

積分方程式을 이용한 二層 多孔性 媒質에서의 1차원 水頭分布 해석

One-dimensional head distribution analysis in two-layer porous media using integral equations

李 相 逸*
Lee, Sang Il

Abstract

This paper presents a quasi-analytical method using integral equations to obtain head distributions in unsaturated porous media with different hydrogeologic properties. One-dimensional solution algorithms were developed for two cases of boundary conditions at the top: 1) constant head and 2) constant flux. Water table elevation at the bottom was assumed known for both cases. The methodology was applied to a fly ash disposal facility in an alluvium area. The results showed that the pressure head distributions had high nonlinearity with large gradients slightly above the interface of two media which made preliminary numerical solutions implausible. The developed method helped to structure finite element grids for improving convergence and accuracy.

요 지

두 개의 서로 다른 수문지질학적 성질을 갖는 다공성 매질이 불포화 대수층을 이룰 때, 수두분포를 적분방정식을 이용한 준해석적인 방법으로 구하는 방법을 연구하였다. 下端에서 地下水位의 위치가 알려져 있고, 上端에서의 경계조건이 일정수두 혹은 일정 유동량으로 주어질 때의 1차원 해석 알고리즘을 개발하고, 沖積層(alluvium) 위에 석탄재(fly ash)를 매립하는 처분장의 경우에 적용하였다. 그 결과 얻어진 수두분포는 경계면 바로 윗부분에서 매우 큰 압력경사를 나타내었고, 이것이 수치해석을 어렵게 만드는 요인임을 발견하였다. 해석적으로 얻은 압력경사는 수치해석 수행시 格子의 배열을 어떻게 할 것인지에 대한 대안을 제시하였고, 그에 따른 수치해석 결과는 해석치와 근사함을 보였다.

1. 서 론

지표 아래에서의 수분의 분포, 지하수의 유동, 오염물질의 확산 등을 알고자할 때 지하수 유동 방정식을 풀어야한다. 그 결과로 얻어지는 수두의 분포는 곧 흐름의 方向, 量, 速度 등을 계산하는 기초

자료가 된다. 그러나, 방정식 자체의 비선형성, 수문지질학적 계수들의 공간적 변동성 때문에 해석적인 방법으로 해를 구하기는 쉽지 않고, 유한차분법이나 유한요소법 같은 수치해석에 의존하게 된다.

수치해법의 다른 응용 예에서와 마찬가지로, 유한요소법(혹은 유한차분법)으로 지하수 유동방정식을 풀 때 계산상의 제약 때문에 요소의 크기를 너무 작게 혹은 요소의 수를 너무 많이 할 수 없는 경우가

* 정회원 · 충북대학교 수자원 · 수질 연구센터 연구조교수

많다. 그 결과, 계산이 수렴하지 않거나, 물리적으로 합당하지 않은 해로 수렴하는 경우가 있으며, 특히 비선형성이 심한 불포화 帶水層(unsaturated aquifer; vadose zone)에서 더욱 심하다.^(7,9)

본 연구에서는 서로 다른 수문지질학적 성질을 갖는 두 개의 다공성 매질이 불포화 대수층을 이루어 수치해석적인 방법으로는 정확한 수두분포를 얻기 매우 어려운 경우, 적분 방정식을 이용한 준해석적인 방법으로 수두분포를 알아내는 방법을 제시하고, 폐기물 매립장의 예를 들어 설명한다. 그렇게 함으로써 수치 해법과 해석적인 방법을 상호 보완적으로 사용하여 보다 정확한 수두분포를 얻을 수 있도록 하는 것이 본 연구의 목적이다.

2. 부정확한 수치해석의 예

화력발전의 부산물로 생기는 석탄재를 폐기하는 방식으로는 乾式(매립식, landfill)과 濕式(연못식, pond) 두 가지가 있다. 건식은 석탄재를 野積하는 것이고, 습식은 구조물 안에 석탄재를 쌓고 그 위에 물을 채워 일정한 水位를 유지하는 방식이다. 석탄재로부터의 침출수가 어떤 속도로, 또한 어떤 방향으로 흘러 갈 것인가를 예측하는 것은 침출수가 환경에 미치는 영향을 연구하는데 매우 중요하며,

이를 위하여는 지하수 유동방정식의 해가 필수적이다.⁽¹⁾

그림 1과 2는 건식과 습식 방식에 의한 어떤 처분장의 경우, 유한요소법에 의해 구해진 각각의 압력수두를 나타내고 있다. 처분장은 충전층 위에 설치되어 있고, 기저에는 불투수층이 존재한다. 현장 자료등과 비교 검토해 본 결과, 포화 대수층에서의 해는 두가지 경우 모두 만족할 만하나, 불포화층, 특히 석탄재층에서는 물리적으로 타당하지 않은 수두분포를 보이고 있다.

즉, 건식의 경우에는 上端에서의 경계조건이 일정 유동량(flux, 즉, 降水에 의한 浸透)으로 유지됨에도 불구하고 수치현상(fingering)이 나타나고 있다(그림 1의 곡선 부분). 습식의 경우, 定常狀態 下에서는 전 구간에 걸쳐 유동량이 일정해야 함에도 불구하고 석탄재층에서의 압력수두 경사의 부호가 -에서 +로 바뀌는 현상을 보임으로써 유동량이 일정하지 않음을 나타내고 있다. 물리적으로 타당하고 보다 정확한 해를 구하기 위하여 석탄재층에서의 유한요소의 수를 증가시켜도 역시 유사한 결과를 얻으며(그림 3), 요소의 수를 무한히 증가시킬 수는 없기 때문에 새로운 해석 방법이 요구된다. 이같은 문제는 多層 地下帶水層(layered aquifer)의 수두분포 해석이나, 혹은 column experiments⁽⁶⁾ 등에서도 자주 나타난다.

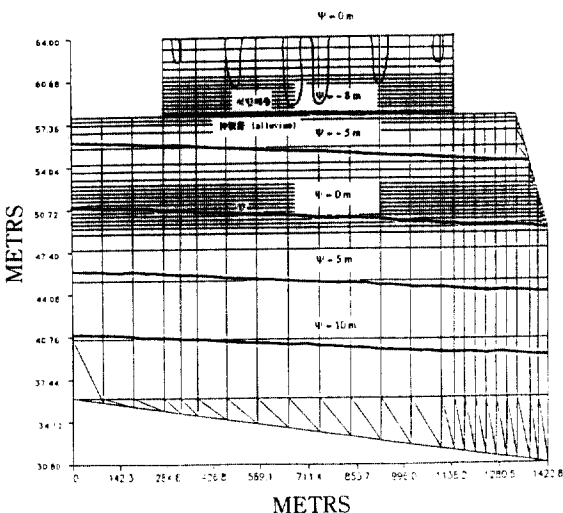


그림 1. 유한요소법에 의한 압력수두 (건식).

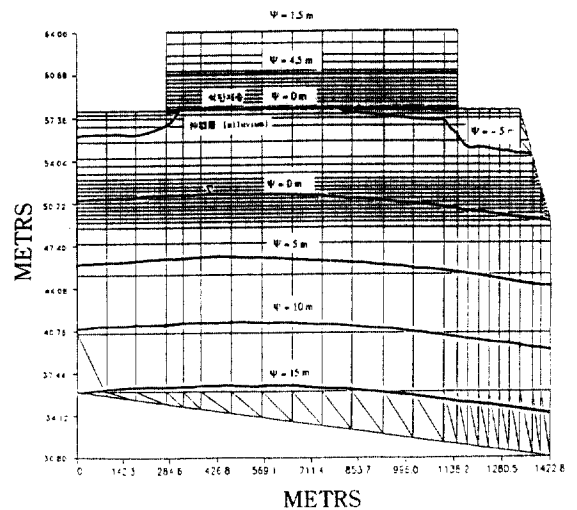


그림 2. 유한요소법에 의한 압력수두 (습식).

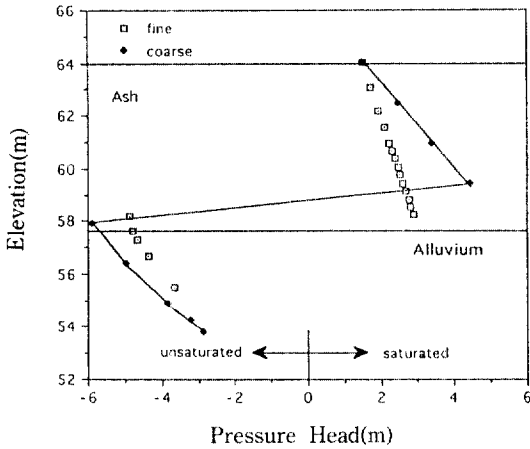


그림 3. 유한요소의 수를 증가시킨 수치해석의 결과 (습식).

3. 二層 다공성 매질의 1차원 모형

건식 혹은 습식 매립에서의 석탄재층과 그 바로 밑지층에 존재하는 地下水位까지의 침출수의 연직 유동은 1차원적으로 모형화할 수 있다. 즉, 그림 4에서 보듯이 地下水位로 부터 석탄재 맨 윗부분까지의 한 column을 해석영역으로 잡으면, 맨 위에서의 경계조건은 건식의 경우 일정 유동량 경계조건 (constant flux boundary condition), 습식의 경우 일정 압력수두 경계조건(constant pressure head boundary condition)이 된다. 地下水位에서의 경계조건은 두 경우 모두 일정 수두 조건(즉, 압력수두=0)이다.

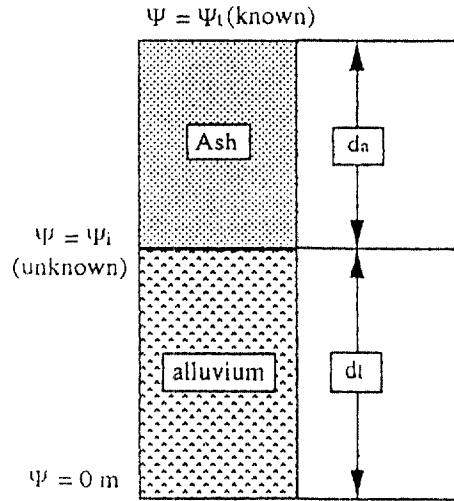
地下水位 윗 부분, 즉 불포화 대수층에서의 정상류 지배 방정식은⁽²⁾

$$K(\Psi)\nabla\Psi + K(\Psi)\vec{k} = \vec{q} \quad (1)$$

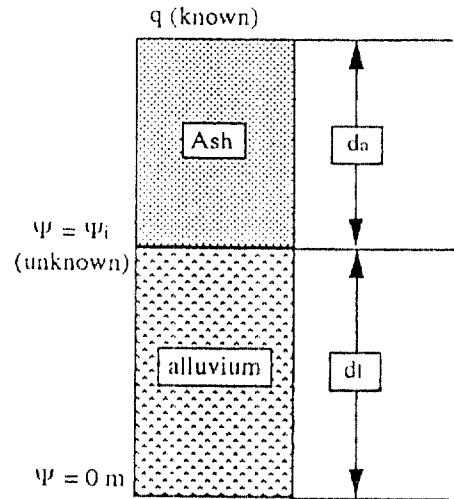
이때 K 는 투수계수 $[L/T]$, Ψ 는 압력수두 $[L]$, \vec{k} 는 연직방향을 나타내는 단위 벡터 $[-]$, $\vec{q} [L/T]$ 는 단위면적당 유동량 벡터이다. 이때 \vec{q} 는 아래 방향을陽으로 가정한다. 1차원의 경우 식(1)은

$$K(\Psi) \left\{ \frac{d\Psi}{dz} + 1 \right\} = q \quad (2)$$

로 쓸 수 있다. 불포화층의 투수계수 K 는 식(1), (2)에서 보는 바와 같이 압력수두의 함수이며, 따라서



(a) Constant head boundary condition at the top



(b) Constant flux boundary condition at the top

그림 4. 1차원 column 모형.

이들 식들은 Ψ 에 대한 비선형 미분방정식이 된다. (2)식은

$$dz = \frac{K(\Psi)}{q - K(\Psi)} d\Psi \quad (3)$$

으로 변환될 수 있으며, 임의의 구간에서 적분이 가능하다.

$$z_2 - z_1 = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{K(\Psi)}{q - K(\Psi)} d\Psi \quad (4)$$

(4)식의 적분을 수행하기 위해서는 $K(\Psi)$ 의 함수 형태가 알려져야 하는데, 투수계수와 압력수두와의 관계를 나타내는 여러가지 식 중에서 power model⁽³⁾이 가장 많이 쓰인다. 즉,

$$K(\Psi) = \begin{cases} K_s \frac{1}{[1 + (\alpha|\Psi - \Psi_a|^\beta)^\gamma]^n} & \Psi < \Psi_a \\ K_s & \Psi \geq \Psi_a \end{cases} \quad (5)$$

K_s 는 포화 투수계수 [L/T], $\alpha[L^{-1}]$, β , γ , n 은 흙의 종류에 따라 결정되는 실험계수들, 그리고 $\Psi_a[L]$ 는 공기유입 압력수두이다. 冲積層과 석탄재의 특성곡선에 관련된 이들 계수들은 표 1과 같다. 총적층의 포화투수계수가 석탄재보다 약 10⁴배 큰 것을 감안할 때(표 1 참조), 수치해석시 두 매질의 경계면 근방에서 해의 수렴이 용이하지 않을 것임을 예측할 수 있다.

식(4)를 冲積層과 석탄재의 두 구간에서의 적분으로 분리하면,

$$L_i = \int_0^{\Psi_i} \frac{K_i(\Psi)}{q - K_i(\Psi)} d\Psi \quad (6)$$

$$L_a = \int_{\Psi_i}^{\Psi_a} \frac{K_a(\Psi)}{q - K_a(\Psi)} d\Psi \quad (7)$$

가 된다. 식 (6)은 地下水位로부터 冲積層/석탄재의 경계까지 식 (3)을 적분한 것이며, 식 (7)은 경계로부터 석탄재층 맨 위까지의 적분을 나타낸다. K_i 과 K_a 는 각각 冲積層과 석탄재의 투수계수이다. Ψ_i 는 경계면에서의 압력수두로서 미지수이다. 정상상태에서는 두 층을 지나는 유동량이 일정함에 유의하여야 한다 (즉, 식 (6)과 (7)의 q 동일). 유동량 q 와 上端에서의 압력수두 Ψ_i 는 上端에서의 경계조건에 따라 미지수인지의 여부가 달라지는데, 일정 압력수두 경계조건(습식의 경우)이면 Ψ_i 를 알고, 일정유동량 경계조건(건식의 경우)이면 q 를 안다.

따라서, 경계조건에 따라 두 개의 미지수(Ψ_i 와 q

표 1. 특성곡선에 관련된 계수들

	$K_s[m/d]$	$\alpha[m^{-1}]$	β	γ	n	$\Psi_a[m]$
冲積層	88.4	4.854	1.292	0.226	9.346	0
석탄재	0.011	11	2.490	0.294	2	0

혹은 Ψ_i 와 Ψ_a) 그리고 두 개의 식 (식 6,7)을 가지므로, 이론적으로는 column 全域에서의 압력 수두 분포 Ψ 를 구할 수 있으나, 완전 해석적인 방법으로는 불가능하고, 두 개의 적분방정식을 축차적으로 풀어야 한다.

4. 적분방정식에 의한 수두 분포해석

4.1 일정 압력수두 경계조건

식 (6)과 (7)은 석탄재층에서는 $q < K_a(\Psi)$, 冲積層에서는 $q < K_i(\Psi)$ 일 것이므로 singularity($q=K$)가 존재하지 않는 적분식이다. 이는 식 (3)의 물리적인 의미를 살펴보면 더욱 명확히 알 수 있는데, 석탄재층의 上端은 포화상태($\Psi_i > 0$)로 일정하고 下部로 내려 갈수록 건조해져 압력수두는 감소 경향을 띠기 때문에 $dz/d\Psi > 0$. 또한 冲積層에서는 下端이 地下水水位(즉, $\Psi=0$) 조건으로 고정되어 있어 압력수두는 점차 증가하며 따라서 $dz/d\Psi < 0$ 일 것이기 때문이다. 이때, 기본적인 가정은 두 층의 경계에서의 압력수두는 연속적이며 하나의 값을 갖는다는 것이다.

식 (6)과 (7)을 이용한 수두분포 해석 알고리즘이 그림 5의 계산 흐름도에 나타나 있다. 먼저, K_a 보다 약간 큰 q 값으로 부터 시작하여

$$\int_{\Psi_i}^{\Psi_a} \frac{K_a(\Psi)}{q - K_a(\Psi)} d\Psi - d_a = 0 \quad (8)$$

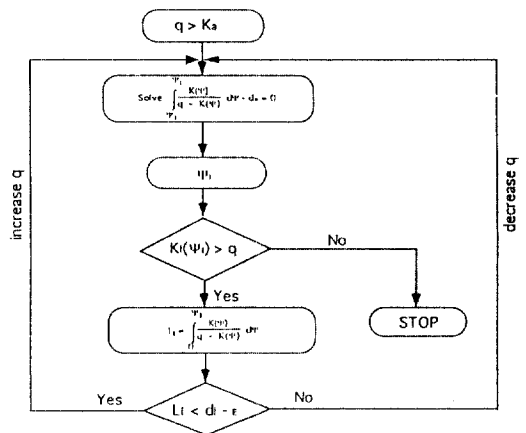


그림 5. 계산 흐름도 (일정 수두 경계조건).

을 만족시키는 Ψ_1 를 찾는다. 이때, d_a 는 석탄재층의 두께이다. 이는 기본적으로 1개 변수에 대한 single-valued 함수의 근을 찾는 문제이다. 함수(식 (8)의 좌변)의 부호가 변화하는 곳에 근이 존재한다는 원리를 이용한 bisection method 혹은 false position method⁽⁶⁾ 등의 방법으로 Ψ_1 를 구할 수 있고, 이때 적분은 adaptive recursive Simpson's rule⁽⁵⁾ 등의 수치적분 알고리즘을 이용하면 가능하다.

언어진 경계면 압력수두의 함수로서의 冲積層 투수계수가 유동량 q 보다 작으면, 즉 $K_1(\Psi_1) \leq q$ 이면 이때의 Ψ_1 값은 冲積層에서의 조건을 만족시키지 못하므로, $q = K_1(\Psi_1)$ 로 놓고 (8)식을 풀어, $K_1(\Psi_1) > q$ 를 만족하는 Ψ_1 를 구하는 과정을 반복한다.

한편, $K_1(\Psi_1) > q$ 이면 식 (6)으로부터 L_1 을 계산한다. 그 결과, $L_1 < d_1 - \epsilon$ 이면 q 를 증가, $L_1 > d_1 + \epsilon$ 이면 q 를 감소시켜 (8)식으로 돌아간다. 여기서 d_1 은 地下水位로부터 冲積層/석탄재 경계면까지의 거리로서, 地下水位의 위치는 초기단계 수치해석의 결과 혹은 현장측정으로 부터 알 수 있다. ϵ 은 허용오차이다. L_1 값이 $d_1 \pm \epsilon$ 를 만족시킬 때의 q 가 연직방향 유동량으로 결정되며, 추차과정은 정지한다.

이제 q 가 결정되었으므로 압력수두의 연직 분포는 (4)식으로부터 Ψ 를 일정 구간씩 증가시켜가며 적분함으로써 ΔZ 를 구하는 방식으로 얻을 수 있다.

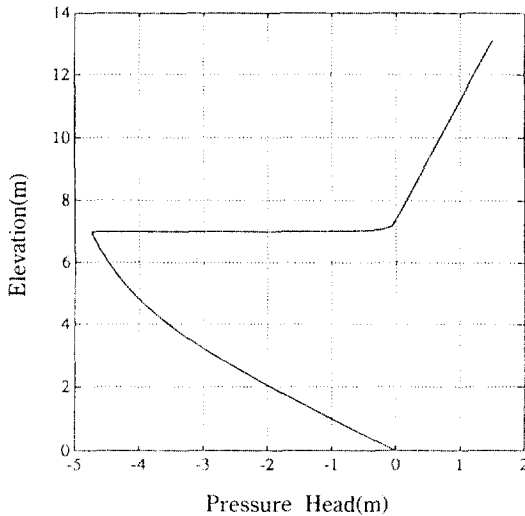


그림 6. 해석적 방법에 의한 수두분포 (일정 수두 경계조건).

$d_a = 6m$, $d_1 = 7m$, $\Psi_1 = 1.5m$ 인 경우에, 앞서 확립된 방식으로 구해진 압력수두분포가 그림 6에 나타나 있다. 地下水位 위쪽 7 m 지점의 경계면으로 부터 극히 작은 구간에 걸쳐 매우 큰 압력경사($d\Psi/dz \rightarrow \infty$)가 존재함을 알 수 있고, 이 때문에 수치해석시 물리적으로 타당하지 않는 결과 즉, 정상상태 하에서 석탄재층 압력수두 경사의 부호가 바뀌는 현상이 일어졌음은 명백하다 (그림 2). 그 구간이 매우 작기 때문에 유한요소의 수를 어느 정도 증가시켜도 향상된 해를 얻기 어려웠던 이유도 동시에 설명할 수 있다.

석탄재층만을 해석영역으로 하여, 경계면 바로 윗부분에 두께가 매우 얇은 유한요소를 사용한 수치해석의 결과가 준해석적인 방법으로 얻은 결과와 함께 그림 7에 나타나 있다. 그림에서 보듯이 수두 분포의 경향과 정확도에서 크게 향상되었음을 알 수 있다.

4.2 일정 유동량 경계조건

앞서 서술한 바와 같이, 건식 매립의 경우에는 석탄재층 맨위에서의 압력수두(Ψ_1)는 미지수인 대신, 두 층 전역에 걸친 흐름률 q 는 강수에 의한 浸透와 같고 이는 측정, 혹은 여러가지 계산 방법에 의해 알 수 있는 값이다. 예를 들면, Horton's equation, Philip's equation, Green and Ampt method⁽⁴⁾ 등이 그것이다. 따라서 이 경우 미지수는 경계면에서의

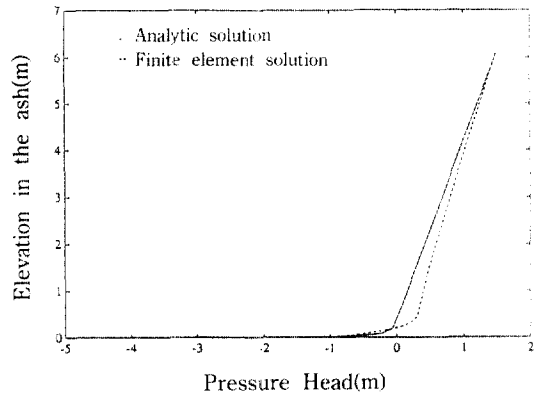


그림 7. 경계면 근방에 매우 얇은 유한요소를 배치한 경우, 석탄재층에서의 수치해와 해석해 (일정 수두 경계조건).

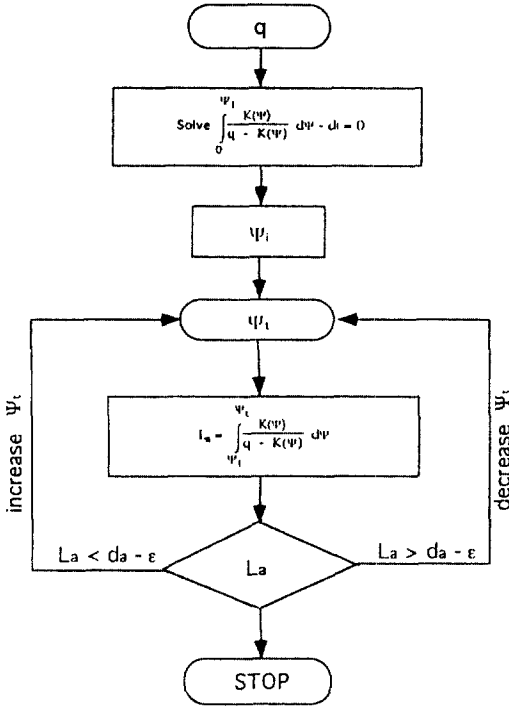


그림 8. 계산 흐름도 (일정 유동량 경계조건).

압력수두(Ψ_1)와 석탄재층 맨위에서의 압력수두(Ψ_i)이며, 관계되는 방정식은 역시 식 (6), (7)이다. 적분방정식을 이용하여 해를 구하는 알고리즘이 그림 8에 나타나 있다.

즉, 알려진 q 값에 대해 적분방정식

$$\int_0^{\Psi_1} \frac{K_i(\Psi)}{q - K_i(\Psi)} d\Psi - d_1 = 0 \quad (9)$$

을 풀어 Ψ_1 를 구한다. 구한 Ψ_1 와 적당한 Ψ_i (陰의 값) 구간에서의 적분(식7)을 수행하여 L_a 를 구하고, $L_a < d_a - \epsilon$ 이면 Ψ_1 를 $\Delta\Psi_1$ 만큼 증가시키고 $L_a > d_a + \epsilon$ 이면 $\Delta\Psi_1$ 만큼 감소시키면서 계산을 반복한다. L_a 값이 $d_a \pm \epsilon$ 인 조건을 만족시키는 Ψ_1 값에서 축차계산은 정지되고, 전체구간에 대한 압력수두는 4.1절에서 설명한 것과 같은 방식으로 얻어진다.

$d_a = 6.1\text{m}$, $d_1 = 8.14\text{m}$, $q = 3.66 \times 10^4 \text{m/d}$ 인 건식 매립장의 경우, 위와 같은 방식으로 얻어진 압력수두 분포가 그림 9에 제시되어 있으며, 앞절에서와 마찬가지로 경계면 바로 윗부분에서 큰 압력수두 경사 ($d\Psi/dz$)가 존재함을 알 수 있다. 이로 인해 수치해

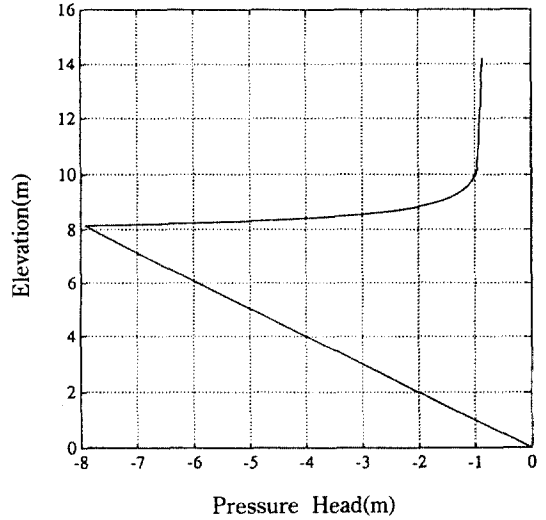


그림 9. 해석적 방법에 의한 수두분포 (일정 유동량 경계조건).

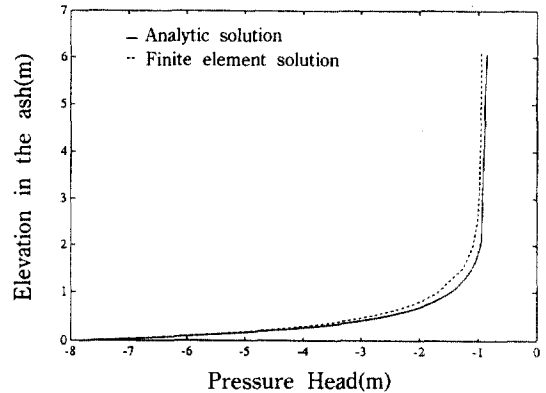


그림 10. 경계면 근방에 매우 얇은 유한요소를 배치한 경우, 석탄재층에서의 수치해와 해석해 (일정 유동량 경계조건).

석이 불안정하고 물리적으로 타당하지 않은 결과(즉, 일정유동량 하에서는 수치현상이 일어날 이유 없음)가 얻어졌음을 추측할 수 있다. 4.1절에서와 마찬가지로, 석탄재층만을 고려하고 경계면 윗부분에 매우 얇은 유한요소를 배치하여 얻은 수치해가 해석적인 방법에 의한 해와 비교되어 그림 10에 나타나 있다. 이 경우 역시 수두분포에 대한 고찰이 부족한 상태에서 수행한 수치해석 결과보다 경향과 정확도에서 월등히 해석적인 결과에 접근해 있음을 보여 주고 있다.

5. 결 론

비선형성이 심한 불포화 대수층의 존재로 인하여 수치해석이 용이하지 않은 두 개의 서로 다른 성질을 갖는 다공성 매질층에서, 연직 압력수두 분포를 적분방정식을 이용한 준해석적인 방법으로 구하였다. 上層매질 上端에서 (1) 일정 압력수두와 (2) 일정 유동량 경계조건이 주어지고, 下層매질 下端에서의 경계조건은 일정 압력수두, 즉 地下水位가 알려져 있을 경우를 고려하였고, 두 경우에 대하여 각각의 해석 알고리즘을 제시하였다. 예시한 경우에 대한 압력수두 분포에는 두 가지 경우 공히 두 매질 경계면 바로 윗부분에서 매우 큰 압력경사($d\Psi/dz$)가 존재함을 밝혔고, 이로 인해 수치해석의 결과가 수렴하지 않거나 물리적으로 타당하지 않았던 이유를 설명할 수 있었다.

결론적으로, 본 연구는 二層 다공성 매질에서의 수두분포를 적분방정식을 이용하여 준해석적으로 풀 수 있는 방법을 제시하였으며, 이는 유한요소법이나 유한차분법 등의 수치해석 時 해의 수렴과 정확도를 향상시킬 수 있는 格子 설계에 유용하게 쓰일 수 있음을 예시하였다.

감사의 글

본 연구 수행에 많은 도움과 격려를 준 미국 STANFORD 대학의 Peter Kitanidis 교수께 감사드립니다. 또한, 좋은 제언을 해 준 익명의 두 심사위원께도

감사를 드린다.

참 고 문 헌

1. 李相逸, "침출수 이동 해석을 통한 석탄재 처분방식의 평가", *한국수문학회지*, 25권 4호, 1992.
2. Bear, J., *Hydraulics of Groundwater*, McGraw-Hill, New York, 1979.
3. Brooks, R.H. and A.T. Corey, "Properties of Porous Media Affecting Fluid Flow", *ASCE J. Irrig. Drain. Div.*, 92, IRS: 61-88, 1966.
4. Chow, V. T., D. R. Maidment and L. W. Mays, *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York, 1988.
5. Forsythe, G. E., M. A. Malcolm and C. B. Moler, *Computer Method for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.
6. Freeze, R. A. and J. A. Cherry, *Groundwater*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.
7. Huyakorn, P.S., D. Thomas and B. M. Thompson, "Techniques for Making Finite Elements Competitive in Modeling Flows in Variably Saturated Porous Media", *Water Resources Research*, 20, 1099-1115, 1984.
8. Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1986.
9. Pinder, G. F. and W.G. Gray, *Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology*, Academic Press, New York, 1977.

(接受: 1992. 8. 27)