

트러스구조물의 확률론적 유한요소 해석

Stochastic Finite Element Analysis for Truss Structures

방 명 석*

Bang, Myung Suk

Abstract

Finite element analyses are conducted with stochastic elastic moduli when truss structures are subjected to static loads of a deterministic nature. Stochastic stiffness matrix is derived from stochastic shape functions and numerical analyses are performed within the framework of the Monte Carlo method. Analysis methods are verified for the space truss and applied to cable stayed bridge for determining the cable force.

요 지

탄성계수의 확률분포를 고려한 트러스 구조물의 유한요소 해석을 수행하였다. 탄성계수의 분포함수를 이용한 형상함수를 유도하여 강성행렬을 구성하고 Monte Carlo Simulation 기법을 이용하여 수치해석을 수행하였다. 공간 트러스 구조물 해석을 통해서 해석과정을 검증하고 사장교에서 케이블 장력의 변동폭을 예측하였다.

1. 서 론

고도의 수치해석 기법인 유한요소법이 구조공학 분야에서 빈번히 사용되고 있으나 대부분의 경우에 하중이나 부재특성등이 확정치(deterministics)로 취급되고 있다. 그러나 하중이나 부재특성들은 상당한 정도의 불균일성(randomness)이나 불확실성(uncertainty)을 갖고 있다.^(1,2)

확률론적 하중(random load)을 고려한 구조해석법은 차량하중, 풍하중, 파랑하중, 지진하중 등에 걸쳐서 다양하게 연구되고 있다.^(3,4,5) 반면에 부재특성, 즉, 재료상수의 확률론적 분포와 시공오차에 의한 부재치수의 불균일성 등을 해석과정에 포함시킨

해석방법은 연구결과가 비교적 적다.

Shinozuka^(6,7)와 Vanmarke⁽⁸⁾는 탄성계수의 확률론적 분포에 의한 강성행렬(stiffness matrix)의 확률론적 분포를 구성하였다. 즉, 강성행렬을 구성하기 위한 형상함수(shape function)는 확정론적 함수(deterministic function)이며 절점에서의 변위만이 확률론적 변수(random variable)를 사용하였다. 또한 Deodatis⁽⁹⁾는 가중적분법(weight integral method)을 사용하여 frame 요소의 강성행렬을 유도하였고 Bucher⁽¹⁰⁾ 등은 탄성계수의 확률밀도함수(power density function)를 이용한 해석법을 소개하였다. 이러한 확률론적 강성행렬의 구성시에 유의할 점은 임의의 부재에서 탄성계수가 위치에 따라 확률분포함수($\bar{E}(x)$)를 갖는 경우에 절점변위가, 확정치에 의한

* 정회원 · 한국건설기술연구원 구조연구실장, 공학박사

변위의 선형결합과는 달리 확률변수의 선형결합(linear combination, $N_1(x)\bar{U}_1 + N_2(x)\bar{U}_2$)은 도함수(derivatives)의 연속성(continuity)때문에 정확한 해석이 불가능하다는 것이다.

본 연구에서는 탄성계수가 부재내에서 임의의 확률론적 분포함수를 갖는 경우에 탄성계수와 변형의 상관성을 고려하는 확률론적 형상함수(stochastic shape function)를 유도하여 유한요소해석을 수행하고자 한다.

2. 확률론적 유한요소법

2.1 확률론적 형상함수

그림 1처럼 축방향력 P와 길이를 따라 단면적A가 상수인 축방향부재의 탄성계수가 부재내에서 확률론적 분포(random field)를 갖는 경우에는 변형도(strain)도 부재길이를 따라서 일정할 수 없다. 즉, 변형도 $\bar{\epsilon}(x) = P/A\bar{E}$ 은 탄성계수의 분포함수에 따라 변하게 될 것이다. 그러나 어떠한 경우에도 부재 각 지점의 힘의 평형(equilibrium)은 유지되어야 하므로 다음과 같은식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{d}{dx} [\bar{E}A \frac{d\bar{u}}{dx}] = 0 \quad (1)$$

이 때 \bar{u} 는 확률론적 축변위(axial displacement)이다. 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dx} (\bar{E}A) \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{E}A \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

(2)식에서 첫번째 항은 탄성계수의 분포가 길이 방향을 따라서 상수인 경우에는 0값이 된다. 그러나 탄성계수가 길이방향을 따라서 확률론적 분포를 갖는 경우에는 0값이 되지 않고 변형도($\bar{\epsilon} = d\bar{u}/dx$) 또한 확률론적인 분포를 이루어야 한다. 즉, 확률론적

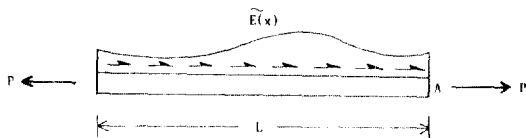


그림 1. 탄성계수가 확률론적 분포를 갖는 축방향부재

인 탄성계수의 효과를 정확히 해석하기 위해서는 확률론적인 형상함수를 사용하므로써 탄성계수와 변형간의 상관관계를 구할 수 있어야 한다.

식(1)을 적분하면 다음과 같다.

$$\bar{E}(x)A \frac{d\bar{u}}{dx} = P \quad (3)$$

$$\text{즉 } \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{P}{\bar{E}(x)A} \quad (0 \leq x \leq L)$$

이 된다. 식 (3)을 한번더 적분하면 다음과 같다.

$$\bar{u}(x) = \frac{P}{A} \int_0^x \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi \quad (4)$$

$$\bar{u}(L) = \frac{P}{A} \int_0^L \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi \quad (5)$$

일반적인 축부재(axial member)의 형상함수 $N_1 = 1 - \frac{x}{l}$, $N_2 = \frac{x}{l}$ 와 식 (4), (5)를 비교하면 확률론적

형상함수 \bar{N}_1 , \bar{N}_2 는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\bar{N}_2(x) = \frac{\int_0^x \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi}{\int_0^L \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi} \quad (6)$$

$$\bar{N}_1(x) = 1 - \bar{N}_2(x) \quad (7)$$

이 때 형상함수 $\bar{N}_1(x)$, $\bar{N}_2(x)$ 는 각각 단조감소함수(monotonic decreasing function), 단조증가함수(monotonic increasing function)이다.

2.2 변형도 - 변위 행렬

확률론적 변형도, $\bar{\epsilon}(x)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(x) &= \left[\frac{d\bar{N}_1(x)}{dx} \quad \frac{d\bar{N}_2(x)}{dx} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \\ &= [\bar{B}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

이 때 변형도 - 변위행렬 $[\bar{B}]$ 는 다음과 같다.

$$[\bar{B}] = \frac{1}{\bar{E}(x) \int_0^L \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi} [-1, 1] \quad (9)$$

2.3 강성행렬

확률론적인 탄성계수행렬 $[\bar{D}] = \bar{E}(x)[I]$ 이므로 강성행렬 $[\bar{K}]$ 는 다음과 같다.

$$[\bar{K}] = \int_0^L [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] dx$$

$$= \frac{A}{\int_0^L \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.4 하중벡터

절점하중의 경우에는 주어진 외부하중이 확정치로 입력이 가능하나 등분포하중의 경우에는 확률론적 등가절점하중으로의 변환이 요구된다. 등분포하중이 W 인 경우에 확률론적 등가절점하중 \bar{P}_1, \bar{P}_2 는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = W \int_0^L \begin{Bmatrix} \bar{N}_1(x) \\ \bar{N}_2(x) \end{Bmatrix} dx \quad (11)$$

2.5 조화함수형 탄성계수 분포를 갖는 경우의 강성행렬 구성에

축방향 부재의 탄성계수 분포가 다음과 같은 확률론적 분포를 갖는다는 가정하에 강성행렬을 구성해 보자.

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{\bar{E}(x)} = C_0 \{1 + \alpha \cos(\omega x - \bar{\phi})\} \quad (12)$$

이 때 $\bar{C}(x)$ 는 식 (10)의 적분을 위해 도입된 재료상수(compliance)이며, C_0 는 평균치, α 는 상대진폭(relative strength of fluctuation), $\bar{\phi}$ 는 확률론적 위상각(random phase angle)이다. 식 (12)를 사용하면

$$\int_0^L \frac{1}{\bar{E}(\xi)} d\xi = \frac{C_0}{\omega} \{\omega L + \alpha \sin(\omega L - \bar{\phi}) + \alpha \sin \bar{\phi}\} \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)을 식 (6), (7)에 대입하면 형상함수 \bar{N}_1, \bar{N}_2 는 다음과 같다.

$$\bar{N}_2(x) = \frac{\omega x + \alpha \sin(\omega x - \bar{\phi}) + \alpha \sin \bar{\phi}}{\omega L + \alpha \sin(\omega L - \bar{\phi}) + \alpha \sin \bar{\phi}}$$

$$\bar{N}_1(x) = 1 - \bar{N}_2(x) \quad (14)$$

또한 강성행렬 $[\bar{K}]$ 는 다음식과 같이 유도될 수

있다.

$$[\bar{K}] = \frac{\omega A}{C_0 \{\omega L + \alpha \sin(\omega L - \bar{\phi}) + \alpha \sin \bar{\phi}\}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

부재길이가 파장(wave length)보다 짧은 경우, 즉, $\omega L = \pi$, $\omega = \pi/L$ 인 경우에 강성행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$[\bar{K}] = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \bar{\phi}} \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

이 때 위상각 $\bar{\phi}$ 의 범위는 $-\frac{\pi}{2} \leq \bar{\phi} \leq \frac{\pi}{2}$ 로 가정한다.

3. Monte Carlo 모사운용(Simulation)

식 (16)과 같은 강성행렬을 갖는 트러스 구조물을 해석하기 위해서 확률변수 $\bar{\phi}$ 의 값은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\phi}_j = (\bar{N}_j - \frac{1}{2}) * \pi, \quad 0 \leq N_j \leq 1 \quad (17)$$

여기에서 N_j 는 j 번째 부재에 대한 random number이다. 이때 전체강성 행렬을 구성하는 요소강성 행렬들은 독립적으로 발생하는 random number에 의해서 구해진다. 즉, 모든 부재들의 재료상수는 상호 연관성없이 독립적인 확률변수이다. 이렇게 구성된 전체강성행렬에 의한 해석과정은 그림 2와 같다.

4. 수치해석 및 결과분석

구조물의 탄성계수는 강재와 같이 공장생산되는 경우나 콘크리트 부재와 같이 현장 생산되는 경우 어느 정도의 생산오차를 갖게 된다. 따라서 이러한 부재의 다양성이 구조물의 거동에 미치는 영향을 정확하게 해석하기 위해서는 확률론적 유한요소법의 해석이 필요하다. 또한 사장교의 케이블 부재는 부재응력과 탄성계수가 상호영향을 미치는 비선형거동을 한다. 따라서 사장교의 설계시에 외부하중에

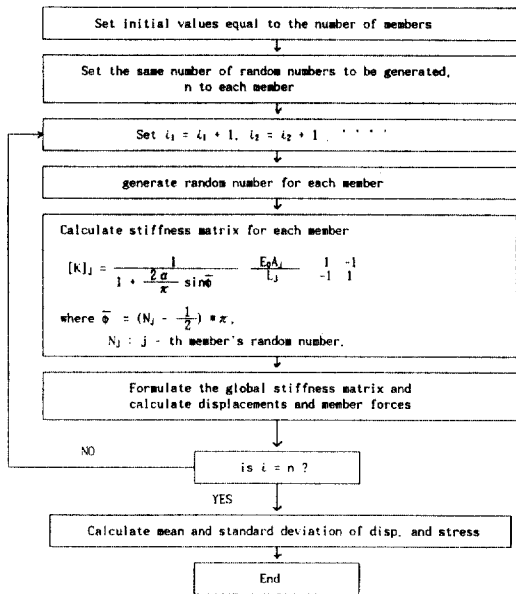


그림 2. Monte Carlo 모사운용(simulation) 흐름도

의한 케이블 부재의 응력폭(stress band)을 결정하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 공간 트러스 구조물에서 각 부재의 탄성계수가 독립적인 확률변수(random variable)를 갖는 경우에 확률론적 유한요소해석을 통한 결과를 분석하고 사장교에서 케이블부재의 탄성계수 변화에 따른 응력폭의 분포를 구하였다.

4.1 공간트러스 (space truss)

그림 3처럼 독립적인 확률변수를 갖는 24개 부재로 구성된 6각형 돔(hexagonal star-shaped shallow dome)

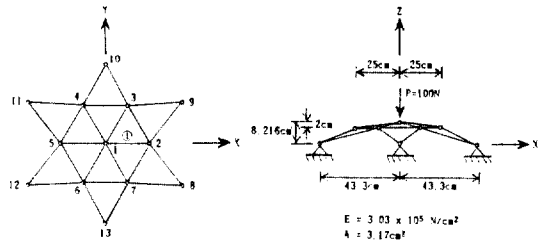


그림 3. 공간트러스 - 6각형 돔(hexagonal star-shaped shallow dome)

에 절점하중(절점1)이 작용하는 경우에 절점1의 변위와 부재1의 응력은 표 1과 같다.

이 때 각 부재 탄성계수의 모사운용(simulation) 횟수는 500이고 변위와 응력의 분포는 그림 4, 그림 5와 같이 정규분포(normal distribution)와 유사한 분포를 갖는다. 본 연구에서 개발된 해석방법을 사용하여 탄성계수의 분포를 임의로 변화시킴에 따라서 구조물의 응답을 해석한 결과는 매우 양호함을 알 수 있다.

4.2 사장교 (cable stayed bridge)

그림 6과 같은 사장교에서 케이블의 등가탄성계수(Eeq)와 응력은 식(18)과 같다.

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{1}{12} \left[\frac{Wl}{A\sigma} \right]^2 \left[\frac{E}{\sigma} \right]} \quad (18)$$

여기에서 E는 케이블의 재료탄성계수, W는 단위 길이당 케이블무게, l은 수평축에 투영된 케이블

표 1. 트러스의 탄성계수 분포변화에 따른 변위(절점 1)와 응력(부재1)분포

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

탄성계수 ($\times 10^5$ N/ cm 2)	상대 진폭 (α)	변위 (cm)		응력 (N/cm 2)	
		평균 (μ)	분산도 (σ/μ)	평균 (μ)	분산도 (σ/μ)
3.03	0.05	0.11514	0.0067	65.9309	0.0025
	0.10	0.11515	0.0133	65.9329	0.0050
	0.15	0.11515	0.0199	65.9345	0.0075

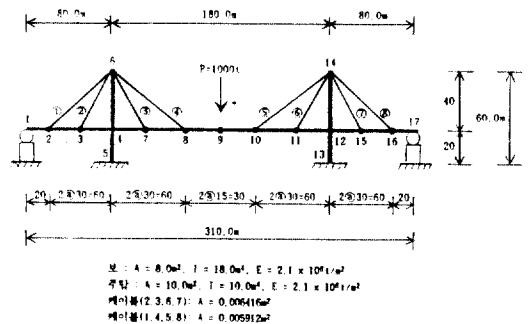
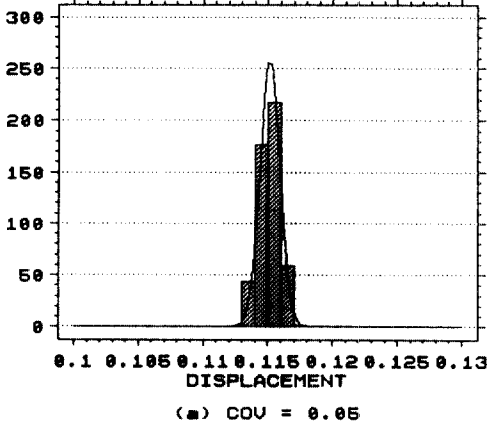
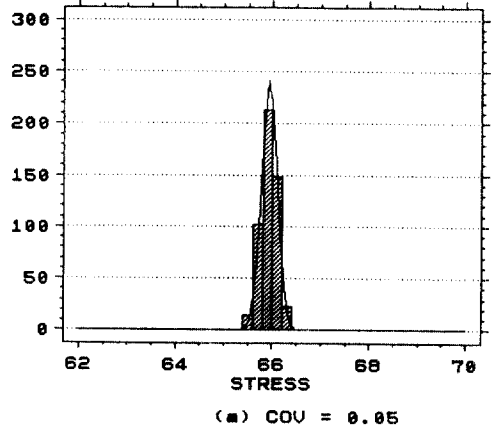


그림 6. 해석용 콘크리트 사장교(concrete cable stayed bridge)

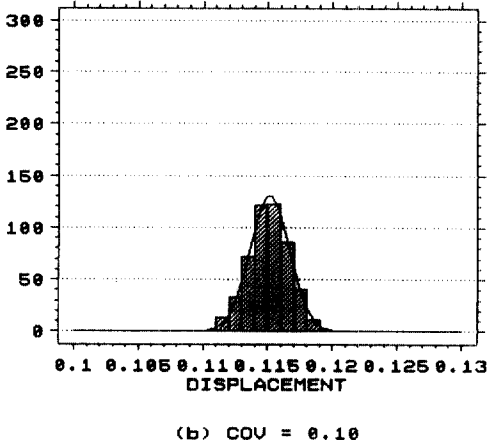
ST5.DIS(Z)



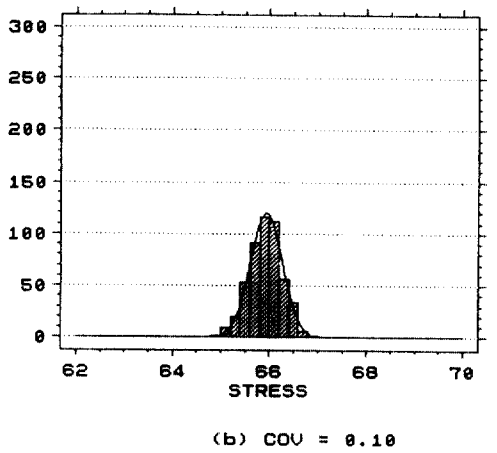
ST5.STR



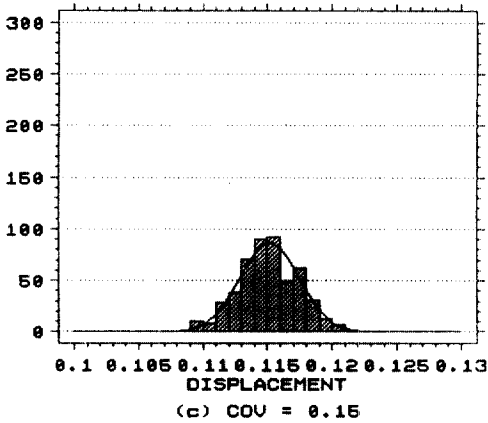
ST10.DIS(Z)



ST10.STR



ST15.DIS(Z)



ST15.STR

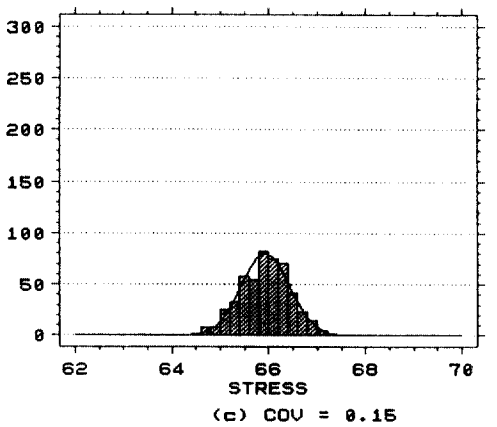


그림 4. 공간트러스의 변이계수(COV)에 따른 절점 1의 처짐분포

그림 5. 공간트러스의 변이계수(COV)에 따른 부재 1의 응력분포

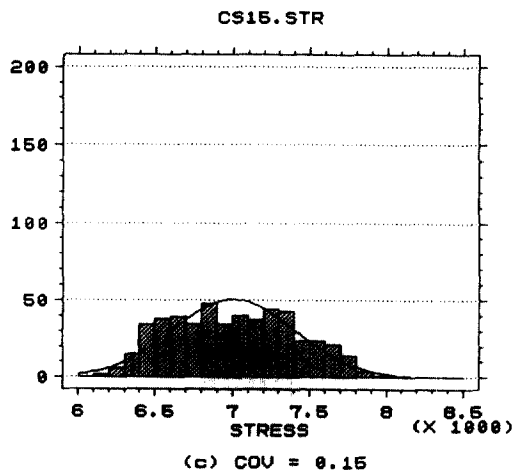
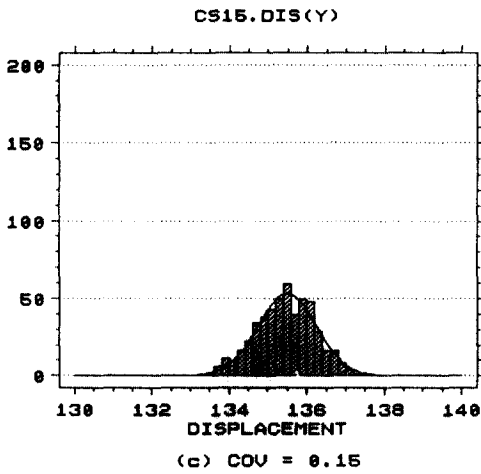
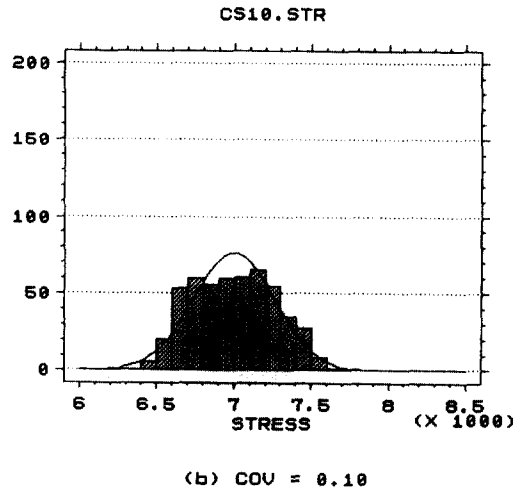
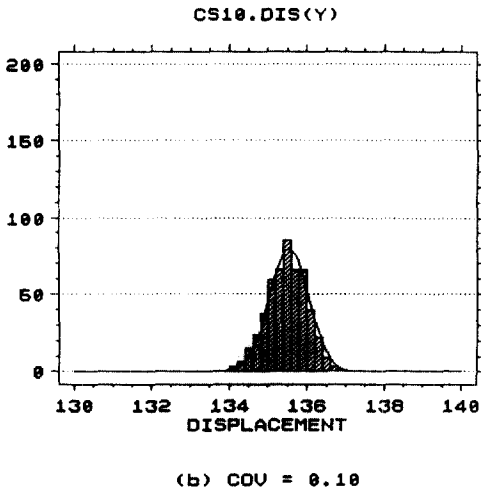
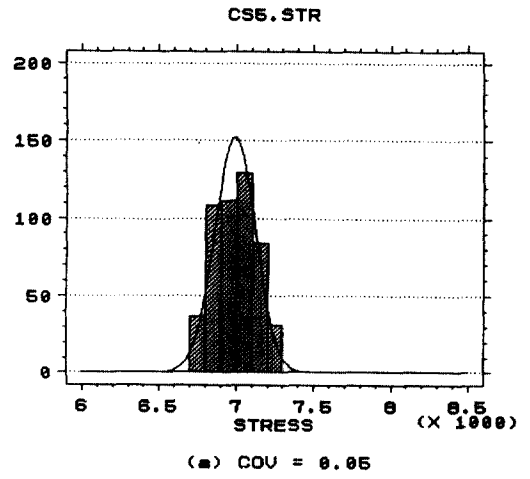
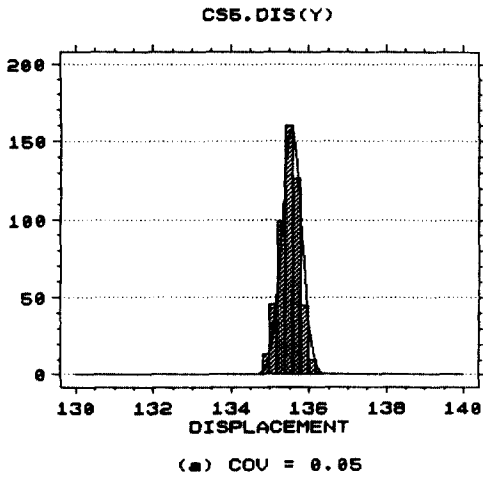


그림 7. 사장교의 변이계수(COV)에 따른 절점 9의 처짐분포

그림 8. 사장교의 변이계수(COV)에 따른 케이블부재3의 응력분포

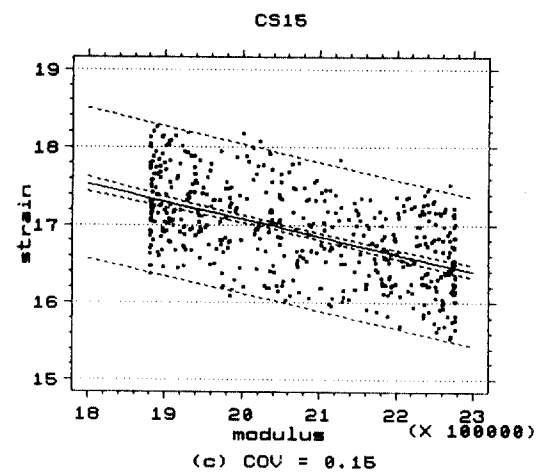
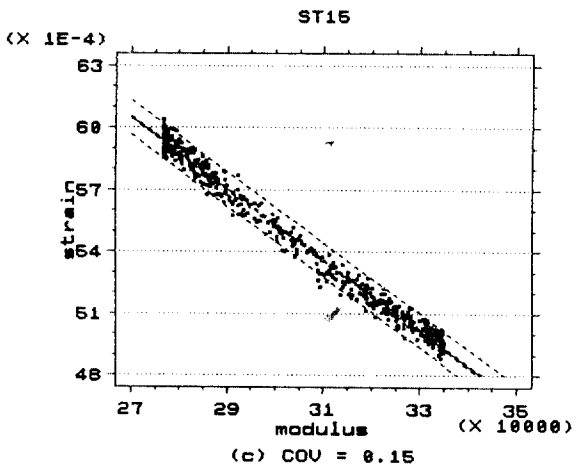
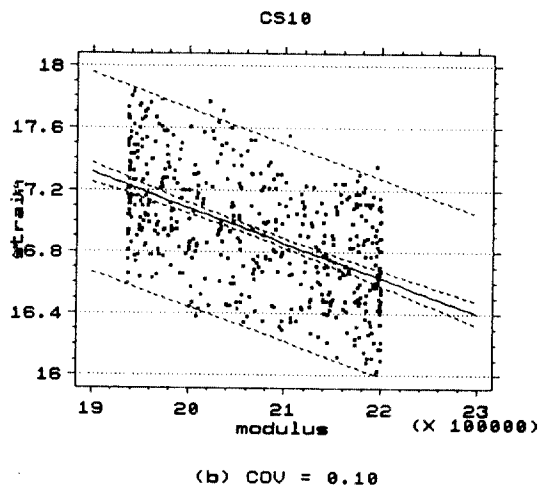
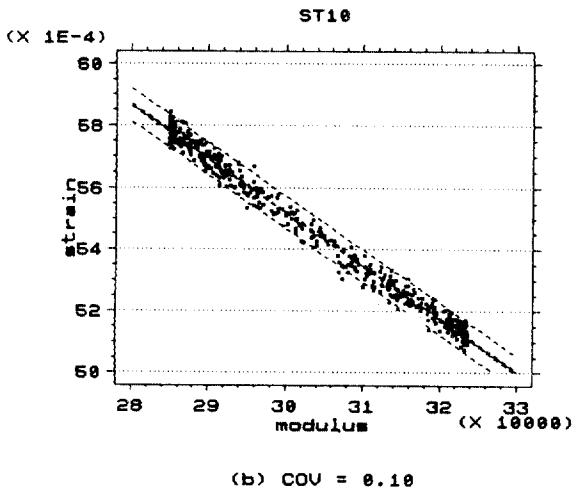
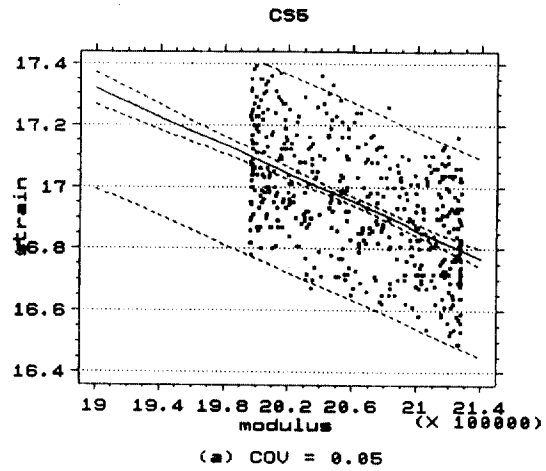
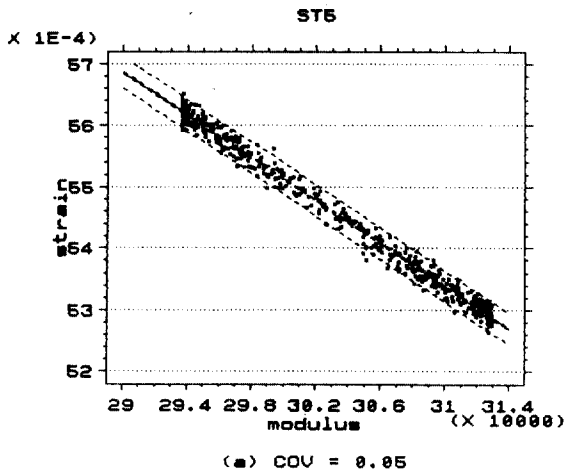


그림 9. 공간트러스의 탄성계수와 변형 상관도

그림 10. 사장교의 탄성계수와 변형 상관도

표 2. 사장교의 탄성계수분포변화에 따른 케이블(부재 3)의 응력분포

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

탄성계수 ($\times 10^6$ kg/cm ²)	상대 진폭 (α)	응력분포(kg/cm ²)		등가탄성계수 (E_{eq})에 의한 응력(kg/cm ²)[11]
		평균 (μ)	분산도 (σ/μ)	
2.06	0.05	6990.34	0.0187	6995.32
	0.10	6997.42	0.0374	
	0.15	7007.51	0.0563	

길이, A는 케이블 단면적, σ 는 케이블 응력이다. 식 (18)은 응력(σ)와 케이블의 탄성계수가 상호연관되어 (coupled) 케이블수가 증가함에 따라서 각 부재의 장력을 결정하기 위해서는 많은 반복 해석이 필요함을 알 수 있다.

그림 6과 같은 사장교에서, 케이블 부재들은 독립적인 확률변수로 모델링한 확률론적 트러스요소를 사용하고, 주형과 주탑은 확정론적(deterministic) 보요소를 사용하여 해석하였다. 케이블 부재의 응력은 표 2와 같고 절점 9의 처짐과 응력분포는 그림 7, 그림 8과 같다. 즉, 탄성계수가 5%, 10%, 15%의 상대진폭을 갖는 경우에 응력의 변동폭은 1.87%, 3.74%, 5.63%를 보여 준다.

4.3 탄성계수와 변형의 상관성 (correlation)

식 (2) 첫번째 항의 탄성계수와 변형의 상관관계를 그림 3, 그림 6과 같은 구조물에 대해서 분석하면 표 3, 그림 9, 그림 10과 같다. 트러스 구조물의 상관계수는 약 -1.0으로 정확한 역상관관계임을 알 수 있으나 사장교의 경우에는 약 -0.54로 역상관성이 다소 낮다. 즉, 탄성계수와 변형의 상관성 분석결과를 확률론적 유한요소법에 의해서 탄성계수와 형상함수의 역상관관계에 의한 응답효과를 비교적 정확하게 해석할 수 있음을 보여 준다.

5. 결 론

본 연구를 통한 결론은 다음과 같다.

1. 트러스 부재의 탄성계수를 확률변수로 가정한

표 3. 탄성계수와 변형(strain)과의 상관도 ($y=ax+b$, y: 변형, x: 탄성계수)

구조물	상수	기울기 (a, $\times 10^{-8}$)	절편 (b)	상관계수 (correlation coefficient)
트러스 (부재1)	ST5	-1.73221	0.010708	-0.99430
	ST10	-1.7285	0.010706	-0.99393
	ST15	-1.7213	0.010697	-0.99334
사장교 (부재3)	CS5	-228.738	21.6640	-0.54200
	CS10	-227.803	21.6401	-0.54141
	CS15	-226.900	21.6160	-0.54127

SP : Space Truss, CS : Cable Stayed Bridge

유한요소 해석법을 개발하였다.

2. 본 연구에서 제안된 방법은 부재 생산시에 발생할 수 있는 탄성계수의 오차를 구조해석시에 정확히 고려할 수 있다.

3. 사장교 설계시에 케이블 부재의 초기장력 도입량 범위를 예측할 수 있다.

참 고 문 헌

1. 한국건설기술연구원, "구조물의 신뢰성에 관한 연구", 1989. 12.
2. 한국건설기술연구원, "도로교 설계하중의 확률론적 분석", 1991. 12.
3. Hwang, E. S., "Dynamic Loads for Girder Bridges", Ph. D. Thesis, The University of Michigan, 1990.
4. Hyun, C. H., Yun, C. B., "Nonlinear Dynamic Analysis of Suspension Bridges under Random Wind Loading by Stochastic Linearization," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, No. 2, June 1988.
5. Ryu, J. S., Yun, C. B., "Fatigue Life Prediction of Offshore Subjected to Random Waves," *Proc. of the 2nd Conference of Asian-Pacific Congress*, July, 1986.
6. Shinozuka, M., "Response Variability Due to Spatial Randomness," *Proceedings of the 2nd International Workshop on Stochastic Methods in Structural Mechanics*, Pavia, Italy, August 24-27, 1985.
7. Shinozuka, M., Leno, E., "A Probabilistic Model for Spatial Distribution of Material Properties," *J. of Eng. Fracture Mechanics*, Vol. 8, 1976.

8. Vanmarcke, R., Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams," *J. of Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 109, No. 5, Oct. 1983.
9. Deodatis, G., "Weighted Integral Method. I: Stochastic Stiffness Matrix," *J. of Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991.
10. Bucher, C.G., Shinozuka, M., "Structural Response Variability II," *J. of Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 114, No. 12, 1988.
11. Wilson, E., Habibullah, A., "SAP 90-A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures," *Computers & Structures*, Inc., California, U.S.A., July, 1989.

(接受：1992. 9. 2)