 하중  $L$ 에 통계학적으로 독립이라면 식 (2.3)은 다음과 같이 간단하게 쓸 수 있다.

$$R_s = \int_0^{\infty} f_L(l) \left[ \int_0^l f_R(r) dr \right] dl \quad (2.4)$$

실행함수  $Z$ 를 사용하여 식 (2.2)의 위험도를 다시 쓰면, 식 (2.5)와 같다.

$$R_s = P_r(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 f_Z(Z) dZ \quad (2.5)$$

따라서, 만일  $Z$ 가 정규분포화 되어 있다면 식 (2.6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (2.6)$$

여기서,

$$\beta = \frac{\mu_Z}{(\text{Var}(Z))^{1/2}} \quad (2.7)$$

식 (2.7)에서  $\beta$ 는 신뢰도 지수(Reliability Index)이며,  $\mu_Z$ 는 평균,  $\text{Var}(Z)$ 는 분산이다.  $\Phi(\beta)$ 는  $\beta$ 에 따른 누가 정규분포함수이며,  $\beta$ 가 증가할수록 그 값도 증가하므로 따라서 신뢰도도 증가한다. 만일,  $L$ 과  $R$  이 정규분포를 하고, 실행함수  $Z$ 를  $R - L$ 로 하면,  $Z$ 도 정규분포를 갖는다. 따라서,

$$\beta = \frac{(\mu_R/\mu_L) - 1}{((\mu_R/\mu_L)^2 \Omega_R^2 + \Omega_L^2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

여기서,  $\Omega$ 는 변동계수( $\sigma/\mu$ )이다. 만일,  $L$ 과  $R$ 이

대수정규분포를 이룬다면,

$$\beta = \frac{\ln[(\mu_R/\mu_L)((1+\Omega_L^2)/(1+\Omega_R^2))^{1/2}]}{[\ln((1+\Omega_L^2)/(1+\Omega_R^2))]^{1/2}} \quad (2.9)$$

변동계수  $\Omega$ 가 매우 작은 경우, 식 (2.9)의 1계 근사치는 식 (2.10)과 같다.

$$\beta = \frac{\ln(\mu_R/\mu_L)}{(\Omega_L^2 + \Omega_R^2)^{1/2}} \quad (2.10)$$

위에서 정의된 변수들에 대한 확률값을 도시하면 그림 2.1-2.4와 같다.

그림 2.1은 R과 L의 확률 밀도함수를 나타내는 것으로, 주어진 위험하중,  $L=A$ 인 경우에,  $R < A$ 인 누가확률은 A의 왼쪽,  $f_R(r)$ 밀인 빗금친 부분으로 나타난다. 그림 2.2는 또 다른  $L=A$  값에서  $f_R(r)$ 의 빗금친 부분이  $F_R(L)$ 의 누가확률함수로 나타난다는 것을 의미한다.  $L=A$ 에 대한 파괴확률은  $F_L(L)=B$ 와 그림 1에서 빗금친 부분을 곱한 것이다. 따라서, 전체 위험도는  $F_L(L)$ 과 R의 누가확률밀도함수인  $F_R(L)$ 의 곱의 총합으로 나타낼 수 있으며, 이는 식 (2.11)과 같다.

$$P_f = \int_a^b f_L(l) \cdot F_R(l) dl \quad (2.11)$$

$f_L(l) \cdot F_R(l)$ 의 곱에 대한 곡선이 그림 2.3에 나타나 있으며, 위험도는 이 결과곡선의 아래부분의 면적이다. 그림 2.4는 실행함수 Z를 사용하여 위험도 관계를 보다 자세히 나타내고 있다. 식 (2.5)에 의하면, 위험도는 수직축  $Z=0$  왼쪽에 빗금친 부분의 면적이다. 신뢰도지수  $\beta$ 는 Z의 변동계수의 역수, 즉  $\beta=1/\Omega_Z$ 이다. 이것은 그림 2.4에서도 나타나듯이 표준편차의 단위로 측정되어진 원점( $Z=0$ )에서부터 평균  $\mu$ 까지의 거리를 의미한다.

## 2.2 Advanced First-Order Second Moment (AFOSM) Method

최근의 연구는 MVFOSM(Mean Value First-Order Second Moment) 방법의 단순성과 장점을 유지하려고 노력해 왔으나, 아직도 결점들이 많이 발견되고 있다. 그 결과 AFOSM 방법을 개발하였고, AFOSM 방법의 기본개념은 Hasofer와 Lind(1974)<sup>(1)</sup>에 의해 최초로 제안되었으며, Rackwitz(1976)<sup>(2)</sup>가

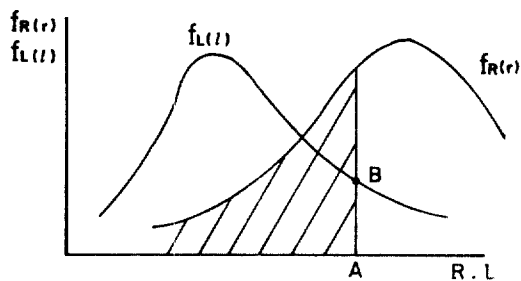


그림 2.1 저항과 하중에 대한 확률밀도함수.

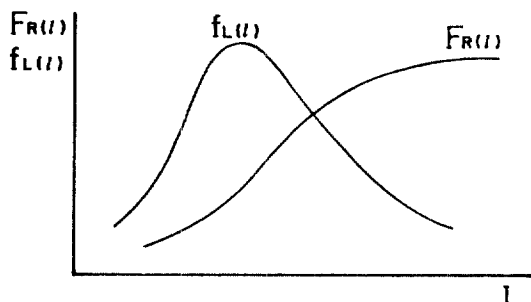


그림 2.2 저항의 누가분포함수와 하중의 확률밀도함수.

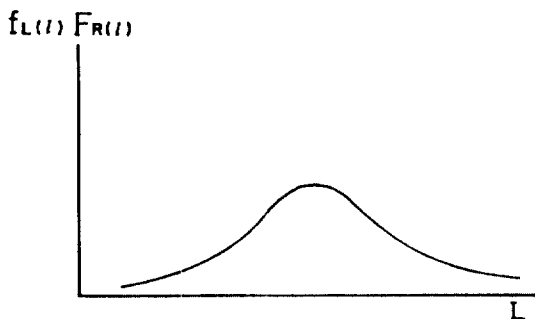


그림 2.3 파괴의 확률밀도함수.

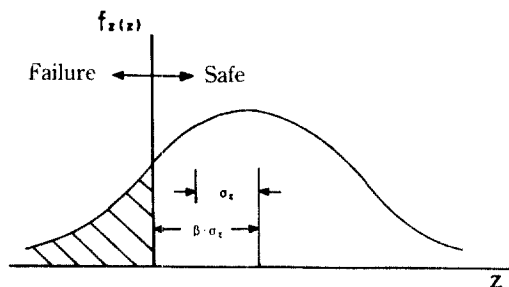


그림 2.4 실행함수 Z의 확률밀도함수.

완전한 AFOSM 방법을 만들었다. 이 방법의 요점은 파괴평면상의 가능파괴점( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ , ...,  $x_p^*$ )에서 실행함수,  $g(x^*)$ 가 0일때 Taylor 급수확장을 통해 실행함수를 선형화하는데 있다. 통계학적으로 독립인 기본변량일 경우에 파괴점에서 1 계 Taylor 급수에 의해 근사되는 실행함수의 기대값과 분산은 다음과 같다.

$$E[Z] = g(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^p C_i(\bar{x}_i - x_i^*) \quad (2.12)$$

$$VAR(Z) = \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^p C_i^2 VAR(x_i) \quad (2.13)$$

$$\sigma_Z = \left[ \sum_{i=1}^p (C_i \sigma_i)^2 \right]^{1/2} \quad (2.14)$$

여기서,  $C_i$ 는 이 경우에, ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ , ...,  $x_p^*$ )에서 계산되는  $\partial g/\partial x_i$ 이다.

$\sigma_Z$ 의 식은 다음과 같은 선형형태로 다시 쓸 수 있다.

$$\sigma_Z = \sum_{i=1}^p \alpha_i C_i \sigma_i \quad (2.15)$$

여기서,  $\alpha_i$ 는 민감도 계수이며, 다음식으로 부터 계산된다.

$$\alpha_i = \frac{C_i \sigma_i}{\left[ \sum_{j=1}^p (C_j \sigma_j)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.16)$$

식 (2.12)와 (2.14)를 식 (2.7)에 대입하면 AFOSM 방법에서의 신뢰도 지수는 다음과 같이 된다.

$$\beta = \frac{g(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^m C_i(\bar{x}_i - x_i^*)}{\sum_{i=1}^p \alpha_i C_i \sigma_i} \quad (2.17)$$

### 2.2.1 파괴점을 찾기 위한 방법

앞에서의 식들은 아주 간단하며 단순한 것처럼 보이지만 파괴점의 결정은 일반적으로 쉬운 작업이 아니다. 따라서, 파괴점을 결정하기 위해서 여러가지 반복기법이 제안되어 왔다(예를 들어, Rackwitz(1976)<sup>(2)</sup>와 CIRIA(1977)<sup>(3)</sup>). Rackwitz 방법은 Ang과 Tang(1984, p. 361)<sup>(4)</sup>에 의해 제안된 AFOSM 방법의

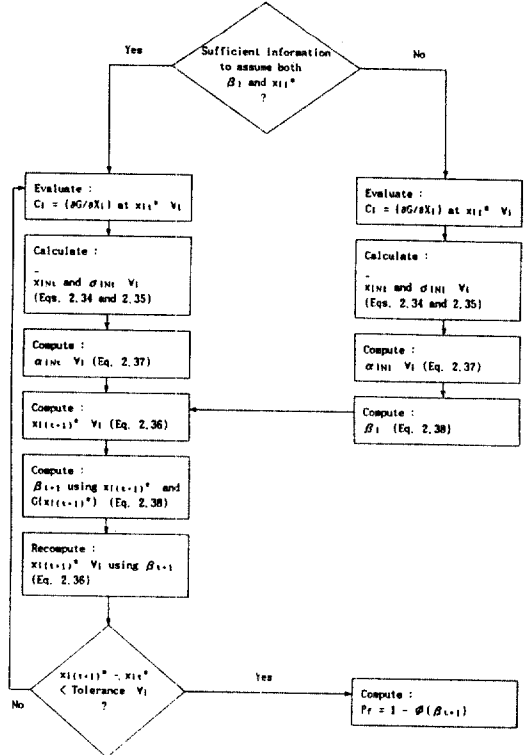


그림 2.5 Rackwitz 반복기법의 흐름도.

요약에도 나타나듯이 표준적인 반복기법으로 알려져 있다. Rackwitz 반복기법의 흐름도가 그림 2.1에 나타나 있다.

위와 같은 Rackwitz Algorithm의 개요를 설명하면 다음과 같다.

1. system의 실행함수  $G(x_i)$ 를 정의한다.
2.  $x_i$ 에 대한 통계량을 대입한다.
3.  $\beta$ 와  $x_i^*$ 의 초기 시도값을 가정하고,  $\beta$ 와  $x_i^*$ 의 초기 시도값을 결정하는 자료가 부적절하다고 판단되면  $x_i^*$ 에 평균값을 대입한다.
4.  $x_{i+1}^*$ 에서 모든  $i$ 에 대한 편미분  $C_i = \partial C_i / \partial X_i$ 를 구한다.
5. 식 (2.34)와 (2.35)에 의해  $\bar{x}_{iN}$ 와  $\sigma_{iN}$ 를 계산한다.
6. 식 (2.37)에 의해  $\alpha_{iN}$ 를 구한다.
7. 식 (2.36)에 의해  $x_{i+1}^*$ 의 새로운 시도값을 계산하고, 만일  $\beta_i$ 가 가정 되지 않았다면 초기값으로는 식 (2.38)를 이용하여  $\beta_i$ 를 구한다.

8. 단계 7.에서 얻어진 새로운 시도값  $x_{it}^*$ 를  $G(x_{it}^*)=0$ 에 대입하고 식 (2.38)를 이용하여 새로운 시도값  $\beta_i$ 를 구한다.
9. 식 (2.36)을 이용하여 새로운  $\beta_i$ 에 대한  $x_{it}^*$ 를 다시 계산한다.
10. 수렴한도내에 들어올 때 까지 단계 4. - 단계 9.를 반복한다.
11. 식 (2.6)에 의해 파괴확률  $P_f$ 를 계산한다.

최근에 와서 제한적인 비선형 최적화의 사용이 반복기법의 선택에서 가장 많이 사용되고 있다. Shinozuka(1983)<sup>(5)</sup>와 Cheng(1982)<sup>(6)</sup>의 제한적 비선형 최적화 기법은 아래와 같다. 만일 기본변량들이 표준화되었다면, 즉

$$y_i = (x_i - \bar{x}_i) / \sigma_i \quad (2.18)$$

표준화된 기본변량,  $y_i$ 는 평균이 0이고 표준편차가 1이다. Shinozuka(1983)<sup>(5)</sup>는 다음과 같은 최적화문제를 풀었다.

$$\text{Minimize : } \gamma_0 = (\underline{y}^T \underline{y})^{1/2} \quad (2.19)$$

$$\text{Subject to : } g_i(\underline{y}) = 0 \quad (2.20)$$

여기서,  $\underline{y}^T$  = 표준화 된 기본변량 matrix의 Transpose

이 문제를 풀기위해 Lagrange multiplier method를 사용하면, Lagrangian은 식 (2.21)과 같다.

$$L_\lambda = (\underline{y}^T \underline{y})^{1/2} + \lambda g_i(\underline{y}) \quad (2.21)$$

여기서,  $\lambda$  = Lagrangian multiplier

$\partial L_\lambda / \partial \underline{y} = \partial L_\lambda / \partial \lambda = 0$ 으로 놓으면,  $\underline{y}^*$ 와  $\lambda^*$ 의 해는 식 (2.22)로 부터 얻어진다.

$$\underline{y}^* = -\lambda^* \underline{\gamma} \underline{G}_* \quad (2.22)$$

여기서,  $\underline{\gamma} = \gamma_0$ 의 최소치

$\underline{G}_* = \underline{y}^*$ 에서 계산된  $\partial g_i / \partial y_i$ 의 vector  $\underline{\gamma}$ 에 대해 풀면

$$\underline{\gamma} = \pm \frac{\underline{y}^{*T} \underline{G}_*}{(\underline{G}_*^T \underline{G}_*)^{1/2}} \geq 0 \quad (2.23)$$

시스템의 실행함수,  $Z$ 는 표준화된 기본변량,  $y_i$ , 즉,  $Z = g_2(\underline{y})$ 에 의해 표현될 수 있다. 파괴면에서 1계 Taylor 급수확장을 하면

$$E[Z] \approx g_2(\underline{y}^*) - \sum_{i=1}^p G_{2i} y_i^* \quad (2.24)$$

$$\text{VAR}(Z) = \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^p C_i^2 G_{2i} \quad (2.25)$$

여기서,  $G_{2i} = \underline{y}^*$ 에서 계산된  $\partial g_2 / \partial y_i$ 이다. 파괴면에서,  $G_2(\underline{y}^*) = 0$ 이므로 신뢰도 지수(Reliability Index),  $\beta$ 는 다음과 같이 된다.

$$\beta = - \frac{\sum_{i=1}^p G_{2i} y_i^*}{\left[ \sum_{i=1}^p G_{2i}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.26)$$

식 (2.26)을 다시 쓰면 식 (2.27)과 같다.

$$\beta = - \frac{\underline{G}_2 \underline{y}^*}{(\underline{G}_2^T \underline{G}_2)^{1/2}} \quad (2.27)$$

Shinozuka(1983)<sup>(5)</sup>는 식 (2.23)과 식 (2.27)을 비교하여 만일  $g_1(\underline{y})$ 를  $g_2(\underline{y})$ 로 놓는다면, 신뢰도지수 (또는 그것의 절대값)는 시스템의 평균상태(즉, 모든 기본 변량들이 그들의 평균값 일때)와 파괴면 사이에 표준화된 공간에서 가장 짧은 거리로 나타난다고 했다. 때문에 Lagrange multiplier method를 포함하여, 최근에 사용되는 비선형 programming 방법을 위해 유용한 최적화 기법은 파괴점의 결정에 사용될 수 있다. 예를 들어, Wang 등(1983)<sup>(7)</sup>은 파괴점을 찾기 위해 반복 "Redesign Travel" 식을 병용한 Lagrange Multiplier Approach를 사용하였다. 그들이 연구한 문제에서, "Redesign Travel" 최적화 기준 기법은 일반적으로 5-8 회 반복에서 얻어지는 수렴치가 가장 효율적이었다. 또한, 그들은 수렴속도가 문제의 크기에 관계없이 대부분 독립적으로 나타난다는 것을 알았다. Cheng의 제한 선형 Programming 기법은 또다른 문제를 가진다. Cheng은 파괴면  $g(\underline{x}^*) = 0$  상의 점에서 식 (2.17)은 다음과 같이 쓸 수 있다고 했다.

$$\sum_{i=1}^p C_i (\bar{x}_i - x_i^* - \alpha_i \beta \sigma_i) = 0 \quad (2.28)$$

이 식을 풀면 다음과 같이 된다.

$$\bar{x}_i - x_i^* - \alpha_i \beta \sigma_i = 0 \text{ (모든 } i \text{에 대해)} \quad (2.29)$$

때문에, 식 (2.29)는 파괴점  $x^*$ 를 정의하며, 같은 제한조건을 가지는 급수로 생각될 수 있다.

$$\text{Min } |g(x^*)| \quad (2.30)$$

식 (2.29)에 종속하는 식 (2.30)의 목적함수를 선정하고 식 (2.16)과 식 (2.17)에 의해 각각 주어지는  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 를 정의함으로써 파괴면을 구할 수 있다. 이 문제는 같은 수의 제약조건과 변량을 가지고 있지만  $\beta$ 와  $\alpha_i$ 는 각 점에서 다르기 때문에 간단한 해를 주지는 않으므로, 각 점에서, 새로운 최적화 문제를 풀어야 한다. Cheng(1982)<sup>(6)</sup>은 Generalized Reduced Gradient(GRG)기법, (Abadie와 Carpentier, 1969)<sup>(8)</sup>을 이용하여 파괴점과  $\beta$ 를 구하였다. 다른 모든 비선형 Programming 기법과 마찬가지로, GRG는 전체적인 최적화를 보장하지는 못하며, 따라서, Algorithm 내에 여러개의 다른 시작점을 필요로 한다. 다행히, Cheng(1982)<sup>(6)</sup>은 만일  $|g(x)|$ 의 최소치가 0에 가까워지면,  $\beta$ 와  $x^*$ 의 해는 일반적으로 전체적인 최적값이라는 것을 발견하였다. 때문에, 만일 목적함수가 충분히 0에 가깝다면, 적절한  $\beta$ 값이 결정되었다고 결론지을 수 있다. Cheng의 GRG 방법의 강점은 GRG 기법의 Robustness에 있다. Sandgren과 Ragsdell(1980)<sup>(9)</sup>은 비선형 최적화방법에서 기존 Computer Code의 재검토와 비교를 행하였으며, GRG의 기본 Code는 다른 방법들 보다 훨씬 효율적이고, 다양한 문제도 해결할 수 있다는 것을 발견했다. 따라서, Cheng의 GRG 방법을 사용한 AFOSM 방법은 정확하고, 빠르게 수학적으로 표현되어야 하는 문제에서 유용하게 사용될 것이다.

### 2.2.2 AFOSM 방법에 기초한 확률계산

MVFOSM 방법에서와 마찬가지로  $\beta$ 를 포함한 확률상태의 관점에서 보면, 신뢰도에 관한 정보는 빈약하며 Tchebychev 부등식의 형태를 가진다(Rackwitz와 Fiessler, 1978)<sup>(10)</sup> 그러나, MVFOSM 방법은 달리 AFOSM 방법에서는 만일 기본변량의 분포가정이 채택된다면 보다 정확한 확률상태를 만들 수 있다. 모든 기본 변량들이 정규분포하는 선형파괴면에서 파괴확률(위험도)은 식 (2.6)에 의해 정확히 주어진다. 모든 기본변량들이 정규분포하는 볼록 파괴면에서 파괴확률(위험도)은 다음과 같이 제한된다.

$$1 - \Phi(\beta) \leq R_s \leq 1 - X_p^2(\beta^2) \quad (2.31)$$

여기서,  $X_p^2(\cdot)$ 은 자유도가  $p$ 인  $\chi^2$  분포이다(Ha-sofer, 1974)<sup>(11)</sup> 구조적인 문제에서 Rackwitz(1976)<sup>(2)</sup>에 따르면 만일  $\beta$  (즉, 시스템의 평균에서 파괴면까지의 거리함수)가 하나의 최소치를 가지면, 하한치는 일반적으로 1 계 근사의 정도내에서 상대적으로 좋은 확률계산치가 된다고 했다. 하수관거의 신뢰도평가에 대한 경험이 적으므로, 수리학적인 문제들은 하나의 거리함수(Distance Function) 최소치를 가지는 것으로 나타날 수도 있으며, 따라서 하한치는 구조적인 문제에서와 마찬가지로 수리학적 시스템에서도 좋은 위험도 계산치로 나타난다.

그러나, 대부분의 실제 시스템에서는 기본변량들이 정규분포를 하지 않으므로, 비정규 변량들은 대응하는 정규분포 변량들로 변환하는 것이 좋다. Rackwitz(1976)<sup>(2)</sup>는 비정규분포의 누가분포함수(CDF)와 확률밀도함수(PDF)의 값들을 파괴점에서 대응하는 정규분포와 같도록 하는 변환을 제안하였다. 즉,

$$F_{xi}(X_i^*) = \Phi\left(\frac{X_i^* - \bar{X}_i^N}{\sigma_i^N}\right) \quad (2.32)$$

$$f_{xi}(X_i^*) = f^N\left(\frac{X_i^* - \bar{X}_i^N}{\sigma_i^N}\right) / \sigma_i^N \quad (2.33)$$

여기서,  $F_{xi}(X_i^*)$ 와  $f_{xi}(X_i^*)$ 는 각각  $X_i$ 와  $X_i^*$ 의 CDF와 PDF이고,  $\Phi(\cdot)$ 와  $f^N(\cdot)$ 은 각각 표준정규 분포의 CDF와 PDF이다. 이렇게 하기 위하여, Rackwitz는 1 계 Taylor 급수 확장에 의해 비정규 분포함수를 근사하였다.

때문에, 대응하는 정규분포의 평균,  $\bar{X}_i^N$ 과 표준편차,  $\sigma_i^N$ 은 다음과 같이 된다.

$$\bar{X}_i^N = X_{iN}^* - \Phi^{-1}(F_{xi}(x_i^*)) \sigma_i^N \quad (2.34)$$

$$\sigma_i^N = \frac{f(\Phi^{-1}(F_{xi}(x_i^*)))}{f_{xi}(X_i^*)} \quad (2.35)$$

또한, 비선형 최적화 문제에서의 제약조건은 다음과 같다.

$$\bar{X}_i^N - X_i^* - \alpha_i, \beta \sigma_i^N = 0 ; \text{ 모든 } i \text{에 대해} \quad (2.36)$$

여기서,

$$\alpha_i = \frac{C_i \sigma_i^N}{\left[ \sum_{j=1}^p (C_j \sigma_j^N)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.37)$$

$$\beta = \frac{g(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^p C_i (\bar{x}_i^N - x_i^*)}{\sum_{i=1}^p \alpha_i C_i \sigma_i^N} \quad (2.38)$$

Rackwitz와 Fiessler는 비정규변량의 이러한 정규변환은 1 계 이론의 정도내에서 정확한 값을 갖는다고 했다. 더구나, Yen 등(1986)<sup>(12)</sup>과 Cheng(1982)<sup>(6)</sup>은 변환된 정규변량을 사용한 AFOSM 방법과 식 (2.31)의 하한치를 취한 위험도, 그리고 간단한 몇개의 예제에서 얻은 엄밀해를 비교하였다. 그 결과 AFOSM 방법이 위험도가 작은 경우(즉,  $R_s < 0.001$ )에서도 엄밀해와 매우 근접한 위험도 값을 준다는 것을 알았다. Ang과 Tang(1984, p. 383)<sup>(4)</sup>은 AFOSM 방법에 의한 위험도 값이 실제적인 공학문제에서 나타나는 전형적인 비선형 실행함수를 가진 다양한 문제에서도 아주 정확한 값을 준다고 했다. 때문에, 식 (2.31)에서 하한치를 위험도계산값으로 하는 것은 모든 기본변량들이 정규분포하거나 정규분포로 변환된 불룩파괴면을 가진 시스템에서 1 계 근사의 정도내에서 아주 정확함을 나타낸다.

### 2.2.3 AFOSM 방법의 장점

수리구조물의 불확실성 산정에서 AFOSM 방법의 성공적인 사용예와 이 방법의 일반적인 특성을 고려해 볼 때, 상대적인 단순성, 정확성, Robustness 때문에, AFOSM 방법이 공학 시스템설계 문제에 가장 적절한 신뢰도 분석방법일 것이다. 이러한 생각은 Rackwitz(1976)<sup>(2)</sup>, CIRIA(1977)<sup>(3)</sup>와 같이 구조적인 안전 Code에서 과학적인 사고를 기본으로 AFOSM 방법의 사용을 강하게 지지한 구조공학 연구자들에 의해서도 반영되었다. 따라서, AFOSM 방법은 설계문제에 적용될 수 있고, 실시간 홍수예보 불확실성 분석에서도 사용될 것이다. 홍수예보 문제에서 AFOSM 방법의 주된 장점은 강우-유출 과정의 여러가지 다른 모형 구성에서도 작업할 수 있도록 하는 Robustness에 있다. 대부분의 AFOSM 방법은 모든 기본 변량들이 상관되어 있지 않다고 가정한 것에 주목하여야 한다. AFOSM 방법의 기본변량들의 상관성을 다루는 방법들이 존재하지만

(예를 들어, Ang과 Tang, 1984)<sup>(4)</sup> 실제적인 단순한 관점으로 볼 때, 이러한 것들은 가능한 한 피하는 것이 좋다.

Garen과 Burges(1981)<sup>(13)</sup>는 매개변수의 상관성을 고려한 Monte Carlo Simulation의 결과가 상관성을 무시한 결과와 크게 차이하지 않는다고 했다. 때문에, 기본변량들 사이에 약간의 상관성이 있다는 가정은 AFOSM 위험도 계산치에 크게 영향을 주지 않는다고 볼 수 있다.

## 3. 실행함수의 구성 및 적용

### 3.1 실행함수의 구성

앞에서 설명한 실행함수  $Z$ 를 구하기 위해서는 우선 시스템에 작용하는 하중(Load)과 저항(Resistance)를 결정하여야 한다. 따라서, 수문시스템 특히 하수관망의 경우, 기능 수행상의 파괴란 침투홍수량( $Q_L$ )이 하수관의 용량( $Q_R$ )을 초과하는 것으로 정의하면 실행함수  $Z = Q_L - Q_R$ 이 된다. 시스템의 침투홍수량을 구하는 데는 여러가지 식을 사용할 수 있으나, 본 연구에서는 이용하는데 간편하며 적용성이 우수한 합리식을 사용한다. 즉,

$$Q_L = 0.2778 \lambda_i C i_T A \quad (\text{m}^3/\text{sec}) \quad (3.1)$$

이다.  $\lambda_i$ 는 합리식을 사용하는 데서 오는 오차를 보정하는 계수이며,  $C$ 는 유출계수,  $i_T$ 는 강우강도(mm/hr)이고,  $A$ 는 유역면적( $\text{km}^2$ )이다.

하수관의 용량을 결정하는 식으로는 여러가지가 있으나, Manning의 식을 이용하면,

$$Q_C = \frac{0.31175}{n} \lambda_m D^{8/3} I^{1/2} \quad (\text{m}^3/\text{sec}) \quad (3.2)$$

이 된다. 여기서,  $\lambda_m$ 은 Manning의 식을 이용하는데 따른 오차를 보정하는 계수이며,  $n$ 은 조도계수,  $D$ 는 관의 직경,  $I$ 는 관의 경사이다.

또한, Darcy - Weisbach 식을 사용하면,

$$Q_C = 0.3536 \lambda_n \pi g^{1/2} I^{1/2} D^{5/2} \quad (\text{m}^3/\text{sec}) \quad (3.3)$$

가 된다. 여기서,  $\lambda_n$ 은 Darcy - Weisbach 식을 사용하는 데서 오는 오차를 보정하는 계수이며,  $g$ 는 중력가속도,  $I$ 는 관의 경사,  $f$ 는 Weisbach의 저항계

표 3.1 실행함수를 구성하는 변수들의 최적분포형과 통계특성치

변수명	관직경	관경사	강우강도	유역면적	저항계수
최적분포형	4-Root	Normal	3-Root	Log-Normal	Normal
평균	2.03	0.0121	125.2	0.386	0.0226
표준 편차	1.30	0.0049	0.3868	0.721	0.0117

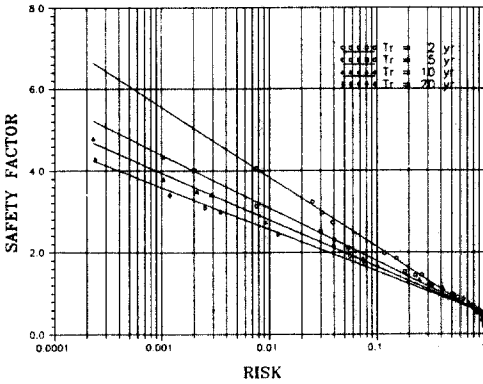


그림 3.1 신정유수지 유역의 Risk - Safety Factor 관계도.

수이며, D는 관의 직경이다.

이 두가지의 식을 조합하면 실행함수 Z는 다음과 같이 2 가지의 형태로 쓸 수 있다.

$$Z_1 = \frac{0.31175}{n} \lambda_m D^{8/3} I^{1/2} - 0.2778 \lambda_L C i_T A \quad (3.5)$$

$$Z_2 = 0.3536 \lambda_m \pi g^{1/2} I^{1/2} f^{1/2} D^{5/2} - 0.2778 \lambda_L C i_T A \quad (3.5)$$

따라서, 본 연구에서는 서로 다른 두 실행함수를 신정유수지 유역의 하수관망에 적용하여 AFOSM 방법을 통한 위험도를 산정, 비교한다. 또한, 위험도의 객관적인 평가를 위해 Risk - Safety Factor 관계를 설정해 보기로 한다.

### 3.2 적용

AFOSM 방법의 적용을 위해서는 우선 실행함수를 구성하는 변수들의 최적분포형을 알아야 한다. 최적분포형을 알기위하여 정규 분포, 극치 Type I 분포, 3변수 대수정규 분포, Pearson Type III 분포, Log-Normal 분포, 2-Root Normal 분포, 3-Root No-

rmal 분포, 4-Root Normal 분포, 5-Root Normal 분포 등의 9가지 확률분포형에 적용하였으며, 각 변수들의 최적분포형은 표 3.1과 같다.

각 변수들의 평균과 표준편차 값을 이용하여 앞에서 설명한 Rackwitz Algorithm에 적용하여 본 결과 신정유수지 유역의 하수관망의 위험도는 실행함수를 Z<sub>1</sub>으로 한 경우 0.119로, 실행함수를 Z<sub>2</sub>로 한 경우는 0.127로 각각 나타났다. 또한, 신정유수지 유역의 Risk - Safety Factor 관계를 재현기간 2년, 5년, 10년, 20년에 대하여 유도하여 본 결과가 그림 3.1에 나타나 있다.<sup>(14)</sup> 그림 3.1에 나타난 회귀 직선을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{재현기간 2년 : Risk} = \exp(0.557 - 1.348 \times \text{S.F.})$$

$$\text{재현기간 5년 : Risk} = \exp(0.883 - 1.776 \times \text{S.F.})$$

$$\text{재현기간 10년 : Risk} = \exp(1.016 - 2.008 \times \text{S.F.})$$

$$\text{재현기간 20년 : Risk} = \exp(1.160 - 2.247 \times \text{S.F.})$$

그림 3.1을 사용하여 위험도와 안전율개념을 가진 Safety - Factor와의 관계를 도입하여 신정유수지 유역의 하수관망의 설계빈도를 10년으로 보고 이식을 이용하면, 실행함수를 Z<sub>1</sub>으로 한 경우 Safety Factor는 1.566이며, Z<sub>2</sub>로 한 경우는 1.437이 된다.

### 4. 결 론

신뢰성 분석방법인 AFOSM 방법을 신정유수지 유역의 하수관망에 적용하여 얻어진 결과는 다음과 같다.

1) 신정유수지 유역의 하수관망의 위험도는 실행함수를 Z<sub>1</sub>의 형태로 한 경우 0.119, Z<sub>2</sub>로 한 경우 0.127로 나타났다. 실행함수의 설정방법에 따라 동일한 유역에서도 다른 신뢰성을 나타낼 수 있으므로 실행함수의 설정에 많은 연구가 필요하다.

2) 위험도를 산정하면 안전도 지수(Safety Factor)와 상관시켜 안전율개념에 기초한 설계를 할 수



있으며, 신정유수지 구역의 하수관망의 경우 실행 함수를  $Z_1$ 으로 한 경우 Safety Factor는 1.566이며,  $Z_2$ 로 한 경우는 1.437이다.

3) 실행함수를 구성하는 변수들의 분포형에 따른 신뢰도의 변화는 그리 크지 않으나, 더욱 정확한 신뢰성평가를 위해서는 보다 많은 분포형에 적합, 최적분포형을 찾아야 한다고 판단된다.

4) 비선형성에 의한 오차를 줄일 수 있는 Rackwitz Algorithm은 파괴점을 찾기 위한 방법으로서 적용성, 수렴성이 우수한 것으로 나타났다.

### 참 고 문 헌

1. A. M. Haosfer, and N. C. Lind, "Exact and Invariant Second - Moment Code Format", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 100, No. EM1, pp. 111 - 121, February 1974.
2. R. Rackwitz, "Practical Probabilistic Approach to Design", *Bulletin 112, Comite European du Beton*, Paris, France, 1976.
3. CIRIA, "Rationalization of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes", *Report 63*, London, 1977.
4. A. H-S. Ang, W. H. Tang, "Probability Concepts in Engineering Planning and Design : Vol. I Basic Principles, Vol. II. Decision, Risk, and Reliability", John Wiley & Sons, 1984.
5. M. Shinozuka, "Basic Analysis of Structural Safety", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 3, pp. 721-740, 1983.
6. S. T. Cheng, "Overtopping Risk Evaluation for an

*Existing Dam*", Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana - Champaign, 1982.

7. S. H. Wang, J. T. P. Yao, and W. F. Chen, "Reliability of Antenna Structures", *Recent Advances in Engineering Mechanics and Their Impact on Civil Engineering Practice*, edited by W. F. Chen and A. D. M. Lewis, Vol. II, West Lafayette, Indiana, pp. 855 - 858, 1983.
8. J. Abadie, and J. Carpentier, "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints", in *Optimization*, edited by R. Fletcher, Academic Press, London, 1969.
9. E. Sandgren, and K. M. Ragsdell, "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms : A Comparative Study", *Journal of Mechanical Design*, ASME, Vol. 102, No. 3, pp. 540 - 551, July 1980.
10. R. Rackwitz, and B. Fiessler, "Non - normal Vectors in Structural Reliability", *SFB 96 Report 29*, Technical University of Munich, pp. 1 - 22, 1978.
11. A. M. Haosfer, "Reliability Index and Failure Probability", *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 3, No. 1, pp. 25 - 27, 1974.
12. B. C. Yen, "Stochastic and Risk Analysis in Hydraulic Engineering", WRP, 1986.
13. D. C. Garen, and S. J. Burges, "Approximate Error Bounds for Simulated Hydrographs", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 107, No. HY11, pp. 1519-1534, 1981.
14. 김문모, 이원환, 조원철, "도시지역의 최적 배수관망 설계를 위한 Risk - Safety Factor 관계의 설정", **대한 토목학회 논문집**, 제12권 제4호, pp. 129 - 134, 1992. 12. (接受 : 1993. 3. 12)