

힘 근사화 기법에 의한 3차원 연속체 구조물의 형상최적화

Shape Optimization of Three-Dimensional Continuum Structures by Force Approximation Techniques

한상훈* · 이용종**

Han, Sang Hoon · Lee, Woong Jong

Abstract

The need to develop method which can improve the shape design efficiency using high quality approximation is being brought up. In this study, to perform shape optimal design of three-dimensional continuum structures an efficient approximation method for stress constraints is proposed, based on expanding the nodal forces in Taylor series with respect to shape variables. Numerical examples are performed using the 3-D cantilever beam and fixed-fixed beam and compared with other method to demonstrate the efficiency and convergence rate of the Force Approximation method. It is shown that by taking advantage of this high quality approximation, the total number of finite element analysis required for shape optimization of 3-D continuum structures can be reduced significantly, resulting to the same level of efficiency achieved previously in sizing optimization problems. Also, shape representation by super curve technique applied to obtain optimal shape finds useful method.

요 지

양질의 근사화 방법을 이용하여 형상최적설계의 효율성을 증진시킬 수 있는 방법들을 개발하기 위한 필요성이 제기되어 왔다. 본 연구에서는 3차원 구조물의 형상최적설계를 수행하기 위해 형상변수에 대한 절점력들의 Taylor급수 전개에 근거를 둔 효율적인 근사화 방법을 제안하였다. 수치예로서 캔틸레버보와 양단고정보를 취하여 제안된 방법에 의해 최적형상을 구하였다. 제안된 방법에 의해 얻어진 결과를 기 발표된 다른 방법들의 결과와 비교하여 효율성 및 수렴성에 관해 비교하였다. 그 결과 최적화를 위한 총 구조해석의 수가 크게 줄어들었고, 단면최적화만의 경우와 거의 같은 정도의 효율성을 갖게 됨을 알 수 있었다. 또한 최적형상을 얻기위해 적용된 다항식에 의한 경계표현기법은 최적형상을 얻기위한 유용한 방법임을 알 수 있었다.

1. 서 론

유한요소들의 절점좌표를 변화시키면서 연속체 구조의 최적형상을 찾기 위한 많은 연구가 있어

왔다. 그러나 규모가 크고 복잡한 3차원 구조물의 형상최적화는 문제 자체가 포함하고 있는 비선형성 때문에 단면최적화인 경우에 비해 더욱 어려운 문제로 된다.

3차원 고체모델은 많은 수의 자유도를 포함하고 있으며 또한 복잡한 형태의 요소들을 포함하게 된다.

* 정회원 · 충북대학교 공과대학 토목공학과 부교수
** 정회원 · 충북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정

따라서 한번의 유한요소해석이라도 많은 계산시간이 필요하게 된다. 그래서 필요한 유한요소의 해석 수를 줄이기 위해 구조응답(응력, 변위)들에 대한 근사화 개념은 최적화 알고리즘에서 중요한 요소로 되어가고 있다.

참고문헌 [1]에서는 내력을 단면변수에 대해 Taylor급수 전개함으로써 양질의 응력근사화를 얻을 수 있는 새로운 방법을 제안하였다. 본 연구에서는 참고문헌 [1]에서의 개념을 확장하여 형상변수에 대한 3차원 고체요소에서 응력의 개선된 근사화를 도출하였고 이 근사화 개념을 일반적인 3차원 구조형상 최적화에 적용하여 수렴성을 크게 증진 시켰다. 그리고 뼈대 구조와는 달리 절점력을 면내 및 고체(solid) 연속체 요소에서 직접적으로 얻을 수 없기 때문에 근사화 문제 범위에서 요소단계의 접근방법을 사용하였다.

Yang과 Botkin⁽²⁾은 형상민감도를 얻기위해 물질 미분 접근방법(material derivative approach)을 사용하여 형상최적화 문제를 풀이 하였다. 그들이 사용한 예제를 본 연구에서도 사용하여 그 효율성과 수렴성을 비교하였다.

2. 형상표현기법 및 형상변수 선택

2.1 형상표현 기법

구조물의 형상은 곡선(curve)과 곡면(surface)에 의해 표현될 수 있다. 곡면의 수치적 형상표현은 형상변수와 매개변수의 정보로부터 적절한 형상알고리즘을 선택하여 공간상의 좌표값(예를들면 절점 좌표값)을 계산할 수 있다. 형상알고리즘의 개념도는 그림 1과 같다.

최적화 문제에서 최종 최적형상은 선택된 형상변수 및 형상알고리즘에 크게 좌우된다. 형상변수 및 형상알고리즘 선택방법을 크게 나누면 3가지 방법이 있다.

2.1.1 독립절점이동기법

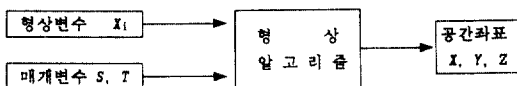


그림 1. Concept of shape algorithm

이 기법에서는 각 독립요소의 경계상에 있는 절점좌표 값을 형상변수로 사용하며, 형상알고리즘은 강성도매트릭스 공식화에서 이용되고 있는 형상함수(shape function)의 특성을 이용하여 형상표현이 가능하나 두가지 큰 결함을 가지고 있다. 하나는 설계변수가 필요 이상으로 많아지고, 두번째로 초기 최적화 과정에서 유한요소 공유면에서 불연속이 발생하며 이로 인해 수렴속도가 매우 늦어지고 계산시간이 많이 요구된다.⁽³⁾

2.1.2 설계요소기법

이 기법에서 형상알고리즘은 유한요소법에서 사용하고 있는 isoparametric 사상(mapping)을 이용하고, 설계변수는 이들 주요절점(master nodes)들 중 경계에 있는 점들에서 선택된다. 이 기법은 독립절점이동기법에서 발생한 문제점인 설계변수 과다 및 불연속 형상으로 인한 난점을 극복할 수 있으나 isoparametric 사상을 이용하기 때문에 포물선 이상의 형상을 갖지 않도록 형상을 제한해야 하는 결함을 갖고 있다.⁽⁴⁾

2.1.3 다항식에 의한 경계표현기법

유한요소모델을 형성하기 위해 필요로 하는 것은 각 절점의 좌표, 즉 곡선(curve)상의 점들이기 때문에 곡면(surface)을 구성하는 몇개의 곡선에 의해 형상을 결정할 수가 있다면 곡면의 형상은 완전하게 결정된다. 유한요소모델의 절점좌표는 다항식에 의해 얻을 수 있으며 다항식의 계수가 형상설계변수가 된다. 이 기법의 가장 큰 잇점은 복잡한 다항식을 사용하지 않고도 고차의 곡면 표현을 가능하게 한다는 점이다.

2.2 형상변수의 선택

효율적인 최적화를 수행하기 위해서는 여러가지 고려사항이 있지만 특히, 그 문제에 대한 형상표현 기법의 적절한 선택이 중요하다. 형상표현기법에서 설계변수의 선택은 서로 상반되는 두가지 면이 있다. 그 하나는 설계변수의 수가 많음에 따라 더욱 많은 구조해석을 요구한다는 점과, 두번째로 설계변수 수를 제한함에 따라 더 좋은 형상표현을 억제하기 때문에 훌륭한 공학설계에 이르지 못하게 하는 면이 있다. 형상표현기법에 의한 가장 좋은 선택 방법은 아직 이론적으로 충분히 정립되지 못했다. 따라서

일반적으로 구조물의 효율적인 최적형상설계를 위해서는, 첫번째로 설계변수의 수를 최소화시키는 것과, 두번째로 실제 발생할 수 있는 형상을 모두 포함 시키는 것, 그리고 마지막으로 요소의 찌그러짐(왜곡)을 방지하는 것들을 고려하는 것이 바람직하다.⁽⁴⁾

본 연구에서는 형상의 표현기법을 다항식에 의한 경계표현기법을 사용하였고 형상을 결정하는 다항식의 계수를 형상설계변수로 취하였다.

3. 형상최적화 문제형성

3.1 형상최적화를 위한 수학적계획문제 형성

형상최적화를 위한 수학적계획문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & :F(X) \text{ 목적함수} \\ \text{Subject to} \quad & :G_j(X) \leq 0, j=1, m \text{ 부등제약조건식} \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U, i=1, n \text{ 설계변수 한계제약조건식} \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 X는 설계변수 벡터이다.

본 연구에서는 목적함수로 구조물의 체적을 취하였고, 제약조건으로는 유한요소의 여러 절점에서 Von Mises 등가응력, 혹은 수직응력을 고려하였으며, 설계변수 한계제약조건을 설계변수상에 포함시켰다.

3.2 근사화 기법

형상최적설계 문제에서 최적해에 도달하는 데는 수십 번 혹은 수백번 이상의 유한요소해석이 필요하다. 특히, 구조물이 20절점 isoparametric 고체요소로 모델화된 경우는 단 한번의 유한요소해석조차도 많은 계산시간이 요구된다. 따라서, 본 연구에서는 최적화 과정 중 필요한 구조해석의 수를 줄이기 위해 절점력의 형상변수에 대한 1차 Taylor급수 전개를 통해 근사구조해석을 생성시키는 근사화 방법을 사용하였다.

3.2.1 절점력 선형근사식 도출

절점력에 대한 1차 Taylor급수 전개에 기초한 근사구조해석을 형성하기 위해 형상설계변수에 대한 절점력의 경사가 계산되어야 한다. 절점력은 식 (2)와 같은 요소강성방정식으로부터 얻어진다.

$$\{F^e\} = [K^e]\{U^e\} \quad (2)$$

여기서, $[K^e]$ 는 요소강성 매트릭스, $\{U^e\}$ 는 요소 절점변위 벡터 그리고 $\{F^e\}$ 는 요소절점력 벡터이다.

근사구조해석 생성단계에서 이 요소절점력 $\{F^e\}$ 대신에 형상설계변수에 대해 1차 Taylor급수 전개를 통하여 얻어진 요소절점력의 선형 근사화를 이용함으로써 반복되는 유한요소의 해석의 수를 감소시킬 수 있다. 따라서 설계변수 값의 변화가 발생할 때마다 요소절점력 $\{F^e\}$ 는 1차 Taylor급수 전개를 통해 근사요소절점력 $\{F_1^e\}$ 을 얻게 되며 이때 형상설계변수에 대한 절점력의 경사를 필요로 하게 된다. 경사정보는 식 (3)과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial F^e}{\partial X_i} = K^e \frac{\partial U^e}{\partial X_i} + \frac{\partial K^e}{\partial X_i} U^e, i=1, NDV \quad (3)$$

여기서, NDV는 설계변수의 수이다. 위 식에서 $\frac{\partial U^e}{\partial X_i}$ 는 식(4)의 전체구조평형방정식을 설계변수에 대해 미분하는 것에 의하여 식 (5)와 같이 얻어진다.

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = K^{-1} \left[\frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} U \right], i=1, NDV \quad (5)$$

이와같이 절점력 민감도를 상기와 같은 방법에 의해 계산할 수 있으나, 본 연구에서는 식 (6)과 같은 전방향유한차분법을 이용하여 절점력 민감도를 계산하였다.

$$\frac{\partial F^e}{\partial X_i} = \frac{F^e(X_i + \Delta X_i) - F^e(X_i)}{\Delta X_i}, i=1, NDV \quad (6)$$

여기서, ΔX_i 는 X_i 에 대한 증분을 나타낸다(일반적으로 0.01을 사용). 근사화 단계에서 형상설계변수에 대한 요소절점력들의 선형근사화는 식 (7)과 같이 된다.

$$F_{1,i}(X) = F^e(X_0) + \sum_{i=1}^{NDV} \frac{\partial F^e}{\partial X_{0i}} \delta X_i, i=1, NDV \quad (7)$$

여기서, $\delta X_i = X_i - X_{0i}$ 이고 X_{0i} 는 초기 설계벡터를 나타낸다.

3.2.2 강체자유도 발견 및 제거

앞 절에서 구한 절점력 선형근사식을 이용 근사응력계산을 수행한다. 때때 구조물인 경우, 절점력

으로 모멘트만 고려했을 때 절점력 근사식을 휨공식에 이용하여 근사응력을 계산함으로써 유한요소 해석으로부터 구조응답을 거치지 않게 되어 계산시간을 크게 줄일 수 있었다. 그러나, 3차원 육면체 요소인 경우, 요소절점력으로부터 응력계산은 휨공식 이용하여 계산할 수 없으므로 요소 단계에서 접근방법이 필요하다. 먼저 근사최적화과정 동안에 형상변수가 변화함에 따라 유한요소망의 변화에 대응하는 요소강성도 매트릭스 $[K_1^e]$ 와 변형률-변위 매트릭스 $[B_1^e]$ 를 재구성하게 되고, 최적화과정 중에 모든 설계변수의 변화에 따른 요소절점변위 $\{U_1^e\}$ 는 식 (8)로부터 구할 수 있다.

$$[K_1^e]\{U_1^e\} = \{F_1^e\} \quad (8)$$

여기서, $[K_1^e]$: 형상변수의 변화에 따라 재 구성된 요소강성도 매트릭스

$\{U_1^e\}$: 형상변수의 변화에 따른 요소절점 변위벡터

$\{F_1^e\}$: 형상변수의 변화에 따라 식(7)로부터 얻어진 근사요소 절점력 벡터

그런데 요소단계에서 요소강성도 매트릭스는 $[K_1^e]$ 는 특이(singular)이며, 이 식은 직접적으로 풀이될 수 없다. 이 특이성을 없애기 위해 강제자유도가 제거되어야 한다. 특히 곡선요소인 경우에 강성도 매트릭스내에 포함되어 있는 강제모드의 수와 형태를 결정하기는 어렵다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 강제자유도의 수를 발견하기 위해 Jacobi 기법⁽⁶⁾을 사용하였다. Jacobi 기법은 실수 계수를 갖는 대칭매트릭스를 대각선 매트릭스로 감소시켜 주며, 이 기법을 이용하여 요소강성도 매트릭스 $[K_1^e]$ 는 식 (9)로 표현된다.

$$[K^d] = [T^T] [K_1^e] [T] \quad (9)$$

여기서, $[K^d]$ 는 대각선 강성도 매트릭스이고, $[T]$ 는 대각선 밖의 항들을 영으로 감소시키기 위해 Jacobi기법에서 사용된 회전매트릭스이다.

이제 식 (9)에서 강제모드가 발견되고 제거되었을 때 식 (8)은 풀이 되어진다.

식 (8)로부터 얻어진 요소절점변위 $\{U_1^e\}$ 는 식 (11)과 같이 요소상의 여러 위치의 수직 및 전단응력을 구하는데 사용된다.

$$\{\sigma^e\} = [D^e][B_1^e]\{U_1^e\} \quad (11)$$

여기서, $[D^e]$ 는 요소재료 특성 매트릭스이고 $[B_1^e]$ 은 변형률-변위 매트릭스이다.

이와 같이 근사화 최적화과정 동안에 요소단계에서 절점력 선형근사식을 이용하고, 강제자유도 발견 및 제거를 통해 요소강성도 매트릭스로부터 해가 구해지기 때문에 전체 강성도 매트릭스를 이용할 필요가 없게 된다. 따라서 컴퓨터 계산시간을 크게 줄일 수가 있게 된다.

Von Mises 등가응력은 식 (12)와 같이 계산된다.

$$\sigma_{v.m.} = (1/\sqrt{2})[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{1/2} \quad (12)$$

따라서, 근사화된 응력제약 조건식은 식 (13)과 같다.

$$\bar{G} = \frac{\sigma_{v.m.}}{\sigma_a} - 1.0 \leq 0 \quad (13)$$

3.3 형상최적화를 위한 알고리즘

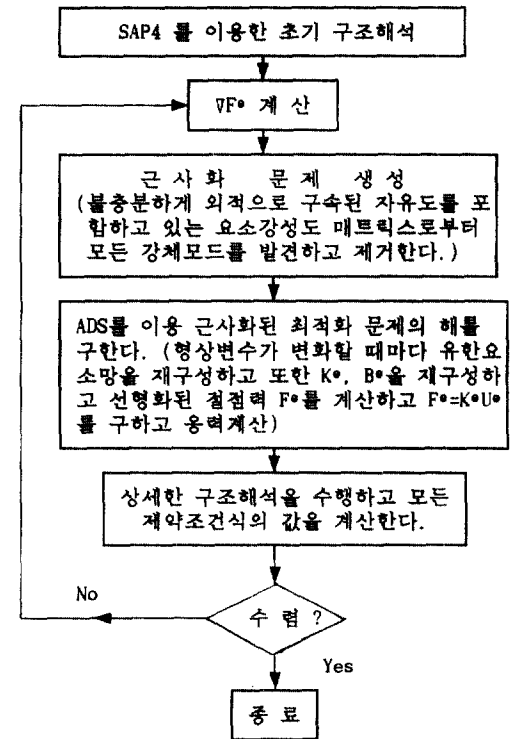


그림 2. Flowchart of shape optimization algorithm

4. 수치에 및 고찰

본 논문에서는 3차원 연속체 구조물의 형상최적화를 위해 퍼스널컴퓨터(IBM-PC/386 호환기종)를 사용하였다. 구조물의 유한요소해석으로는 SAP4 프로그램⁽⁶⁾을 수정하여 단일 부프로그램으로 형성시켰고, 최적설계를 위해 ADS 프로그램⁽⁹⁾을 연결시켜 수행하였다. 최적화알고리즘은 ADS의 Feasible Direction Method를 이용하였다.

4.1 3차원 캔틸레버보

자유단에 집중하중을 받는 캔틸레버보를 20절점 isoparametric 육면체 요소로 모델화 하였고 5개 요소로 구성하였다. 10,000N의 집중하중을 자유단에 작용시켰으며 모델치수와 설계변수는 그림 3에 나타내었다.

재료특성으로는 영계수 = 10.0×10^6 MPa, 포아손비 = 0.3, 허용 휨 응력 = 3000 MPa이다.

형상표현은 본론에서 소개되었던 다항식에 의한 경계표현기법을 사용하였다. 이 때 최적형상은 식 (14)와 같은 2차 다항식을 따르도록 하였고 3점법에 의한 2차 다항식의 계수를 결정하기 위해 그림 3과 같이 중립면으로부터 상단까지의 위치를 3지점에서 선택하여 설계변수로 취하였다. 그리고 상단절점 위치를 하단 절점위치와 대칭을 이루도록 하였고 보의 폭은 일정하게 하였다.

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (14)$$

여기서, a_0, a_1, a_2 는 다항식의 계수이다.

초기 및 최종설계결과치는 표 1에 반복이력은

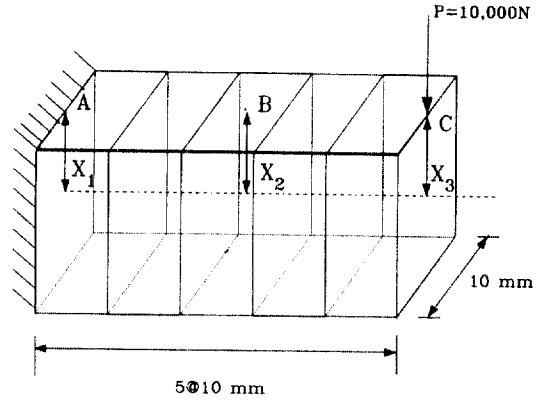


그림 3. Three-dimensional cantilever beam.

그림 4에 나타내었다. 그리고 초기 및 최종설계형상은 그림 5에 도시하였다. 또한 초기 및 최종 최적형상은 SAP90에 의해 구조해석 수행 후, 그래픽 후처리에 의해 수행하였으며, 초기형상의 응력 분포도는 그림 6에 최적형상의 응력분포도는 그림 7에 나타내었다.

고찰

절점력의 선형근사화를 이용하였을 때 반복회수가 5회 만에 수렴하였으며 이는 Yang과 Botkin이 형상민감도를 구하기 위한 물질미분방법과 모듈러방법을 사용한 것 보다 더 빨리 수렴되었다. 그리고, Kodiyalam과 Vanderplaats가 수행한 결과치와 같은 반복회수 만에 수렴됨을 알 수 있다. 초기 형상과 최적형상에 대한 응력분포도에서 알 수 있듯이 거의 완전하게 최적해에 수렴하였음을 보여주고, 2차

표 1. Results of shape optimization for 3-D cantilever beam

설계 변수	초기치	최적해 (mm)		
		본 연구방법	참고문헌 (2)	참고문헌 (7)
X_1	8.0	5.1927	5.006	5.154
X_2	8.0	3.6064	3.618	3.662
X_3	8.0	1.3810	1.440	1.63
목적 함수 값 (체적 mm ³)	8000.0	3491.387	3487.0	3487.85
반복 회수	—	5	10	5

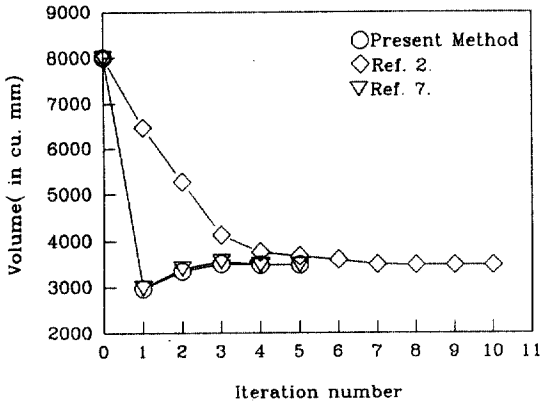


그림 4. Volume design history of cantilever beam.

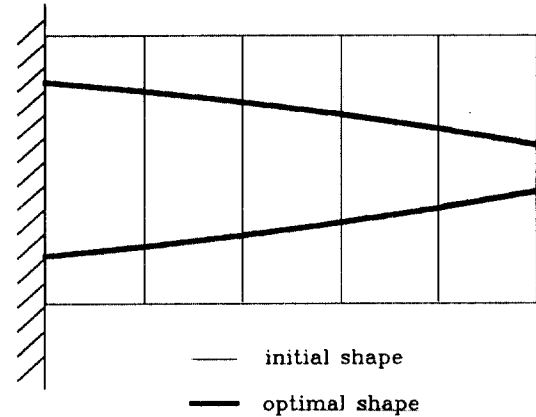


그림 5. Initial and final shape of cantilever beam.

항식이 집중하중을 받는 캔틸레버보의 형상을 표현 하는데 적합한 다항식의 차수임을 알 수 있다.

4.2 양단고정 보

양단고정 정보는 캔틸레버보와 같이 20절점 isoparametric 육면체 요소로 모델화 하였고, 10개 요소로 구성하였다. 재료특성은 캔틸레버보와 같으며, 모델 치수와 설계변수는 그림 8에 나타내었다.

캔틸레버 보와 마찬가지로 다항식에 의한 경계표현기법을 사용하였으며 이 경우 문제의 특성상 고차의 다항식이 필요하므로 Lagrangian법에 의한 보간다항식을 이용하였다. 그림 8과 같이 중립면으로부터 대칭성을 고려하여 보의 상단높이까지의 5 지점의 위치를 설계변수로 선택하였다.

Lagrangian 보간다항식은 다음과 같다.

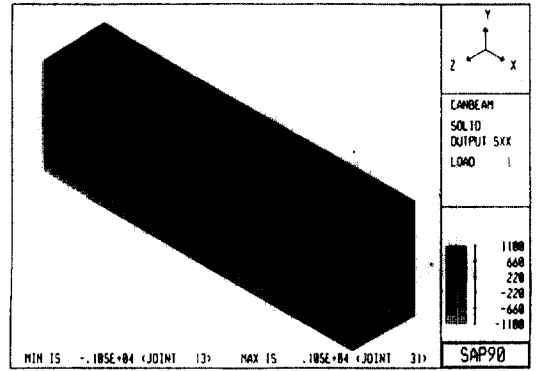


그림 6. Stress distribution of initial shape for cantilever beam.

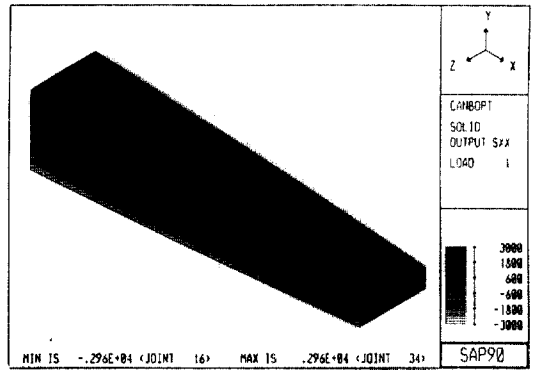


그림 7. Stress distribution of optimal shape for cantilever beam.

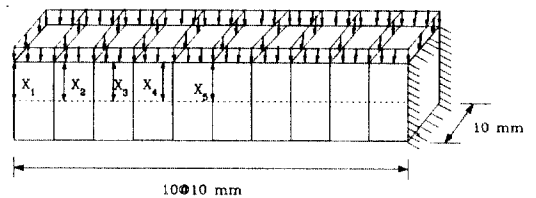


그림 8. Fixed-fixed beam subjected to constant pressure loading.

$$P(x) = \sum_{K=0}^N L_K(x) f_K \quad (15)$$

여기서,

$$L_K(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq K}}^N (x - x_j) / \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq K}}^N (x_K - x_j) \quad (16)$$

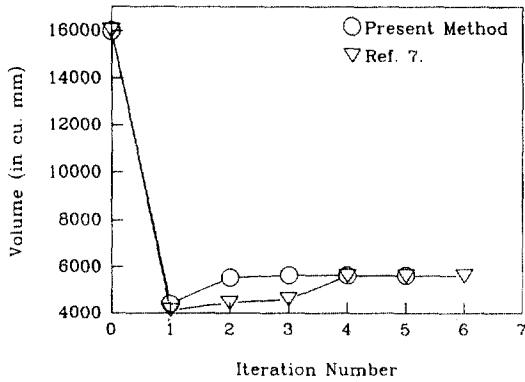


그림 9. Volume design history of fixed-fixed beam.

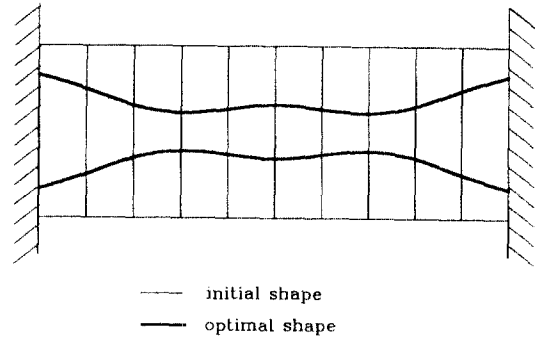


그림 10. Initial and final shape of fixed-fixed beam.

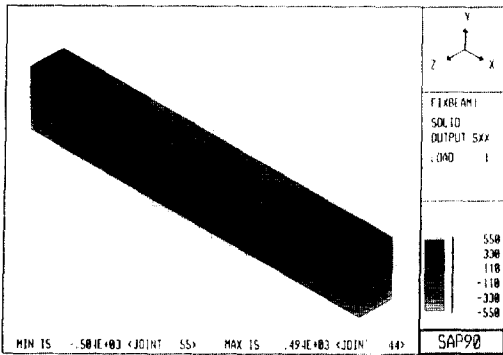


그림 11. Stress distribution of initial shape for fixed-fixed beam.

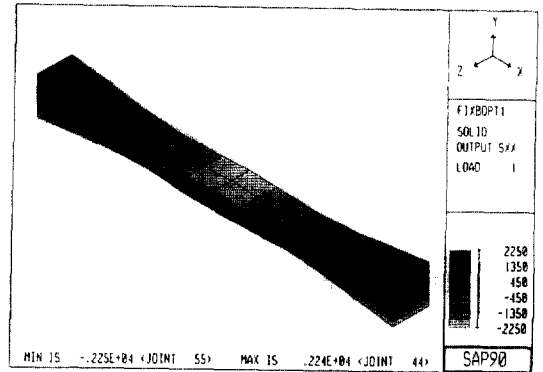


그림 12. Stress distribution of optimal shape for fixed-fixed beam.

초기 및 최종설계 결과치는 표 2에 반복이력은 그림 9에 나타내었다. 그리고 초기 및 최종설계형상은 그림 10에 도시하였다. 초기 설계형상의 응력분포도는 그림 11에 최적설계형상의 응력분포도는 그림 12에 나타내었다.

이는 등분포하중을 받은 양단고정보의 형상을 표현하는 데 적절한 차수임을 알 수 있었다.

고 찰

절점력의 선형화를 이용하였을 때 반복횟수가 5회 만에 수렴하였으며 Kodiyalam과 Vanderplaats가 수행한 결과치와 거의 같은 반복회수만에 수렴됨을 알 수 있다. 양단고정단인 경우 등분포하중을 작용시켰을 때 모멘트의 변화는 선형함수로 따르지 않고 또한 부정정 구조물이므로 고차의 다항식을 필요로 한다. 그러나, 고차의 다항식을 사용하였을 경우 수렴도가 현격히 감소하므로 4차 다항식을 사용하였고

표 2. Results of shape optimization for fixed-fixed beam.

설계 변수	초 기 치	최 적 해 (mm)	
		본 연구방법	참고문헌 (7)
X_1	8.0	5.2858	5.204
X_2	8.0	3.5385	3.4093
X_3	8.0	1.8504	1.7918
X_4	8.0	1.9783	2.0933
X_5	8.0	2.5010	2.6778
목적 함수 값 (체적 mm ³)	16000.0	5639.596	5615.816
반복 회수	—	5	6

5. 결 론

본 논문에서는 3차원 연속체구조의 형상최적설계를 효율적으로 수행하기 위해 형상변수에 대한 절점력들의 1차 Taylor급수전개에 근거를 둔 근사화 방법을 소개하였다. 이 방법을 20절점을 갖는 isoparametric 육면체요소로 구성된 수치예에 적용, 비교 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 형상변수에 대한 절점력의 1차 Taylor급수 전개에 근거를 둔 근사화방법이 매우 정확한 근사화 방법이고 최적화과정 중 필요한 구조해석의 수를 줄일 수 있어 단면최적화만의 경우와 거의 같은 정도의 효율성을 갖게 됨을 알았다.

2) 최적화과정 중 전체 강성도 매트릭스를 풀지 않고 요소단계에서 요소 강성도 매트릭스의 해를 구함으로서 전체적인 계산시간을 줄일 수 있다.

3) 다항식에 의한 경계표현기법이 3차원 연속체 구조의 형상표현으로 적합하였으며 집중하중을 받는 캔틸레버보는 2차 다항식으로, 등분포하중을 받는 양단고정보는 4차 다항식으로 최적형상 표현이 가능함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Vanderplaats, G. N., and Salajegheh, E., "A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis", *Proceedings AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Monterey, California,

- 1987.
2. Yang, R. J. and Botkin, M. E., "A Modular Approach for Three-Dimensional Shape Optimization", *AIAA Journal*, Vol. 25, March 1987, pp. 492-497.
3. 단병주, 김호룡, "자동격자 생성법과 설계요소를 이용한 형상최적설계에 관한 연구", *대한기계학회, 춘계학술대회 논문집*, 1991, pp. 617-621.
4. Imam, M. H., "Three-Dimensional Shape Optimization", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 18, 1982, pp. 661-673.
5. Gallagher, R. H., "Finite Element Analysis Fundamentals", *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
6. Carnaghan, B., Luther, H. A., and Wilkes, J. O., *Applied Numerical Method*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
7. Kodiyalam, S., "Shape Optimization of Three-Dimensional Continuum Structures Using Efficient Approximation Methods," Ph.D. Dissertation, Univ. of California, Santa Barbara, CA, June, 1988.
8. "SAPIV-A Structural Analysis Program", Univ. of California, Berkeley, CA., Rept. EERC 73-11, June, 1973.
9. Vanderplaats, G. N. and Sugimoto, H., "A General Purpose Optimization Program for Engineering Design," *International journal of Computers and Structures*, Vol. 24, No. 1, 1986, pp. 13-21.
10. Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Method for Engineering Design with Application*, McGraw-Hill, May, 1984.

(接受 : 1992. 7. 15)