

薄壁 空間뼈대構造의 橫挫屈 解析

Lateral Buckling Analysis of the Thin-Walled Space Frame

金文榮* · 申鉉穆**

Kim, Moon Young · Shin, Hyun Mock

Abstract

The tangent stiffness matrices of the plane frame and the thin-walled space frame are derived by using the principle of virtual displacement. In case of the plane frame, the shape function and stiffness matrices are presented for the rigid-hinged condition. For the unsymmetric thin-walled space frame, the elastic and geometric stiffness matrices in three cases of the unrestrained torsion, the restrained torsion, and the restrained and unrestrained torsion are evaluated by using the various Hermitian polynomials as the shape function. Numerical examples for the lateral buckling analysis of the space frames and the circular arch illustrate the accuracy and convergence characteristics of the derived formulations

요 지

假想일의 原理를 이용하여 剛節-힌지端을 갖는 平面뼈대要素와 非對稱 薄壁斷面을 갖는 空間뼈대要素의 接線剛度매트릭스가 유도된다. 兩端 拘束된 비틀을 무시하는 경우, 拘束된 비틀을 고려하는 경우, 그리고 왼쪽단은 拘束된 비틀을 고려하고 오른쪽단은 拘束된 비틀을 무시하는 경우 각각에 대하여 薄壁空間뼈대要素의 彈性 및 幾何의인 剛度매트릭스를 산정한다. 이때, 힘을 받는 平面보의 처짐함수를 적절히 선택하여 空間뼈대要素의 세방향처짐과 비틀회전각에 대한 形狀函數로 사용한다. 空間뼈대 構造物과 圓形아치의 橫挫屈문제를 解析하여 本 研究에 의한 解析結果들과 嚴密解 또는 다른 文獻의 結果들과 比較·分析하여 本 研究에서 제시한 理論의 正當性을 立證한다.

1. 서 론

有限要素法을 사용하여 薄壁 空間뼈대構造의 挫屈解析 및 幾何의 非線形解析을 수행하는 경우에 自由度로서 회전각을 가지는 空間뼈대部材의 彈性 剛度 매트릭스와 幾何의인 剛度매트릭스의 계산은 필수적이다.

文獻⁽¹⁾에서는 假想일의 原理를 이용하여 初期應力을 받는 3次元 連續體의 平衡方程式으로부터 剪斷變形을 무시하는 變位場을 도입하여 對稱斷面을 갖는 薄壁空間뼈대의 平衡方程式을 얻었다. 그리고 空間보를 有限要素로 나누어 要素의 變位場을 要素變位에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 平衡方程式에 대입함으로써 拘束된 비틀효과를 고려하는 경우와 이를 무시하는 경우에 대하여 材端 모멘트들이 Semitangential moment에 대응하는 彈

* 정희원 · 成均館大學校 工科學 土木工學科 助教授
** 정희원 · 成均館大學校 工科學 土木工學科 助教授

性剛度 매트릭스, 幾何的인 剛度 매트릭스들을 산정하였다. 文獻⁽¹⁾에서 취급한 直角뿔대構造의 橫挫掘解析에서 拘束된 비틀을 고려하는 경우에 수렴된 臨界荷重값이 Argyris^(2,3)의 결과와 비교할때 약간 차이가 있었다. 이는 部材가 有限한 角度로 만나는 경우에 Bimoment를 스칼라로 가정하고 Bimoment에 대응하는 剛性を 단순히 더했기 때문이라고 판단된다. 또한 文獻⁽⁴⁾에서는 斷面形狀에 제한이 없는 變位場을 도입하여 薄壁空間뿔대의 挫掘解析 및 自由振動解析을 수행하였다. 이를 위하여, 拘束된 뒀을 고려하는 경우와 이를 무시하는 경우에 대하여 彈性剛度 매트릭스, 剪斷中心과 圖心과의 관계를 엄밀하게 고려한 幾何的인 剛度 매트릭스, 그리고 質量매트릭스를 유도하였다.

本 研究에서는 文獻⁽¹⁾에서 제기된 문제점에 대한 해결방안을 제시하고 문헌⁽²⁾에서 제시한 薄壁空間뿔대에 대한 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스를 薄壁空間뿔대의 剛度매트릭스로 확장시킨다. 이를 위하여 오른쪽단은 滑節이고 왼쪽단은 剛節인 경우에 平面뿔대部材의 橫方向 처짐에 대한 形狀函數 및 接線剛度 매트릭스를 유도한다. 그리고 斷面形狀의 제한이 없는 반면에 전단변형을 무시하는 變位場을 고려하여 유도된 薄壁空間뿔대에 대한 平衡方程式으로부터 剪斷中心과 圖心과의 관계를 엄밀하게 고려한 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스를 산정한다. 이때 軸方向 變位에 대해서는 1차, 橫方向 變位들에 대해서는 3차 Hermitian 多項式을 사용하고, 비틀 회전각에 대해서는 部材 兩端의 拘束된 비틀을 고려하는 경우, 兩端의 비틀을 무시하는 경우, 그리고 왼쪽단은 구속된 비틀을 고려하고 오른쪽단은 구속된 비틀을 무시하는 경우에 대응하는 Hermitian 다항식들을 도입한다. 이렇게 얻은 幾何的인 剛度 매트릭스에서 휨모멘트는 Quasitangential Moment, 비틀모멘트는 Semitangential Moment에 해당하므로 材端모멘트들이 모두 Semitangential Moment에 대응하도록 誘導된 剛度매트릭스들을 수정하므로써 Semitangential Rotation 과 Semitangential Moment에 대응하는 幾何的인 剛度매트릭스를 얻는다. 内部힌지를 갖는 平面뿔대構造와 兩端 힌지인 直角空間뿔대 構造物 및 圓形아아치의 橫挫掘에 대한 例題들을 통하여 本 研究에 의한 결과들과 嚴密解 또는 다른 文獻의 결과들을 비교, 검토함으로써 이

研究에서 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

2. 初期應力을 받는 薄壁空間뿔대에 대한 平衡方程式

그림 1은 전단변형효과를 무시하고 비대칭단면을 갖는 박벽공간뿔대의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것으로 C는 도심축, O는 전단중심축, 그리고 e_2, e_3 는 전단중심의 x_2, x_3 좌표성분을 의미한다. U_x, U_y, U_z 는 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동변위(Rigid Body Translation)를 나타내며 θ 는 전단중심축에 대한 강체회전변위(Rigid body rotation), $-U_z', U_y'$ 는 x_2, x_3 축에 대한 강체회전변위를 나타낸다. 여기서 (')는 x_1 에 관한 미분을 의미한다.

이전의 연구결과⁽⁴⁾를 참조하면 비대칭단면을 갖는 박벽공간뿔대에 대한 평형방정식은 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta II_1 + \delta II_2 = \delta R \quad (1)$$

$$\delta II_1 = \int_0^L (EA \cdot U_x' \delta U_x' + EI_3 \cdot U_y'' \delta U_y'' + EI_2 \cdot U_z'' \delta U_z'' + EI_w \cdot \theta'' \delta \theta'' + GJ \cdot \theta' \delta \theta') dx_1 \quad (2)$$

$$\delta II_2 = \int_0^L [1/2 \cdot {}^\circ F_1 \cdot \delta(U_y'^2 + U_z'^2) - 2e_2 \cdot U_z' \theta' + 2e_3 \cdot U_y' \theta'] - {}^\circ M_3 \cdot \delta(U_z' \theta') - {}^\circ M_2 \cdot \delta(U_y' \theta') + 1/2 \cdot {}^\circ M_P \cdot \delta(\theta'^2) + {}^\circ F_2 \cdot \delta(U_z' \theta') - {}^\circ F_3 \cdot \delta(U_y' \theta') - 1/2 \cdot {}^\circ M_1 \cdot \delta(U_y' U_z'' - U_z' U_y'')] dx_1 \quad (3)$$

$$\delta R = F_1^P \cdot \delta U_x^P + F_2^P \cdot \delta U_y^P + F_3^P \cdot \delta U_z^P + M_1^P \cdot \delta \omega_1^P + M_2^P \cdot \delta \omega_2^P + M_3^P \cdot \delta \omega_3^P + M_w^P \cdot \delta f^P + F_1^Q \cdot \delta U_x^Q + F_2^Q \cdot \delta U_y^Q + F_3^Q \cdot \delta U_z^Q + M_1^Q \cdot \delta \omega_1^Q + M_2^Q \cdot \delta \omega_2^Q + M_3^Q \cdot \delta \omega_3^Q + M_w^Q \cdot \delta f^Q \quad (4)$$

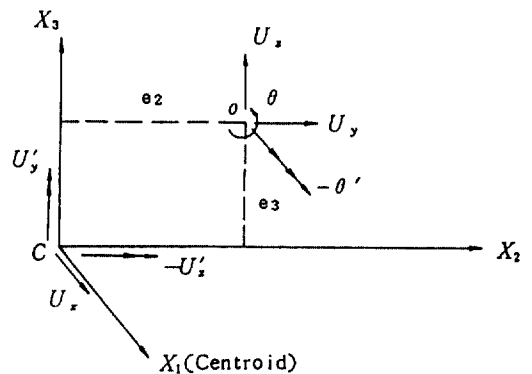


그림 1. Notation for displacements.

여기서, EA, EI₂, EI₃, EI_w, GJ는 각각 軸剛性, x₂와 x₃ 軸에 대한 撓剛性, 撓剛性 (Warping Rigidity), 비틀剛性을 의미하며 <U_e>=<U_x^P, U_y^P, U_z^P, ω₁^P, ω₂^P, ω₃^P, f^P, U_x^Q, U_y^Q, U_z^Q, ω₁^Q, ω₂^Q, ω₃^Q, f^Q>는 재단변위벡터, <F_c>=<F₁^P, F₂^P, F₃^P, M₁^P, M₂^P, M₃^P, M_w^P, F₁^Q, F₂^Q, F₃^Q, M₁^Q, M₂^Q, M₃^Q, M_w^Q>는 재단력벡터를 나타낸다(그림 3참조). δR은 외력(부재양단의 재단력)에 대한 가상일, φ(x₁, x₂)는 전단중심에 대한 撓함수(Warping Function)를 나타낸다. 또한, 식 (3)에 표시된 단면력들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} {}^0F_1 &= \iint {}^0\tau_{11}dA, \quad {}^0F_2 = \iint {}^0\tau_{12}dA, \quad {}^0F_3 = \iint {}^0\tau_{13}dA \\ {}^0M_1 &= \iint (x_2 \cdot {}^0\tau_{13} - x_3 \cdot {}^0\tau_{12})dA + {}^0F_2 \cdot e_3 - {}^0F_3 \cdot e_2 \\ {}^0M_2 &= \iint x_3 \cdot {}^0\tau_{11}dA, \quad {}^0M_3 = -\iint x_2 \cdot {}^0\tau_{11}dA \quad (5) \\ {}^0M_R &= \iint ({}^0\tau_{12} \cdot \phi_{,2} + {}^0\tau_{13} \cdot \phi_{,3})dA, \quad {}^0M_w = \iint {}^0\tau_{11} \cdot \phi \, dA \\ {}^0M_P &= \iint {}^0\tau_{11} \cdot [(x_2 - e_2)^2 + (x_3 - e_3)^2]dA \end{aligned}$$

여기서, ${}^0\tau_{11}$, ${}^0\tau_{12}$, ${}^0\tau_{13}$ 은 초기응력을 표시하며, 0F_1 은 軸力, 0F_2 , 0F_3 는 剪斷力, 0M_2 , 0M_3 는 撓모멘트 그리고 0M_1 은 剪斷中心에 대한 비틀모멘트, 0M_w 는 Bimoment, 0M_R 은 Restrained torsion을 나타낸다. 그리고 식 (5)에서 0M_P 는 4개의 단면력으로 표시할⁽⁴⁾ 수 있다. 구속된 撓을 무시하는 경우에 식 (5)의

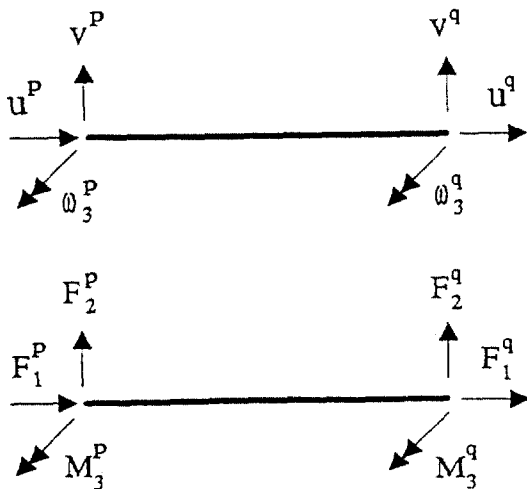


그림 2. Member displacement and force vectors for the plane beam element.

0M_w 와 0M_R 는 零이된다. 그리고 식 (5)에서 정의된 0M_2 와 0M_3 는 각각 x₂, x₃ 축에 대한 Quasitangential Moment에 해당하고 0M_1 은 전단중심축에 대한 Semitangential Moment를 나타낸다. 식 (3)에서 M₂^P, M₃^P, M₂^Q, M₃^Q들은 Quasitangential Moment에 해당하므로 이를 Semitangential Moment로 변화시키기 위해서는 식 (3)에 아래의 항들을 추가시켜야 한다.⁽¹⁾

$$\begin{aligned} &1/2 \cdot [-\delta\omega_1^P \cdot M_3^P \cdot \omega_2^P + \delta\omega_1^P \cdot M_2^P \cdot \omega_3^P \\ &- \delta\omega_2^P \cdot M_3^P \cdot \omega_1^P + \delta\omega_2^P \cdot M_2^P \cdot \omega_1^P] \\ &+ 1/2 \cdot [-\delta\omega_1^Q \cdot M_3^Q \cdot \omega_2^Q + \delta\omega_1^Q \cdot M_2^Q \cdot \omega_3^Q \\ &- \delta\omega_2^Q \cdot M_3^Q \cdot \omega_1^Q + \delta\omega_2^Q \cdot M_2^Q \cdot \omega_1^Q] \quad (6) \end{aligned}$$

3. 内部힘이 있는 平面樑대部材의 매트릭스 平衡方程式

공간樑대에 대한 평형방정식에서 평면樑대의 경우에 U_x, U_y를 제외한 나머지 변위파라미터들은 零이된다. 이를 고려하면 식 (1)은 아래와 같이 간단히 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta II_1 + \delta II_2 &= \delta R \quad (7) \\ \delta II_1 + \delta II_2 &= \int (EA \cdot U_x' \cdot \delta U_x' + EI_3 \cdot U_y'' \cdot \delta U_y'' \\ &+ {}^0F_1 \cdot U_y' \cdot \delta U_y') \, dx_1 \\ \delta R &= F_1^P \cdot \delta U_x^P + F_2^P \cdot \delta U_y^P + M_3^P \cdot \delta \omega_3^P \\ &+ F_1^Q \cdot \delta U_x^Q + F_2^Q \cdot \delta U_y^Q + M_3^Q \cdot \delta \omega_3^Q \end{aligned}$$

오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인 경우에 평면樑대의 강도매트릭스를 유도하기 위하여, 아래와 같이 축력이 없는 경우의 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절로 이루어진 撓부재를 생각하면 다음과 같은 평형방정식과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} EI_3 \cdot U_y(x_1)'''' &= 0.0 \quad (8) \\ \text{경계조건: } U_y(0) &= V^P, \quad U_y'(0) = \omega_3^P \\ U_y(L) &= V^Q, \quad M_3(L) = EI_3 \cdot U_y(L)'' = 0.0 \end{aligned}$$

경계조건을 고려하여 식 (8)의 해를 구하면 식 (9)와 같이 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인 경우에 대응하는 Hermitian 다항식을 얻는다.

$$U_y = k_1 \cdot V^P + k_2 \cdot L \cdot \omega_3^P + k_3 \cdot V^Q + k_4 \cdot L \cdot \omega_3^Q \quad (9)$$

여기서, $k_1 = 0.5 \cdot \beta^3 - 1.5 \cdot \beta^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= 0.5 \cdot \beta^3 - 1.5 \cdot \beta^2 + \beta \\
 k_3 &= -0.5 \cdot \beta^3 + 1.5 \cdot \beta^2 \\
 k_4 &= 0.0 \\
 \beta &= x_1/L, \quad \omega_3^P = (U_y')_P, \quad \omega_3^Q = (U_y')_Q
 \end{aligned}$$

또한 軸方向變位는 다음과 같이 1차 Hermitian 다항식으로 표시할 수 있다.

$$U_x = (1 - \beta) \cdot U^P + \beta \cdot U^Q \quad (10)$$

식 (9),(10)의 축방향 및 횡방향 처짐함수를 형상함수로 사용하여 식 (7)의 포텐셜에너지를 적분하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle \delta U_e \rangle \cdot ([K_e] + [K_g]) \cdot \{U_e\} = \delta R \quad (11)$$

여기서, $[K_e]$, $[K_g]$ 는 오른쪽단은 활절(hinge)이고 왼쪽단은 강절인 경우에 평면뼈대부재에 대한 탄성 및 기하적인 강도매트릭스이고 계산결과들은 부록표 1에 나타내었다.

4. 薄壁 空間뼈대部材의 매트릭스 平衡方程式

그림 3은 박벽공간뼈대요소의 재단변위와 재단력 벡터를 표시한 것이다. 단면강체이동변위(U_x , U_y , U_z) 및 비틀회전각(θ)을 재단변위성분으로 나타내기 위해서, 축방향변위 U_x 는 1차, 횡방향변위 U_y , U_z 는 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용한다. 그리고 비틀각은 세가지 경계조건 즉, 兩端 拘束된

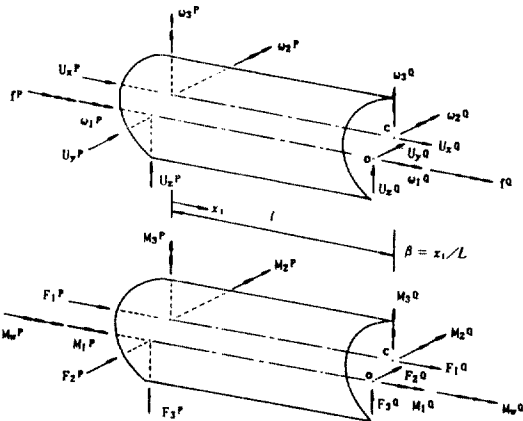


그림 3. Member displacement and force vectors for the thin-walled space frame element.

비틀을 고려하는 경우, 拘束된 비틀을 무시하는 경우, 그리고 왼쪽단은 拘束된 비틀을 고려하고 오른쪽단은 拘束된 비틀을 무시하는 경우에 대응하는 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용한다(4.1, 4.2, 4.3 절 참조).

$$U_y = h_1 \cdot V^P + h_2 \cdot \omega_3^P + h_3 \cdot V^Q + h_4 \cdot \omega_3^Q \quad (12)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^P + h_2 \cdot (-\omega_2^P) + h_3 \cdot W^Q + h_4 \cdot (-\omega_2^Q)$$

여기서, $h_1 = 1 - 3\beta^2 + 2\beta^3$

$$h_2 = \beta - 2\beta^2 + \beta^3$$

$$h_3 = 3\beta^2 - 2\beta^3$$

$$h_4 = -\beta^2 + \beta^3$$

$$\omega_3^P = (U_y')_P, \quad \omega_2^P = -(U_z')_P$$

$$\omega_3^Q = (U_y')_Q, \quad \omega_2^Q = -(U_z')_Q$$

구조물을 유한요소로 분할하였을때 하중이 부재의 절점에만 작용한다고 가정하면, 축방향력과 전단력은 일정하고 휨모멘트는 선형분포한다. 이를 고려하면 부재내부에 발생하는 단면력들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_1 = -F_1^P, \quad F_2 = -F_2^P, \quad F_3 = -F_3^P$$

$$M_2 = -M_2^P - F_3^P \cdot \beta \cdot L, \quad M_3 = -M_3^P + F_2^P \cdot \beta \cdot L \quad (13)$$

4.1 拘束된 뒀을 고려한 薄壁空間뼈대의 接續剛度매트릭스

구속된 뒀을 고려하는 경우에 비틀각은 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^P + h_2 \cdot (-L \cdot f^P) + h_3 \cdot \omega_1^Q + h_4 \cdot (-L \cdot f^Q) \quad (14)$$

여기서, $f^P = -(\theta')_P$, $f^Q = -(\theta')_Q$

$F_2^P = (M_3^P + M_3^Q)/L$, $F_3^P = -(M_2^P + M_2^Q)/L$ 관계식을 고려하여 식 (10),(12) 그리고 식 (14)를 식 (1),(2)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = \langle \delta U_e \rangle \cdot ([K_{e1}] + [K_{g1}^*]) \cdot \{U_e\} = \{F_e\} \quad (15)$$

여기서, $[K_{e1}]$ 와 $[K_{g1}^*]$ 는 구속된 뒀을 고려한 탄성 및 기하적인 강도매트릭스이다. 식 (15)에서 정의되는 M_2^P , M_3^P , M_2^Q , M_3^Q 들은 식 (5)를 고려할때 Quasitangential Moment에 해당하므로 이를 Semi-

tangential Moment로 변화시키기 위하여 식 (16)과 같은 수정이 이루어져야 한다. $[K_{e1}]$ 은 문헌⁽¹⁾의 부록표 1.1, $[K_{g1}]$ 은 본 연구의 부록표 2에 구체적인 계산결과를 제시하였다.

$$\begin{aligned} [K_{g1}]_{4,5} &= [K_{g1}]_{5,4} = [K_{g1}^*]_{4,5} - 1/2 \cdot M_3^P \\ [K_{g1}]_{4,6} &= [K_{g1}]_{6,4} = [K_{g1}^*]_{4,6} + 1/2 \cdot M_2^P \\ [K_{g1}]_{11,12} &= [K_{g1}]_{12,11} = [K_{g1}^*]_{11,12} - 1/2 \cdot M_3^Q \\ [K_{g1}]_{11,13} &= [K_{g1}]_{13,11} = [K_{g1}^*]_{11,13} + 1/2 \cdot M_2^Q \end{aligned} \quad (16)$$

4.2 오른쪽단은 拘束된 뒀을 고려하고 왼쪽단은 拘束된 뒀을 무시한 薄壁空間 뼈대의 接線 剛度매트릭스

오른쪽단은 구속된 뒀을 고려하고 왼쪽단은 구속된 뒀을 무시하는 경우에, 식 (9)에서 유도된 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절로 연결되는 뒀부재의 횡방향 처짐함수를 비틀각에 대한 형상함수로 사용한다.

$$\theta = k_1 \cdot \omega_1^P + k_2 \cdot (-L \cdot f^P) + k_3 \cdot \omega_1^Q + k_4 \cdot (-L \cdot f^Q) \quad (17)$$

4.1절의 경우와 유사한 계산과정을 거치면 식 (1), (2)는 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = \langle \delta U_c \rangle \cdot ([K_{e2}] + [K_{g2}]) \cdot \{U_c\} = \{F_c\} \quad (18)$$

여기서, $[K_{e2}]$, $[K_{g2}]$ 는 각각 오른쪽단은 구속된 뒀을 고려하고 왼쪽단은 구속된 뒀을 무시하는 경우에 박벽공간뼈대요소의 탄성 및 기하적인 강도매트릭스이고 구체적인 계산결과는 부록표 3, 부록표 4에 나타내었다. $[K_{g2}]$ 매트릭스를 산정할때 재단 휨모멘트들이 Semitangential Moment에 대응하도록 4.1 절과 동일한 수정이 이루어졌다.

4.3 拘束된 뒀을 무시한 薄壁空間 뼈대의 接線 剛度매트릭스

구속된 뒀을 무시하는 경우에 비틀각은 1차 Hermitian 다항식으로 가정한다.

$$\theta = n_1 \cdot \omega_1^P + n_2 \cdot (-L \cdot f^P) + n_3 \cdot \omega_1^Q + n_4 \cdot (-L \cdot f^Q) \quad (19)$$

여기서, $n_1 = 1 - \beta$, $n_2 = 0.0$, $n_3 = \beta$, $n_4 = 0.0$

4.1절의 경우와 유사한 계산과정을 거치면 식 (20)과 같은 결과를 얻는다.

$$\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = \langle \delta U_c \rangle \cdot ([K_{e3}] + [K_{g3}]) \cdot \{U_c\} = \{F_c\} \quad (20)$$

여기서, $[K_{e3}]$, $[K_{g3}]$ 는 구속된 뒀을 무시한 경우에 대응하는 탄성 및 기하적인 강도 매트릭스이고, $[K_{e3}]$ 은 문헌⁽¹⁾의 부록표 2.1, $[K_{g3}]$ 은 본 연구의 부록표 5에 계산결과를 제시하였다.

4.4 薄壁空間 뼈대에 대한 座標變換매트릭스

박벽공간뼈대구조를 해석하기 위해서는 4.1-4.3 절에서 유도된 강도매트릭스는 모두 부재좌표계(x_1, x_2, x_3)에 대하여 유도된 것이므로 이를 전체좌표계(x, y, z)에 대한 것으로 좌표변환을 행하여야 한다. 부재좌표계와 전체좌표계 사이의 변환관계는 식 (21)과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{x\} &= [R] \cdot \{x^*\} \\ \{x\}^T &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle, \{x^*\}^T = \langle x, y, z \rangle \\ &\cos(x_1, x) \cos(x_1, y) \cos(x_1, z) \\ [R] &= \begin{vmatrix} \cos(x_2, x) & \cos(x_2, y) & \cos(x_2, z) \\ \cos(x_3, x) & \cos(x_3, y) & \cos(x_3, z) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\cos(x_1, x)$ 는 x_1 축과 x 축 사이의 방향코사인을 나타낸다.

Bimoment를 스칼라로 가정하면 전체좌표계에 대한 薄壁空間 뼈대의 탄성 및 기하적인 강도매트릭스($[K_E]$, $[K_G]$)는 座標變換매트릭스($[T]$)를 이용하여 식 (22)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_E] + [K_G] = [T]^T \cdot ([K_e] + [K_g]) \cdot [T] \quad (22)$$

여기서,

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & & & \\ & [R] & & \\ & & 1 & \\ & & & [R] \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

5. 數值解析例

본 연구에서 제시된 이론을 적용하여 이전의 박벽공간뼈대구조의 좌굴하중을 구하기 위한 유한요

소해석 프로그램 [SEIG]⁽⁴⁾를 수정·보완하였다. 절점당 자유도수는 7개이고, 요소당 절점수는 2개이므로 사용된 부재강도매트릭스의 크기는 14~14로 된다. 문헌⁽⁴⁾에서 비대칭단면을 갖는 공간보의 비틀림-횡좌굴, 횡좌굴문제를 해석하고 엄밀해와 비교함으로써 유도된 강도매트릭스를 검증한 바 있으므로, 본 연구에서는 내부힌지를 가진 평면뼈대구조의 횡좌굴, 박벽공간뼈대 구조의 횡좌굴, 그리고 원형아치의 횡좌굴문제를 해석하여, 본 연구의 결과와 엄밀해 또는 Argyris의 해석결과와 비교·검토함으로써 본 연구에서 제시한 이론의 정당성을 입증한다.

5.1 内部힌지를 갖는 平面뼈대 構造의 橫좌굴

그림 4는 경계조건이 고정단-회전단 및 회전단-고정단인 경우에 부재가 활절로 연결되는 직각뼈대구조를 나타낸 것이며 이때 사용된 재원은 다음과 같다.

길이 $L=120\text{ cm}$ 탄성계수 $E=7.2 \cdot 10^6\text{ N/cm}^2$
 단면적 $A=6\text{ cm}^2$ 단면 2차모멘트 $I=2\text{ cm}^4$

표 1은 내부힌지를 갖는 직각뼈대구조(그림 4)가 수직하 부재에 압축력 P 를 받아서 횡좌굴을 일으키는 경우에 본 연구에 의한 임계하중값을 나타낸 것이며 팔호안의 값은 부재가 강절로 연결되는 경우에 임계하중값을 표시한 것이다. 요소의 수가 증가함에 따라 엄밀해⁽⁶⁾에 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다.

5.2 모멘트에 의한 直角뼈대構造의 橫좌굴

표 1. Critical forces of right-angle frame

Number of Elements	Fixed - Hinge	Hinge - Fixed
4	12000.00 (19998.50)	29998.44 (52498.34)
8	9943.846 (14819.92)	20707.75 (27545.43)
12	9885.212 (14698.02)	20313.67 (27177.78)
16	9874.659 (14672.31)	20231.27 (27035.16)
20	9871.698 (14664.80)	20207.23 (26990.87)

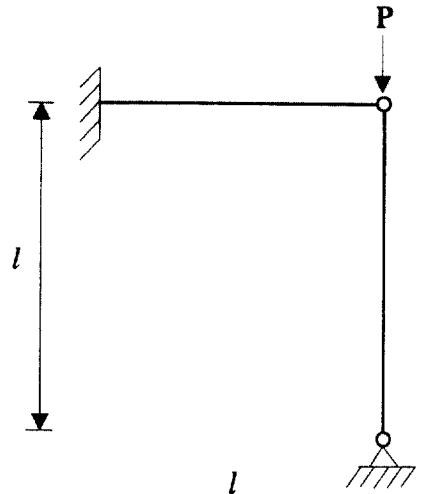
Analytical sol.:

Fixed-Hinge 인 경우 $P_{cr}=9869.604\text{ (14659.36)}$

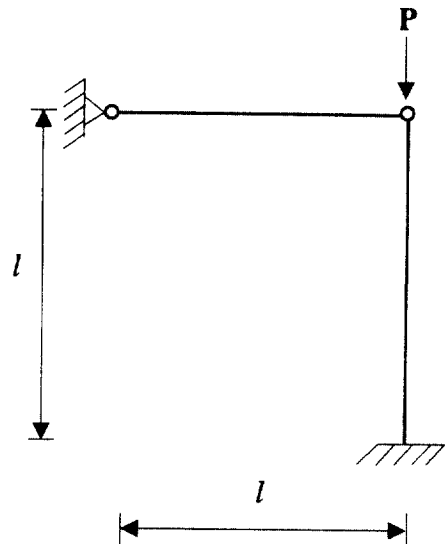
Hinge-Fixed 인 경우 $P_{cr}=20189.79\text{ (26957.69)}$

그림 5, 6은 Quasitangential moment와 Semitangential moment에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각뼈대구조를 나타낸 것이다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$L=100\text{ cm}$, $E=10^4\text{ N/cm}^2$, $G=E/2$,
 $A=0.2\text{ cm}$, $I_y=1\text{ cm}^4$, $I_z=0.125\text{ cm}^4$,
 $J=0.01\text{ cm}^2$, $I_w=0.0\text{ cm}^4$



(a) Fixed-hinge right-angle frame



(b) Hinge-fixed right-angle frame

그림 4. Right-angle frame with a internal hinge.

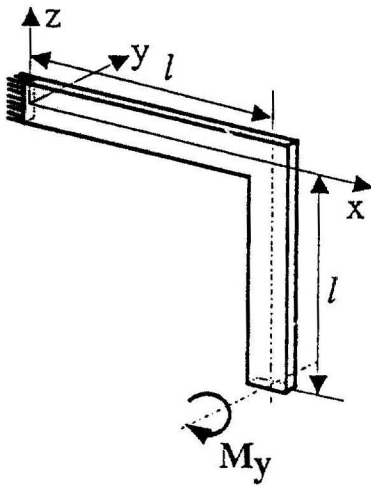


그림 5. Lateral buckling of right-angle frame under end moment. Data of problem.

그림 6a, 6b와 같이 Quasitangential moment 가 작용하여 횡좌굴을 일으키는 경우에는 문헌⁽¹⁾에서와 같이 모멘트가 작용하는 절점의 기하적인 강도매트릭스를 산정할 때 다음과 같은 수정이 필요하다.

QT moment(I):

$$[K_g]_{4,5} = [K_g]_{5,4} = [K_g]_{4,5} + 1/2 \cdot M_3^Q$$

$$[K_g]_{4,6} = [K_g]_{6,4} = [K_g]_{4,6} - 1/2 \cdot M_2^Q$$

QT moment(II):

$$[K_g]_{4,5} = [K_g]_{5,4} = [K_g]_{4,5} - 1/2 \cdot M_3^Q$$

$$[K_g]_{4,6} = [K_g]_{6,4} = [K_g]_{4,6} + 1/2 \cdot M_2^Q$$

요소의 수를 증가시키에 따라 구조물의 횡좌굴에

대한 임계모멘트값은 표 2a, 2b, 2c에 나타내었다. 표 2에서 본 연구의 해석결과는 직각으로 연결되는 수평요소만 부록표 3의 강도매트릭스를 사용하고 나머지 요소들은 문헌⁽¹⁾의 부록표 1의 강도매트릭스를 사용하여 계산한 것이다. 본 연구의 결과와 Argyris^(3,4)의 결과에서는 모멘트를 작용시키는 방향에 관계없이 크기가 동일한 값을 나타내었지만 문헌⁽¹⁾의 결과에서는 모멘트의 작용방향에 따라 임계모멘트값의 크기가 달라지는 양상 나타내었다. 이는 문헌⁽¹⁾의 방법의 경우에 Bimoment를 스칼라 양으로 생각하여 직각으로 만나는 수평, 수직요소의 Bimoment에 대응하는 강도값들을 단순히 더하여 임계하중을 계산한 결과라고 생각된다. 이러한 점을 보완한 본 연구의 방법은 표 2에서 나타난 바와 같이 모멘트의 작용방향에 관계없이 임계모멘트의 크기가 동일한 결과를 나타내었을 뿐만 아니라 요소를 적게 사용하여도 Argyris의 결과보다 빠르게 수렴한다는 것을 볼 수 있다.

5.3 水平荷重에 의한 直角 卍대構造의 橫좌굴

그림 7은 횡방향 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각卍대구조를 나타낸 것이다. 좌굴해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$L = 100 \text{ cm}, E = 10^4 \text{ N/cm}^2, G = E/2, A = 1 \text{ cm},$$

$$I_y = 10000 \text{ cm}^4, I_z = 1 \text{ cm}^4,$$

$$2J = 2 \text{ cm}^2, I_w = 0.0 \text{ cm}^4$$

구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 표 3a, 3b에

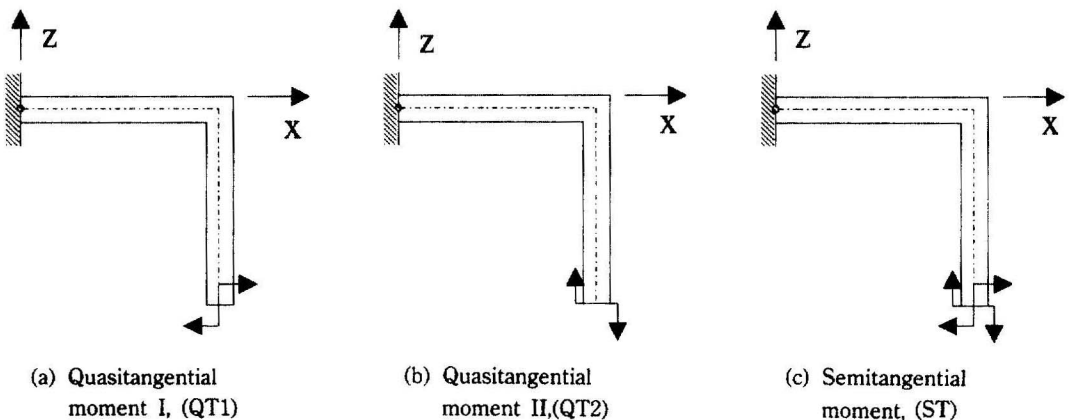


그림 6. Lateral buckling of right-angle frame under end moment.

표 2a. Critical moment of right-angle frame under QT1

Number of Elements	This study	Results by ref. ⁽¹⁾	Argyris's results
2	± 0.493491	+0.493489, -0.552196	± 0.493505
4	± 0.493489	+0.493489, -0.522999	± 0.493494
6	± 0.493489	+0.493489, -0.512829	± 0.493491
8	± 0.493489	+0.493489, -0.507860	± 0.493490
10	± 0.493489	+0.493489, -0.504922	± 0.493490
12	± 0.493489	+0.493489, -0.503177	± 0.493489
20	± 0.493489	+0.493489, -0.499258	± 0.493489

표 2b. Critical moment of right-angle frame under QT2

Number of Elements	This study	Results by ref. ⁽¹⁾	Argyris's results
2	± 3.44417	+3.44273, -3.87102	± 3.76435
4	± 3.43421	+3.43410, -3.64329	± 3.51189
6	± 3.43365	+3.43362, -3.56981	± 3.46798
8	± 3.43355	+3.43354, -3.53443	± 3.45282
10	± 3.43352	+3.43352, -3.51363	± 3.44585
12	± 3.43351	+3.43351, -3.49995	± 3.44207
20	± 3.43350	+3.43350, -3.47298	± 3.43658

표 2c. Critical moment of right-angle frame under ST

Number of Elements	This study	Results by ref. ⁽¹⁾	Argyris's results
2	± 0.986993	+0.986978, -1.10371	± 0.987011
4	± 0.986980	+0.986978, -1.04584	± 0.987011
6	± 0.986979	+0.986978, -1.02559	± 0.986995
8	± 0.986978	+0.986978, -1.01568	± 0.986988
10	± 0.986978	+0.986978, -1.00982	± 0.986984
12	± 0.986978	+0.986978, -1.00595	± 0.986982
20	± 0.986978	+0.986978, -0.99828	± 0.986979

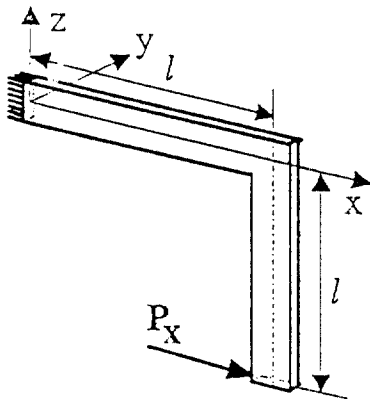


그림 7. Lateral buckling of right-angle frame under end load. Data of problem.

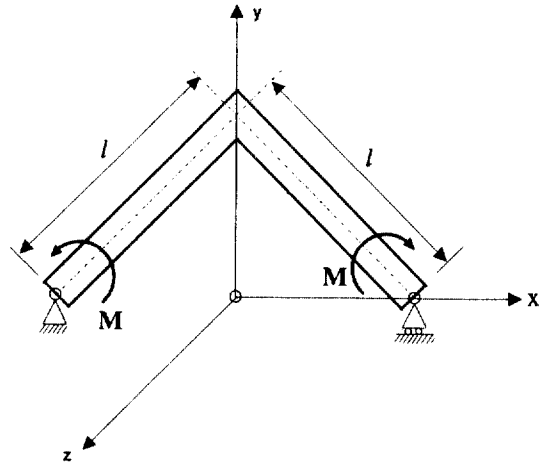
나타내었다. 방법 1은 직각으로 연결되는 수평요소만 부록표 3의 강도매트릭스들을 사용하고 나머지 요소들은 문헌⁽¹⁾의 부록표 1의 강도매트릭스들을 사용하여 계산한 것이다. 방법 2는 수평요소와 수직요소가 만나는 절점의 Bimoment에 대응하는 자유도를 구속하고 나머지 요소들은 방법 1과 동일한 요소를 사용하여 해석한 결과이다. 5.2절의 경우와 마찬가지로 Argyris와 문헌⁽¹⁾의 해석결과에 비하여 방법 1에 의한 임계하중값이 적은요소를 사용하여도 더 정확하고 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다.

5.4 單純支持된 直角 卮대構造物의 橫挫振

그림 8a와 그림 8b는 각각 양단의 모멘트 와 중

표 3a. Critical load of right-angle frame under end force (load P_x negative)

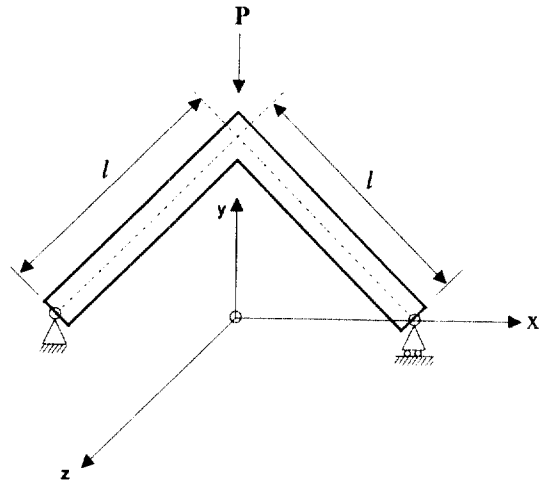
Number of Elements	This study		Results by ref. ⁽¹⁾	Argyris's results
	Method 1	Method 2		
2	0.920857	0.981377	0.967465	0.966318
4	0.918112	0.948675	0.942199	0.929945
6	0.917958	0.938024	0.933852	0.923255
8	0.917925	0.932853	0.929775	0.920916
10	0.917917	0.929799	0.927359	0.919834
12	0.917914	0.927782	0.925762	0.919246
20	0.917911	0.923792	0.922594	0.918391



(a) Lateral buckling of frame under end moment

표 3b. Critical load of right-angle frame under end force (load P_x positive)

Number of Elements	This study		Results by ref. ⁽¹⁾	Argyris's results
	Method 1	Method 2		
2	1.50584	1.69950	1.50947	1.64538
4	1.50083	1.59721	1.50392	1.53742
6	1.50083	1.56279	1.50251	1.51661
8	1.50009	1.54633	1.50186	1.50933
10	1.50004	1.53670	1.50149	1.50597
12	1.50002	1.53039	1.50124	1.50414
20	1.50000	1.51800	1.50074	1.50148



(b) Lateral buckling of frame under central force

양의 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각뿔대구조를 나타낸 것이다. 부재단면은 직사각형이며 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$L=240, \text{ mm } I_y=1350 \text{ mm}^4, I_z=0.54 \text{ mm}^4, \\ E=71240 \text{ N/mm}^2, \nu=0.31, I_w=0.0 \text{ mm}^4, \\ A=18.0 \text{ mm}^2$$

구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 구조물의 절반만을 요소분할하여 해석하였으며, 5.3절에서 언급한 방법 1을 사용하여 임계하중을 산정하였다. 그리고 본 연구에 의한 해석결과와 Argyris⁽⁶⁾의 결과를 함께 표 4a, 4b에 나타내었다. 또한 해석결과들을 비교하기 위하여 쉘요소를 사용하여 구한 결과⁽⁶⁾와 엄밀해⁽⁵⁾를 함께 표시하였다. 표에서 보는 바와 같이 요소의 수를 증가시키에 따라 본 연구에 의한

그림 8. Lateral buckling of hinged right-angle frame.

임계하중값이 빠르게 엄밀해에 수렴하는 것을 알 수 있다.

5.5 兩端 힌지인 圓形아아치의 橫좌屈

그림 9는 양단의 모멘트에 의해서 횡좌굴을 일으키는 원형 아아치구조를 나타낸 것이다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$R=50 \text{ cm}, A=1.0 \text{ cm}^2, I_y=0.125 \text{ cm}^4, I_z=1.0 \text{ cm}^4, \\ E=10^4 \text{ N/cm}^2, GJ=50 \text{ N} \cdot \text{cm}^2, I_w=0.0 \text{ cm}^4$$

표 4a. Critical moment of right-angle frame under moment

Number of Elements	This Study	Argyri 's Result
1	± 645.4269	± 882.62
2	± 624.5440	± 686.08
4	± 622.3675	± 638.30
6	± 622.2255	± 629.34
8	± 622.2184	± 626.21
10	± 622.2124	± 624.77

Trump (셀요소) : $M_{z1}=624.36$, $M_{z2}=632.50$
 Analytical sol.: $M_z=622.21$

표 4b. Critical moment of right-angle frame under central force

Number of Elements	This Study	Argyri 's Result
1	+4.020289, -12.00825	+4.0474, -18.4558
2	+3.950129, -11.69596	+3.9595, -14.2362
4	+3.946413, -11.65154	+3.9507, -12.2646
6	+3.946208, -11.64972	+3.9483, -11.9167
8	+3.946173, -11.64849	+3.9474, -11.7981
10	+3.946164, -11.64814	+3.9469, -11.7437

TRUMP(셀요소) : $M_z=+3.9459$, -12.6943

구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 구조물의 절반만을 직선유한요소로 분할하여 해석하였다. 이때 힌지단을 포함하는 유한요소의 강도매트릭스를

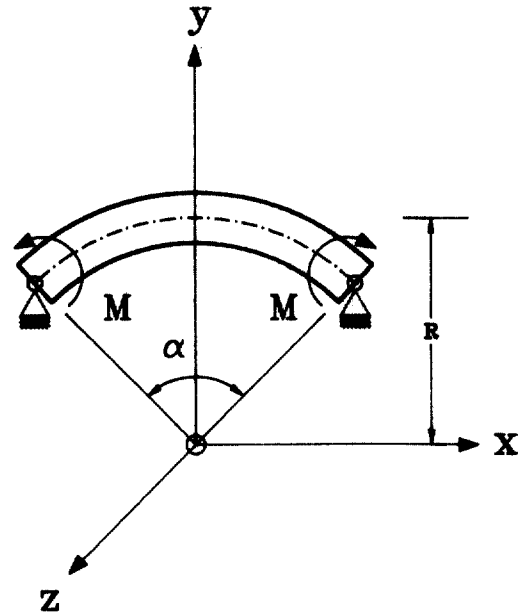


그림 9. Lateral buckling of hinged circular arch under end moment.

전체좌표계로 변환시킬때 힌지단의 자유도는 전체 좌표계로 변환시키지 않고 강도매트릭스를 산정하고 경계조건을 적용함으로써 힌지단의 경계조건을 정확히 나타내었다. 표 5는 아아치의 사이각 α 를 30° 간격으로 $0^\circ - 180^\circ$ 로 증가시킴에 따라 아아치의 절반을 20개의 유한요소로 분할하여 해석한 결과와 엄밀해⁶⁾를 함께 나타낸 것이다. 표 5에서 방법 1과 방법 2의 임계모멘트는 각각 부록표 2와 부록표 5의 강도매트릭스를 사용하여 해석한 결과이다. 표에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 임계하중값이 엄

표 5. Critical moment of the two-hinged circular arch

α°	Analytical solution	This study	
		Method 1	Method 2
0°	+7.853982, -7.853982	+7.865600, -7.865600	+7.853983, -7.853983
30°	+11.862389, -5.055605	+11.865155, -5.064451	+11.858316, -5.064639
60°	+16.864788, -3.251220	+16.874200, -3.271896	+16.859893, -3.272654
90°	+22.478488, -2.058135	+22.498048, -2.092348	+22.473642, -2.093061
120°	+28.432431, -1.205295	+28.465053, -1.253265	+28.427364, -1.253767
150°	+34.578997, -0.545077	+34.628035, -0.606567	+34.573013, -0.606831
180°	+40.840705, -0.000000	+40.910279, -0.074641	+40.832892, -0.074674

밀해와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

6. 結 論

假想일의 原理를 이용하여 剛節-힌저端을 갖는 平面 뼈대要素의 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스를 산정하고, 이때 橫方向 처짐에 대한 形狀函數를 薄壁空間 뼈대의 비틀각의 形狀函數로 사용하여 非對稱斷面을 갖는 空間 뼈대要素에 대한 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스를 유도하였다. 또한 兩端 拘束된 비틀을 무시하는 경우와 拘束된 비틀을 고려하는 경우에 대하여 도심과 전단중심의 위치를 엄밀하게 고려하는 강도매트릭스를 유도하였다. 斷面力의 정의를 고려할 때 剛度매트릭스의 材端 휨모멘트들은 Quasitangential Moment, 비틀모멘트는 Semitangential Moment에 대응하도록 정의된 것이므로 節點의 모멘트들이 모두 Semitangential Moment에 대응하도록 剛度매트릭스를 修正하였다. 空間 뼈대 構造物에 대한 橫挫掘解析에서 部材들이 서로 直角으로 만나는 節點에 연결된 오른쪽部材의 剛度매트릭스는 부록표 3, 4을 사용하고 나머지 部材들의 剛度매트릭스는 부록표 2의 拘束된 비틀을 考慮한 剛度매트릭스를 사용한 결과 一貫性있는 解析結果를 얻었을 뿐만아니라 Argyris의 결과와 比較해 볼때 要素數를 적게 사용하여도 빠르게 收斂하는 것을 알 수 있었다. 그리고 兩端힌지인 아아치의 橫挫掘解

析의 경우에 힌지단의 自由度만은 局部座標係로 정의하고 나머지 절점의 自由度들은 全體座標係로 變換시키고 境界條件을 적용함으로써 嚴密解에 近接하는 解析結果를 얻었다.

참 고 문 헌

1. 金文榮, 申鉉穆: “有限要素法을 이용한 薄壁 空間 뼈대構造의 挫掘解析”, 大韓土木學會 論文集, 제3권 제1호, 1993. 3.
2. J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf: “On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 14, 1978, pp. 401-451.
3. J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf: “On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 15, 1978, pp. 99-135.
4. 金文榮, 張丞弼: “非對稱斷面을 갖는 薄壁 空間보의 挫掘 및 自由振動解析”, 韓國鋼構造學會 論文集, 제4권 제4호, 1992. 12.
5. S. P. Timoshenko and J. M. Gear: “*Theory of elastic stability*”, 2nd ed., McGraw Hill, 1961, pp. 212-277.
6. J. H. Argyris, O. Hilpert, G. A. Malejannakis and D.W. Scharpf: “On the geometrical stiffness of a beam in space-a consistent v. w. approach”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 20, 1979, pp. 105-131.
(接受: 1992. 4. 27)

