

# 有限要素法에 의한 薄壁 空間 뼈대 構造의 挫屈 解析

## Stability Analysis of Thin-Walled Space Frame by F.E.M.

金文榮\* · 申鉉穆\*\*

Kim, Moon Young · Shin, Hyun Mock

### Abstract

Tangent stiffness matrices are derived for the torsional and lateral stability analysis of the space beams and framed structures with the symmetric thin-walled section by using the principle of virtual displacement. In the cases of restrained torsion and unrestrained torsion, the elastic and geometric stiffness matrices are evaluated by using the Hermitian polynomials which represent the displacement field of the beam element in simple flexure. Numerical examples illustrate the accuracy and convergence characteristics of the derived formula-tions.

### 요 지

假想變位の 原理를 이용하여 空間薄壁보 및 뼈대 構造物의 비틀림 橫挫屈解析을 수행하기 위한 接線剛도 매트릭스들이 誘導된다. 拘束된 비틀을 고려하는 경우와 무시하는 경우 각각에 대하여, 彈性 및 幾何的인 剛도 매트릭스들이 얻어지며 이때 軸方向 變位, 橫方向 처짐들, 그리고 비틀회전각에 대하여 적절한 Hermitian 다항식들을 形狀函數로 사용된다. 數值解析例題들을 통하여 본 研究에서 제시한 理論의 正當性을 立證한다.

### 1. 序 論

有限要素法을 사용하여 薄壁空間 뼈대의 安定性 (Stability) 및 幾何的 非線形解析을 수행하는 경우에 彈性剛도 매트릭스와 幾何的인 剛도 매트릭스의 계산은 필수적이다. 이러한 剛도 매트릭스를 이용하여 薄壁空間보의 挫屈解析 및 幾何的 非線形解析을 수행한 이제까지 연구들은 文獻<sup>(1,2)</sup>에서 찾아볼 수 있다.

Argyris<sup>(3,4)</sup>는 空間보로 부터 空間 뼈대 構造物에 대한 것으로 확장시켰을 때, 有限要素法에 의한 挫屈

및 幾何的 非線形 解析에 대한 이제까지 연구들은 근본적인 오류를 범하고 있다는 점을 지적하였다. 이는 有限한 回轉角을 취급하거나, 幾何的인 剛도 매트릭스를 유도할 때 방향이 다른 고정된 軸들에 대한 回轉角(Axial Rotations)들이 Non-Commutativity의 성질을 나타내기 때문이다. 固定된 軸에 대한 回轉角과 대응하는 固定된 軸에 대한 모멘트(Axial Moment)는 非保存力이며 Ziegler에 의해서 도입된 Conservative Moment<sup>(5)</sup>들도 固定된 軸에 대한 回轉角을 고수하는 한 이 모멘트들이 하는 일이 경로에 의존하게 되므로 유일한 포텐셜을 가질 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 Argyris<sup>(3,4)</sup>는 斷面이 2軸 對稱인 空間 뼈대 構造物의 幾何的인 非線形

\* 정희원 · 成均館 大學校 工科學 土木工學科 助教授  
\* 정희원 · 成均館 大學校 工科學 土木工學科 助教授

解析을 수행한 論文에서 처음으로 Semitangential Rotation을 도입하였다. 固定된 軸들에 대한 回轉角과는 대조적으로 Semitangential Rotation은 다른 방향의 축들에 대하여 물체를 회전시켰을때 최종 위치가 동일하다(Commutativity)는 매우 중요한 성질을 가지며 Ziegler의 Semitangential Moment와 力學的인 對應性을 갖는다. 또한 空間 뼈대의 내부에 발생하는 斷面力들은 保存力들이기 때문에 이 회전각을 사용하면 唯一한 포텐셜을 갖는다. 이러한 力學的인 토대 위에서 Argyris는 Natural Mode Formulation을 이용하여 空間 뼈대의 幾何的인 剛度 매트릭스를 유도하였다. 이때 회전각들은 Semitangential Rotation으로, 휨 및 비틀모멘트들은 Semitangential Moment들로 정의하였기 때문에 剛度 매트릭스는 對稱行列이다.

本 論文에서는 假想일의 原理를 이용하여 初期應力을 받는 3次元 連續體의 平衡方程式으로부터 斷面은 對稱이고 剪斷變形은 무시되는 變位場을 도입하여 薄壁空間 뼈대에 대한 平衡方程式을 얻는다. 空間 뼈대 構造物을 有限要素로 나누어 要素의 變位場을 要素變位벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 平衡方程式에 대입함으로써 彈性 및 幾何的인 剛度 매트릭스를 유도하고 그 결과들을 표로 제시한다. 이때 軸方向 變位에 대해서는 1차, 橫方向 變位들에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 또한, 회전각에 대해서는 部材 兩端의 拘束된 비틀을 고려하는 경우와 兩端의 비틀을 무시하는 경우를 구분하여 각각에 대응하는 Hermitian 다항식을 사용한다. 위의 幾何的인 剛度 매트릭스에서 휨모멘트는 Quasitangential Moment, 비틀모멘트는 Semitangential Moment에 해당하므로 材端모멘트들이 모두 Semitangential Moment에 대응하도록 적절한 수정을 가한다. 위에서 언급한 이론을 전개하기 위하여 다음과 같은 基本 假定을 취한다.

- 1) 空間 뼈대 要素들은 斷面形狀이 길이방향으로 일정하다.
- 2) 휨(Warping) 이외의 斷面形狀의 변화는 없다.
- 3) 바이모멘트(Bimoment)는 스칼라량으로 취급한다.

薄壁空間보의 橫挫掘 및 비틀挫掘에 대한 例題들

을 통하여 본 연구에 대한 결과들과 嚴密解 또는 Argyris의 결과들을 비교 검토함으로써 本 研究에서 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

## 2. 모멘트의 종류

모멘트를 발생시키는 방법을 고려할때 모멘트는 크기와 방향이 고정된 벡터가 아니라 모멘트가 작용하는 지점의 회전각에 대한 벡터函數로 생각하여야 한다. 따라서 본장에서는 모멘트를 발생시키는 방법에 따라 네가지 종류의 모멘트들을 생각하고 각 모멘트들에 대하여 微小한 斷面回轉角으로 인하여 발생하는 작용모멘트의 微小變化量을 산정한다. 그리고 空間 뼈대部材의 剛度 매트릭스의 유도에서 Semitangential moment를 材端모멘트로 정의할때 고려되어야 할 사항들을 제시한다.

### 2.1 固定된 軸에 대한 모멘트(Axial Moment)와 Follower Moment

고정된 축에 작용하는 모멘트의 경우에는 작용단면의 회전에 의해서 크기와 방향의 변화가 일어나지 않는다. 따라서 단면이 미소한 회전변위를 일으켰을때 고정된 축에 대한 모멘트의 증분벡터는 다음과 같이 영벡터가 된다.

$$\Delta \bar{M}^a = {}^0M \cdot \bar{m} - {}^0M \cdot \bar{m} = 0 \quad (1)$$

여기서,  ${}^0M$ 와  $\bar{m}$ 은 회전변위가 일어나기 전에 작용하는 초기모멘트의 크기와 방향을 나타내며 이를 좌표계에 대한 벡터성분으로 나타내면 아래와 같다.

$${}^0M \cdot \bar{m} = ({}^0M_1, {}^0M_2, {}^0M_3) \quad (2)$$

Follower moment는 단면이 회전함에 따라 작용모멘트의 방향도 같은 방향으로 회전한다. 작용단면의 미소한 회전각  $\phi$ 로 인한 Follower moment의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \bar{M}^f = \phi \times ({}^0M \cdot \bar{m}) \quad (3)$$

식 (3)을 매트릭스식으로 표시하면 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_1^f \\ \Delta M_2^f \\ \Delta M_3^f \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & {}^0M_2 & -{}^0M_2 \\ -{}^0M_3 & 0 & {}^0M_1 \\ {}^0M_2 & -{}^0M_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

고정된 축에 대한 모멘트와 Follower moment는 비보존력<sup>(3,4)</sup>에 해당한다.

## 2.2 Quasitangential Moment와 Semitangential Moment

그림 1a는 단위길이를 갖는 강체팔에 대하여 우력 (Couple)을 형성하면서 절점에 작용하는 Quasitangential moment를 나타낸 것이다. 단면의 회전이 일어나기 전에 단면에 작용하는 Quasitangential moment는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^o\bar{M} = \bar{l} \times ({}^oM \cdot \bar{k}) = {}^oM \cdot \bar{m} \quad (5)$$

여기서,  $k, l, m$ 은 단위벡터이다. 이제 단면에 미소한 회전각  $\phi$ 를 적용하면 Quasitangential moment의 증분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Delta {}^o\bar{M} &= (\bar{l} + \bar{\phi} \times \bar{l}) \times ({}^oM \cdot \bar{k}) - {}^oM \cdot \bar{m} \\ &= {}^oM \cdot (\bar{\phi} \times \bar{l}) \times \bar{k} = {}^oM \cdot (\bar{\phi} \cdot \bar{k}) \bar{l} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 단위벡터  $m, k, l$ 가 여섯가지 경우의 값을 가질 때 Quasitangential moment 성분의 증분을 산정하면 표 1을 얻을 수 있다.

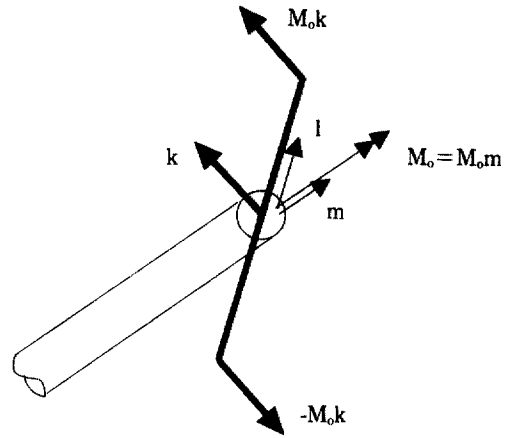
그림 1b는 두개의 직각을 이루는 단위길이 강체팔의 단부에 작용하는 힘에 의해서  ${}^oM$  크기의 모멘트를 갖는 Semitangential moment를 나타낸 것이다. Semitangential moment의 경우에도 강체팔 양단에 작용하는 힘들은 단면이 회전을 일으킬때 크기와 방향의 변화를 일으키지 않는다. 회전이 일어나기 전에 단면에 작용하는 Semitangential moment는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^o\bar{M} &= [\bar{l} \times 1/2 \cdot ({}^oM \cdot \bar{k}) - \bar{k} \times 1/2 \cdot ({}^oM \cdot \bar{l})] \\ &= {}^oM \cdot \bar{m} \end{aligned} \quad (7)$$

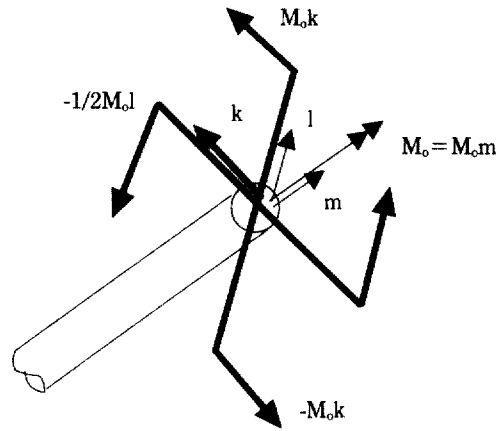
이제 절점에 미소한 회전각  $\phi$ 를 적용하면 결과적으로 Semitangential moment의 증분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Delta {}^o\bar{M} &= [(\bar{l} + \bar{\phi} \times \bar{l}) \times 1/2 \cdot ({}^oM \cdot \bar{k}) - \bar{k} \times 1/2 \cdot ({}^oM \cdot (\bar{l} + \bar{\phi} \times \bar{l}))] - {}^oM \cdot \bar{m} \\ &= 1/2 \cdot \bar{\phi} \times {}^o\bar{M} \end{aligned} \quad (8)$$

윗식을 매트릭스식으로 표시하면 다음과 같다.



a) Quasitangential moment



b) Semitangential moment

그림 1. Quasitangential moment and Semitangential moment

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_1^s \\ \Delta M_2^s \\ \Delta M_3^s \end{Bmatrix} = 1/2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & {}^oM_3 & -{}^oM_2 \\ -{}^oM_3 & 0 & {}^oM_1 \\ {}^oM_2 & -{}^oM_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

위로 부터 Quasitangential moment와 Semitangential moment에 대한 특성을 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 1) 단면이 회전변위를 일으킬때 Quasitangential moment 와 Semitangential moment의 경우에는 강체팔에 작용하는 힘들이 크기와 방향을

변화시키지 않기 때문에 보존력에 해당한다.

- 2) Quasitangential moment의 경우와는 달리 Semitangential moment의 증분은 강체팔의 방향에 의해서 영향을 받지않는다.
- 3) Semitangential moment의 증분벡터는 Axial moment와 Follower moment의 증분벡터의 중간값을 갖는다.

### 2.3 空間剛性部材의 剛度매트릭스에서 材端모멘트의 定義

힘에 대한 선형이론에서 재단모멘트는 통상 작용 축이 고정된 것으로 취급한다. 그러나 유한한 회전각이나 미소한 회전각의 2차 효과(second order effect)를 고려하는 경우에 이러한 고정된 축에 대한 모멘트는 비보존력<sup>(2)</sup>이다. 또한 Quasitangential moment와 Semitangential moment도 고정된 축에 대한 회전각을 이용하여 포텐셜 에너지를 계산하게 되면 고정된 축에 대한 회전각은 서로 Commutative 하지 않다는 성질 때문에 회전각의 순서에 따라 모멘트의 포텐셜식이 달라지게 된다. 이러한 이유 때문에 공간剛性의 기하적인 비선형해석에서 재단 모멘트 및 회전각을 종래의 고정된 축에 대한 모멘트 및 회전각으로 정의하는 경우에 기하적인 강도매트릭스가 비대칭 행렬이 된다.

2.1절의 모멘트벡터를 그림 2의 부재좌표계에 대하여 표시하면 초기모멘트의 성분들  ${}^0M_1, {}^0M_2, {}^0M_3$ 는 각각 도심축에 대한 비틀림모멘트,  $x_2, x_3$ 축에 대한 휨모멘트로 간주할 수 있다. 본 연구에서는 문헌<sup>(3,4)</sup>에서 제시된 이론에 근거하여 재단모멘트 및 재단 회전각이 Semitangential moment와 Semitangential rotation에 대응하도록 정의한다. 이렇게 정의할때 본 연구의 3 장의 식<sup>(15)</sup>에 의해서 정의된 비틀림모멘트

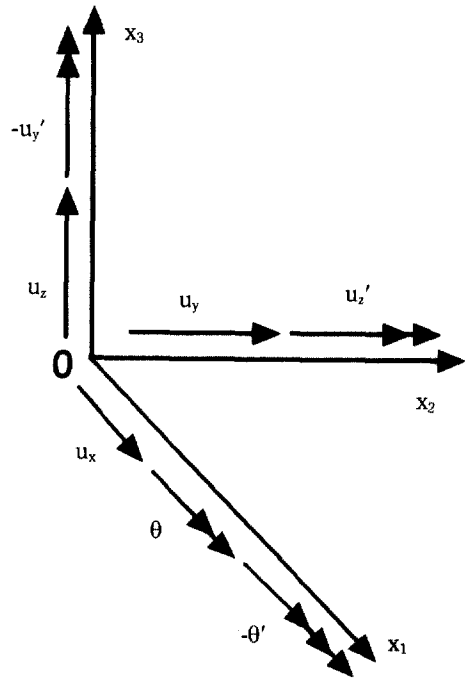


그림 2. Notation for displacement.

${}^0M_1$ 은 Semitangential moment에 해당하고 휨모멘트  ${}^0M_2, {}^0M_3$ 들은 각각 표 1의 경우 3과 경우 6에 대응하는 Quasitangential moment<sup>(4,5)</sup>들을 알 수 있다. 이를 매트릭스식으로 표현하면 식 (10)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_1^q \\ \Delta M_2^q \\ \Delta M_3^q \end{Bmatrix} = 1/2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & {}^0M_3 & -{}^0M_2 \\ -{}^0M_3 & 0 & {}^0M_1 \\ {}^0M_3 & -{}^0M_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -{}^0M_3 & {}^0M_2 \\ -{}^0M_3 & 0 & 0 \\ {}^0M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

식 (10)의 오른쪽에서 첫째항은 Semitangential moment의 증분모멘트에 대응하며, 둘째항은 Quasitangential moment의 경우에 추가되는 증분모멘트

표 1. Increment of Quasitangential moment components

Case	k	l	m	Increment of QT moment components
1	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	$\Delta M_1^q=0, \Delta M_2^q={}^0M_1 \cdot \phi_3, \Delta M_3^q=0$
2	(0,-1,0)	(0,0,1)	(1,0,0)	$\Delta M_1^q=0, \Delta M_2^q=0, \Delta M_3^q=-{}^0M_1 \cdot \phi_2$
3	(1,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	$\Delta M_1^q=0, \Delta M_2^q=0, \Delta M_3^q={}^0M_2 \cdot \phi_1$
4	(0,0,-1)	(1,0,0)	(0,1,0)	$\Delta M_1^q=-{}^0M_2 \cdot \phi_3, \Delta M_2^q=0, \Delta M_3^q=0$
5	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,0,1)	$\Delta M_1^q={}^0M_3 \cdot \phi_2, \Delta M_2^q=0, \Delta M_3^q=0$
6	(-1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	$\Delta M_1^q=0, \Delta M_2^q=-{}^0M_3 \cdot \phi_1, \Delta M_3^q=0$

를 나타낸다. 따라서 휨모멘트  ${}^0M_2$ ,  ${}^0M_3$ 를 Semita-ngential moment로 정의하기 위해서는 식(10)의 둘째항 만큼 보정이 이루어져야한다.

### 3. 空間뻐대에 대한 平衡方程式

초기응력이 있는 경우에 가상일의 원리에 의한 3차원 연속체의 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V (C_{ijrs} \cdot e_{rs} \cdot \delta e_{ij} + {}^0\tau_{ij} \cdot \delta \eta_{ij}) dV = \delta R \quad (11)$$

여기서  $C_{ijrs}$ 는 4th order Elasticity tensor,  $e_{ij}$ 와  $\eta_{ij}$ 는 Green-Lagrange strain의 선형형상과 비선형형상,  ${}^0\tau_{ij}$ 는 초기응력을 나타낸다. 그리고  $\delta R$ 은 외력이 하는 가상일을 표시한 것이다. 식(11)에서 왼쪽의 두항들은 탄성강도매트릭스, 기하적인 강도매트릭스를 산정하는데 사용된다.

연속체의 각 질점(material point)의 변위장을 공간 뻐대의 1차원 변수들로 나타내기 위하여 Vlasov의 가정을 이용한다. 그림 2는 部材座標係( $x_1, x_2, x_3$ )에 대하여 대칭단면을 갖는 박벽공간뻐대의 변위장을 7개의 변위파라미터들로 나타낸 것으로  $x_1$ 은 도심축,  $x_2$ 와  $x_3$ 은 단면의 주축을 나타낸다. 전단응력으로 인한 변형을 무시하면 공간뻐대의 입의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_x(x_1) - x_2 \cdot u_y'(x_1) \\ &\quad - x_3 \cdot u_z'(x_1) - \theta'(x_1) \cdot \phi(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_y(x_1) - \theta(x_1) \cdot x_3 \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_z(x_1) + \theta(x_1) \cdot x_2 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $u_x, u_y, u_z$ 는  $x_1, x_2, x_3$  축 방향의 Rigid Body Translation 을 나타내며  $\theta, -u_z', u_y'$ 는  $x_1, x_2, x_3$  축에 대한 Rigid body rotation을 나타낸다.  $\theta'$ 는  $\theta$ 의  $x_1$ 축 방향으로의 변화율이며 구속된 뒨(Restrained Warping) 거동을 무시하는 경우에 일정한 값을 갖는다.  $\phi(x_1, x_2)$ 는 뒨함수(Warping Function)를 나타내며 ( )'는  $x_1$ 에 관하여 1차 미분한 것이다. 변형도는 작고, 단면의 회전각은 유한(Finite)할때 비선형 변위-변형도관계<sup>(6)</sup>는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } e_{11} &= U_{1,1} \\ e_{12} &= (U_{1,2} + U_{2,1}) \\ e_{13} &= 1/2 \cdot (U_{1,3} + U_{3,1}) \\ \eta_{11} &= 1/2 \cdot (U_{2,1}^2 + U_{3,1}^2) \\ \eta_{12} &= 1/2 \cdot (U_{2,1} \cdot U_{2,2} + U_{3,1} \cdot U_{3,2}) \\ \eta_{13} &= 1/2 \cdot (U_{2,1} \cdot U_{2,3} + U_{3,1} \cdot U_{3,3}) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 ( )<sub>i</sub>는  $x_i$ 로 편미분한 것이며 Vlasov 가정에 따라 면내변형도( $\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$ )들은 무시하였다. 초기응력으로 인한 단면력들은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^0F_1 &= \iint {}^0\tau_{11} dA, \quad {}^0F_2 = \iint {}^0\tau_{12} dA, \quad {}^0F_3 = \iint {}^0\tau_{13} dA \\ {}^0M_1 &= \iint (x_2 \cdot {}^0\tau_{13} - x_3 \cdot {}^0\tau_{12}) dA \\ {}^0M_2 &= \iint x_3 \cdot {}^0\tau_{11} dA, \quad {}^0M_3 = -\iint x_2 \cdot {}^0\tau_{11} dA \\ {}^0M_R &= \iint ({}^0\tau_{12} \cdot \phi_{,2} + {}^0\tau_{13} \cdot \phi_{,3}) dA, \quad {}^0M_w = \iint {}^0\tau_{11} \cdot \phi dA \\ {}^0M_P &= \iint {}^0\tau_{11} \cdot (x_2^2 + x_3^2) dA = \beta_1 \cdot {}^0F_1, \\ B_1 \cdot A &= \iint (x_2^2 + x_3^2) dA \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  ${}^0F_1$ 은 축력,  ${}^0F_2, {}^0F_3$ 는 전단력,  ${}^0M_2, {}^0M_3$ 는 휨모멘트 그리고  ${}^0M_1$ 은 비틀모멘트,  ${}^0M_w$ 는 바이모멘트,  ${}^0M_R$ 은 Restrained torsion을 나타낸다. 구속된 뒨을 무시하는 경우에 식 (15)의  ${}^0M_w$ 와  ${}^0M_R$ 는 零이된다. 이제 식 (11)에 식(12), (13), (14)들을 대입하고 단면에 대하여 적분할 때 단면력에 대한 정의를 고려하면 3차원 연속체에 대한 평형방정식은 공간 뻐대에 대한 평형방정식으로 바뀌게된다.

식 (11)의 첫째항은 선형탄성에너지를 변분한 것이며 계산결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta II_1 &= C_{ijrs} \cdot e_{rs} \cdot \delta e_{ij} dV = \int E \cdot (u_x' - x_2 \cdot u_y'' - x_3 \cdot u_z'' \\ &\quad - \theta'' \cdot \phi) \cdot \delta (u_x' - x_2 \cdot u_y'' - x_3 \cdot u_z'' - \theta'' \cdot \phi) \\ &\quad + G \cdot (\phi_{,2} - x_3)^2 \cdot \phi' \cdot \delta \phi' + G \cdot (\phi_{,3} - x_2)^2 \cdot \phi' \cdot \delta \phi' dx \\ &= \int (EA \cdot u_x' \delta u_x' + EI_3 \cdot u_y'' \delta u_y'' + EI_2 \cdot u_z'' \delta u_z'' \\ &\quad + EI_w \cdot \theta'' \delta \theta'' + GJ \cdot \theta' \delta \theta') dx_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } I_w &= \iint \phi^2 dA \\ J &= \iint (x_2^2 + x_3^2 - \phi_{,2} \cdot x_3 + \phi_{,3} \cdot x_2) dA \end{aligned}$$

식 (11)의 두번째항에 식 (12), (13), (14)들을 대입하면 다음과 같다.

$$\delta II_2 = \int_V {}^0\tau_{ij} \cdot \eta_{ij} dV = \int_V 1/2 \cdot {}^0\tau_{11} \cdot \delta [(u_z' - \theta' \cdot x_2)^2$$

$$\begin{aligned}
 & + (u_y' - \theta' \cdot x_3)^2] + {}^0\tau_{12} \cdot \delta[\theta \cdot (u_z' + \theta' \cdot x_2) \\
 & + {}^0\tau_{13} \cdot \delta[-\theta \cdot (u_y' - \theta' \cdot x_3)] \quad dV \quad (17)
 \end{aligned}$$

단면력들을 정의한 식 (15)들을 고려하면 식 (17)로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \delta II_2 = & \int 1/2 \cdot {}^0F_1 \cdot \delta(u_y'^2 + u_z'^2) - {}^0M_3 \cdot \delta(\theta' \theta') \\
 & - {}^0M_2 \cdot \delta(u_y' \theta') + 1/2 \cdot {}^0M_P \cdot \delta(\theta'^2) + {}^0F_2 \cdot \delta(u_z' \theta') \\
 & - {}^0F_3 \cdot \delta(u_y' \theta') - 1/2 \cdot M_1 \cdot \delta(u_y' u_z'' - u_z' u_y'') dx_1 \quad (18)
 \end{aligned}$$

식 (18)의 마지막 항은 식 (14), (17)에서 무시된  $1/2 \cdot U_{1,1} \cdot U_{1,2}$ 와  $1/2 \cdot U_{1,1} \cdot U_{1,3}$ 항들에서 유도될 수 있는 것으로 비틀모멘트의 포텐셜항에 해당한다.

식 (11)의 마지막 항은 외력에 대한 가상일을 나타낸다. 공간뼈대요소 양단의 재단력을 외력으로 생각할 수 있으므로, 이들의 가상일은 구속된 비틀을 고려하는 경우에 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \delta R = & F_1^P \cdot \delta U^P + F_3^P \cdot \delta W^P + M_1^P \cdot \delta \omega_1^P + M_2^P \cdot \delta \omega_2^P \\
 & + M_3^P \cdot \delta \omega_3^P + M_w^P \cdot \delta f^P + F_1^Q \cdot \delta U^Q + F_2^Q \cdot \delta V^Q \\
 & + F_3^Q \cdot \delta W^Q + M_1^Q \cdot \delta \omega_1^Q + M_2^Q \cdot \delta \omega_2^Q \\
 & + M_3^Q \cdot \delta \omega_3^Q + M_w^Q \cdot \delta f^Q \quad (19)
 \end{aligned}$$

여기서,  $\langle U^P, V^P, W^P, \omega_1^P, \omega_2^P, \omega_3^P, f^P, U^Q, V^Q, W^Q, \omega_1^Q, \omega_2^Q, \omega_3^Q, f^Q \rangle$ 는 재단변위벡터,  $\langle F_1^P, F_2^P, F_3^P, M_1^P, M_2^P, M_3^P, M_w^P, F_1^Q, F_2^Q, F_3^Q, M_1^Q, M_2^Q, M_3^Q, M_w^Q \rangle$ 는 재단력벡터를 나타낸다(그림 3 참조).

#### 4. 空間뼈대部材의 매트릭스 平衡方程式

일반화된 좌표들( $u_x, u_y, u_z, \theta$ )을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 연구에서는 선형탄성 변형에너지를 나타내는 식 (16)으로부터 평형방정식을 유도하고, 이식을 적분하고 경계조건을 적용함으로써 얻어지는 Hermitian 다항식들을 형상함수로 사용한다. 즉, 축방향변위  $u_x$ 는 1차 Hermitian 다항식, 횡방향처짐  $u_y, u_z$ 는 3차 Hermitian 다항식을 사용하고 비틀회전각  $\theta$ 는 구속된 비틀을 고려하는 경우와 무시하는 경우에 대응하여 각각 3차, 1차 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 3, 4을 참조하여 비틀각  $\theta$ 를 제외한 나머지 일반화된 좌표들을 재단변위벡터로 나타내면 다음과 같다.

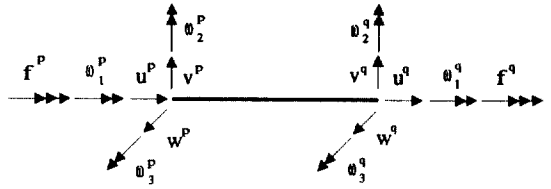


그림 3a. Member displacement vector.

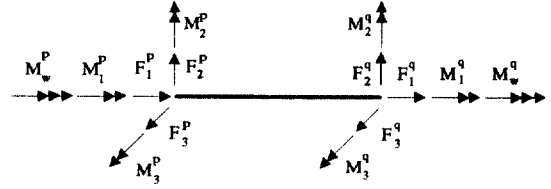


그림 3b. Member force vector.

$$\begin{aligned}
 u_x = & (1-\beta) \cdot U^P + \beta \cdot U^Q = \langle H_1 \rangle \cdot \{U\} \\
 u_y = & h_1 \cdot V^P + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^P + h_3 \cdot V^Q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^Q \\
 = & \langle H_3 \rangle \cdot \{W\} \\
 u_z = & h_1 \cdot W^P + h_2 \cdot (-L \cdot \omega_2^P) + h_3 \cdot W^Q + h_4 \cdot (-L \cdot \omega_2^Q) \\
 = & \langle H_3 \rangle \cdot \{W\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \langle H_1 \rangle = & \langle 1-\beta, \beta \rangle, \quad \beta = x_1/L, \quad \{U\} = \{U^P, U^Q\}^T \\
 \langle H_3 \rangle = & \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle \\
 h_1 = & 1 - 3\beta^2 + 2\beta^3, \quad h_2 = \beta - 2\beta^2 + \beta^3 \\
 h_3 = & 2\beta^2 - 2\beta^3, \quad h_4 = -\beta^2 + \beta^3 \\
 \{V\} = & \{V^P, L \cdot \omega_3^P, V^Q, L \cdot \omega_3^Q\}^T \\
 \{W\} = & \{W^P, -L \cdot \omega_2^P, W^Q, -L \cdot \omega_2^Q\}^T \\
 \omega_3^P = & (u_y')_P, \quad \omega_2^P = -(u_z')_P, \quad \omega_3^Q = (u_y')_Q, \\
 \omega_2^Q = & -(u_z')_Q
 \end{aligned}$$

공간뼈대 구조물의 기하적인 비선형 해석을 수행하려면 접선강도 매트릭스가 필요하다. 이때 축력, 비틀모멘트, 그리고 전단력은 부재내에서 일정하고 휨모멘트는 선형분포를 이룬다고 가정할 수 있다. 따라서 부재의 내부에 발생하는 단면력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -F_1^P, \quad F_2 = -F_2^P, \quad F_3 = -F_3^P \\
 M_2 = & -M_2^P - F_3^P \cdot \beta \cdot L, \quad M_3 = -M_3^P + F_2^P \cdot \beta \cdot L \quad (21)
 \end{aligned}$$

#### 4.1 拘束된 됴를 考慮한 空間뼈대의 接線剛度매

**트릭스**

그림 3은 구속된 뒀을 고려한 공간뼈대요소의 재단면위와 재단력벡터를 표시한 것이다. 구속된 뒀을 고려하는 경우에 비틀각  $\theta$ 에 대한 형상함수로서 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 비틀각을 재단면위벡터로 나타내면 다음과 같다.

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p + h_2 \cdot (-L \cdot f^p) + h_3 \cdot \omega_2^q + h_4 \cdot (-L \cdot f^q) = \langle H_3 \rangle \cdot \{\theta\} \quad (22)$$

$$\text{여기서, } \{\theta\} = \{\omega_1^p, -L \cdot f^p, \omega_2^q, -L \cdot f^q\}^T, \\ f^p = -(\theta')_p, f^q = -(\theta')_q$$

식 (20), (21), 그리고 식 (22)들을 식 (16), (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수있다. 이때 식 (23), (24)의 경우에 한하여 ( )는  $x_1$ 이 아니라  $\beta$ 로 미분하는 것을 나타낸다.

$$\delta \Pi_1 = \langle \delta U \rangle \cdot \int_0^1 \frac{EA}{L} \cdot \{H_1'\} \langle H_1' \rangle d\beta \cdot \{U\} \\ + \langle \delta V \rangle \cdot \int_0^1 \frac{EI_3}{L^3} \cdot \{H_3''\} \langle H_3'' \rangle d\beta \cdot \{V\} \\ + \langle \delta W \rangle \cdot \int_0^1 \frac{EI_2}{L^3} \cdot \{H_3''\} \langle H_3'' \rangle d\beta \cdot \{W\} \\ + \langle \delta \theta \rangle \cdot \left( \int_0^1 \frac{EI_w}{L^3} \cdot \{H_3''\} \langle H_3'' \rangle \right. \\ \left. + \frac{GJ}{L} \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle d\beta \right) \cdot \{\theta\} \quad (23)$$

$$L \cdot \delta \Pi_2 =$$

$$\langle \delta V \rangle \cdot \int_0^1 -F_1^p \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle d\beta \cdot \{V\} \\ + \langle \delta W \rangle \cdot \int_0^1 -F_1^p \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle d\beta \cdot \{W\} \\ + \langle \delta V \rangle \cdot \int_0^1 [(M_2^p + F_3^p \cdot \beta \cdot L) \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle \\ + F_3^p \cdot L \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle] d\beta \cdot \{\theta\} \\ + \langle \delta W \rangle \cdot \int_0^1 [(M_3^p - F_2^p \cdot \beta \cdot L) \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle \\ - F_2^p \cdot L \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle] d\beta \cdot \{\theta\} \\ + \langle \delta \theta \rangle \cdot \int_0^1 [(M_3^p - F_2^p \cdot \beta \cdot L) \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle \\ - F_2^p \cdot L \cdot \{H_3'\} \langle H_3' \rangle] d\beta \cdot \{W\}$$

$$- \langle \delta \theta \rangle \cdot \int_0^1 \frac{I_c}{A} \cdot F_1^p \cdot \{H'\} \langle H_3' \rangle d\beta \cdot \{\theta\} \\ + \langle \delta v \rangle \cdot \frac{M_1}{2L} \cdot \int_0^1 [\{H_3''\} \langle H_3' \rangle - \{H_3'\} \langle H_3'' \rangle] \cdot d\beta \cdot \{w\} \\ + \langle \delta w \rangle \cdot \frac{M_1}{2L} \cdot \int_0^1 [\{H_3'\} \langle H_3'' \rangle - \{H_3''\} \langle H_3' \rangle] \cdot d\beta \cdot \{v\} \quad (24)$$

$F_2^p = (M_3^p + M_3^q)/L$ 와  $F_3^p = -(M_2^p + M_2^q)/L$ 을 고려하면 식 (23),(24)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = \langle \delta U_e \rangle \cdot ([K_{e1}] + [K_{g1}^*]) \cdot \{U_e\} \quad (25)$$

여기서,  $[K_{e1}]$ ,  $[K_{g1}^*]$ 는 각각 구속된 뒀을 고려한 (14×14) 탄성 및 기하적인 강도매트릭스이다. 재단 모멘트에 정의식 (15)를 고려하면  $M_2^p$ ,  $M_3^p$ ,  $M_2^q$ ,  $M_3^q$ 는 Quasitangential Moment에 해당한다. 이러한 재단모멘트가 Semitangential Moment에 대응하도록 변환시키기 위해서는 식 (10)의 결과에 근거하여 아래와 같은 기하적인 강도매트릭스의 수정이 이루어져야 한다.

$$[K_{g1}]_{4,5} = [K_{g1}]_{5,4} = [K_{g1}^*]_{4,5} - 1/2 \cdot M_3^p \\ [K_{g1}]_{4,6} = [K_{g1}]_{6,4} = [K_{g1}^*]_{4,6} + 1/2 \cdot M_2^p \\ [K_{g1}]_{10,11} = [K_{g1}]_{11,12} = [K_{g1}^*]_{10,11} - 1/2 \cdot M_3^q \\ [K_{g1}]_{10,12} = [K_{g1}]_{12,10} = [K_{g1}^*]_{10,12} + 1/2 \cdot M_2^q \quad (26)$$

나머지  $[K_{g1}]$ 의 원소들은  $[K_{g1}^*]$ 의 원소들과 같다. 여기서, 식 (26)의 수정항들은 식 (10)의 오른쪽 끝항에 대응한다.

Semitangential Moment에 대응하도록 수정이 이루어진 강도매트릭스  $[K_{e1}]$ ,  $[K_{g1}]$ 들에 대한 계산 결과는 부록표 1에 나타내었다.

**4.2 구속된 뒀을 無視한 空間뼈대의 接線剛度매트릭스**

그림 4은 구속된 뒀을 무시하는 공간뼈대요소의 재단면위와 재단력벡터를 표시한 것이다. 구속된 뒀을 무시하는 경우에는 구속된 비틀모멘트( $M_R$ )와 바이모멘트가 零이고  $\theta'$ 가 일정하므로 비틀각  $\theta$ 는 다음과 같이 1차 Hermitian 다항식으로 가정할 수 있다.

$$\theta = (1 - \beta) \cdot \omega_1^p + \beta \cdot \omega_1^q = \langle H_1 \rangle \cdot \{\theta\} \quad (27)$$

$$\text{여기서, } \{\theta\} = \{\omega_1^p, \omega_1^q\}^T$$

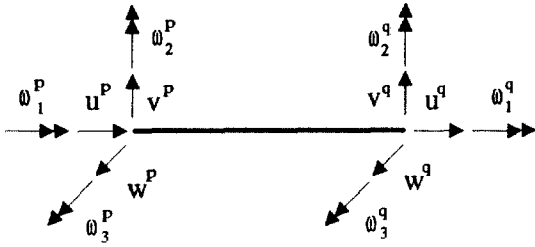


그림 4a. Member displacement vector.

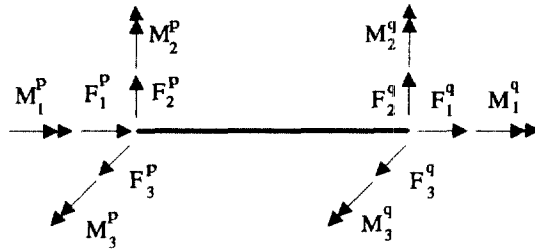


그림 4b. Member force vector.

식 (20),(21) 그리고 식 (27)을 고려하면 식 (16)와 식 (18)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = \langle \delta U_2 \rangle \cdot ([K_{e2}] + [K_{g2}^*]) \cdot \{U_e\} \quad (28)$$

여기서,  $[K_{e2}]$ ,  $[K_{g2}^*]$ 는 각각 구속된 뒀을 무시한 (12×12) 탄성 및 기하적인 강도매트릭스이다. 4.1 절의 경우와 마찬가지로  $M_2^P$ ,  $M_3^P$ ,  $M_2^Q$ ,  $M_3^Q$ 는 Quasitangential Moment에 해당하므로 이를 Semitangential Moment로 변화시키기 위하여 아래와 같은 수정이 이루어져야 한다.

$$\begin{aligned} [K_{g2}]_{4,5} &= [K_{g2}]_{5,4} = [K_{g2}^*]_{4,5} - 1/2 \cdot M_3^P \\ [K_{g2}]_{4,6} &= [K_{g2}]_{6,4} = [K_{g2}^*]_{4,6} + 1/2 \cdot M_2^P \\ [K_{g2}]_{11,12} &= [K_{g2}]_{12,11} = [K_{g2}^*]_{11,12} - 1/2 \cdot M_3^Q \\ [K_{g2}]_{11,13} &= [K_{g2}]_{13,11} = [K_{g2}^*]_{11,13} + 1/2 \cdot M_2^Q \end{aligned} \quad (29)$$

Semitangential Moment에 대응하도록 수정이 이루어진 강도매트릭스  $[K_{e2}]$ ,  $[K_{g2}^*]$ 에 대한 계산 결과는 부록표 2에 나타내었다.

## 5. 數値解析例

유도된 이론을 바탕으로 박벽 공간뿀대구조의 좌굴하중을 구하기 위한 유한요소해석 프로그램 [SEIG] 를 개발하였다. 절점당 자유도수는 구속된

뒀을 고려하는 경우 7개, 구속된 뒀을 무시하는 경우 6개이고, 요소당 절점수는 2개이므로 사용된 부재 강도매트릭스의 크기는 각각 14×14, 12×12로 된다.(부록표 참조) 본 연구에서 개발된 프로그램 [SEIG]의 타당성을 검증하기 위하여 박벽 공간뿀대구조의 좌굴하중에 대한 엄밀해 또는 Argyris의 해석결과들과 본 연구에 의한 수치해석결과들을 비교·검토한다.

### 5.1 橫荷重에 의한 캔틸레버의 橫挫掘

그림 5는 자유단에 연직하중을 받는 캔틸레버를 나타낸 것이다. 횡좌굴해석에 사용된 재료의 성질 및 기하적인 형상데이터는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} L &= 100 \text{ cm}, I_y = 1 \text{ cm}^4, I_z = 0.125 \text{ cm}^4, J = 0.01 \text{ cm}^2, \\ A &= 0.1 \text{ cm}, I_w = 0.0 \text{ cm}^4, E = 10^4 \text{ N/cm}^2, G = E/2 \end{aligned}$$

표 2는 부록표 1의 강도매트릭스(구속된 뒀을 고려하는 경우)를 사용하여 얻은 임계하중값을 나타낸 것이다.  $I_w$ 가 영인 경우에 괄호안의 값들은 부록표 2의 매트릭스(구속된 뒀을 무시하는 경우)를 사용하여 얻은 값이다. 요소의 수를 증가시키에 따라 부록표 1의 매트릭스를 사용하는 경우가 부록표 2를 사용하는 경우보다 빠르게 엄밀해<sup>(7)</sup>에 수렴하는 것을 알 수 있다.

표 2. Lateral buckling of end-loaded cantilever

Number of Elements	Critical load( $P_{cr}$ )	
	$I_w = 0.0$	$I_w = 1.25$
1	0.109589 (0.150000)	0.198668
2	0.101293 (0.107251)	0.145519
3	0.100501 (0.103085)	0.142999
4	0.100372 (0.101857)	0.142492
6	0.100326 (0.101002)	0.142258
8	0.100319 (0.100702)	0.142212
10	0.100316 (0.100563)	0.142199

Analytic solution<sup>(7)</sup> :  $I_w = 0.0$ 인 경우  $P_{cr} = 0.100315$   
 $I_w = 1.25$ 인 경우  $P_{cr} = 0.141000$



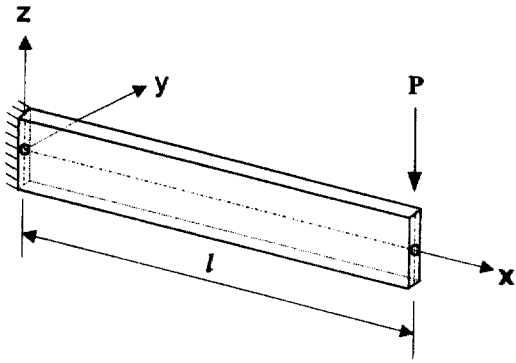


그림 5. Lateral buckling of end-loaded cantilever.

### 5.2 휨모멘트에 의한 캔틸레버의 횡좌굴

자유단에 휨모멘트를 받아서 횡좌굴을 일으키는 캔틸레버를 생각한다. 해석에 사용된 재료의 성질 및 기하적인 형상데이터는 다음과 같다.

$$L=100 \text{ cm}, I_y=1 \text{ cm}^4, I_z=0.125 \text{ cm}^4, J=0.01 \text{ cm}^2, \\ A=0.2 \text{ cm}, I_w=0.0 \text{ cm}^4, E=10^4 \text{ N/cm}^2, G=E/2$$

그림 6은 Quasitangential moment와 Semitangential moment에 의해서 횡좌굴을 일으키는 캔틸레버를 나타낸 것이다. 그림 6c의 Semitangential moment가 작용하는 경우에는 수정없이 부록표 1,2의 강도매트릭스를 그대로 사용하지만 그림 6a, 6b의 Quasitangential moment가 작용하는 경우에는 마지막 요소의 기하적인 강도매트릭스를 산정할 때 다음과 같은 수정이 필요하다.

QT moment(I):

$$[K_g]_{11,12}=[K_g]_{12,11}=[K_g]_{12,11}+1/2 \cdot M_3^Q$$

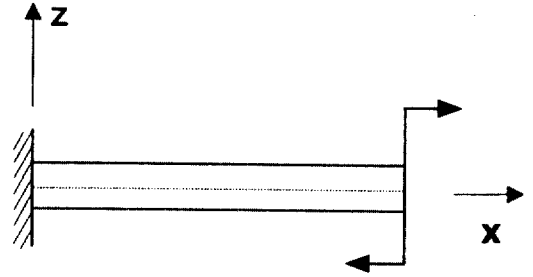
$$[K_g]_{11,13}=[K_g]_{13,11}=[K_g]_{13,11}-1/2 \cdot M_2^Q$$

QT moment(II):

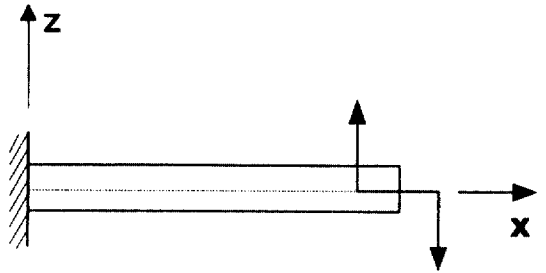
$$[K_g]_{11,12}=[K_g]_{12,11}=[K_g]_{12,11}-1/2 \cdot M_3^Q$$

$$[K_g]_{11,13}=[K_g]_{13,11}=[K_g]_{13,11}+1/2 \cdot M_2^Q$$

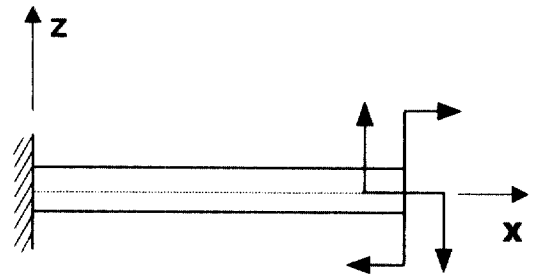
요소의 수를 증가시키에 따라 구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 표 3에 나타내었다. 표 3에서 팔호안의 값은 Argyris의 해석결과를 표시한 것이다. 본 연구의 결과들이 빠르게 엄밀해에 수렴하는 것을 알 수 있다. 부록표 2의 매트릭스를 사용하여 임계하중을 계산하는 경우에는 Argyris의 해석결과와 동일한 값을 얻을 수 있었다.



(a) Quasitangential moment I, (QT1)



(b) Quasitangential moment II, (QT2)



(c) Semitangential moment, (ST)

그림 6. Lateral buckling of right-angle frame under end moment.

### 5.3 비틀모멘트에 의한 보의 좌굴

원형단면을 갖는 보는 양단에 작용하는 비틀모멘트에 의해서 비틀좌굴을 일으킬 수 있다.<sup>(5)</sup> 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$L=100 \text{ cm}, I_y=I_z=1.0 \text{ cm}^4, A=0.2 \text{ cm}, \\ E=10^4 \text{ N/cm}^2$$

임계모멘트는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{cr}=\pm k\pi \cdot \frac{EI}{L}$$

여기서  $k$ 는 양단의 구속조건에 따라 다른 값을 가진다. 표 4은 다섯가지 경계조건을 갖는 경우에 8개의 요소를 사용하여 얻은 본 연구의 해석결과들과 문헌<sup>(6)</sup>의 결과들(팔호안의 값)을 함께 표시한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 본 연구의 결과들이 엄밀해<sup>(6)</sup>와 1% 이내로 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

#### 5.4 水平荷重에 의한 直角 뼈대 構造物의 橫挫

그림 7은 횡방향 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각 뼈대구조물을 나타낸 것이다. 구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 표 5a, 5b에 나

표 3. Lateral buckling of cantilever under end moments

Number of Elements	Critical moments ( $M_{cr}$ )	
	QT1 and QT2	ST
1	3.94173 (4.33013)	7.90569 (8.66025)
2	3.92800 (4.02854)	7.88347 (8.66025)
3	3.92719 (3.97199)	7.86019 (8.21584)
4	3.92706 (3.95227)	7.85599 (8.05708)
6	3.92700 (3.93821)	7.85439 (7.94398)
8	3.92700 (3.93330)	7.85411 (7.90454)
10	3.92700 (3.93103)	7.85403 (7.88632)

Analytic solution<sup>(7)</sup> : QT1의 경우에  $M_{cr}=3.92700$   
ST의 경우에  $M_{cr}=7.85400$

타내었다. 방법 1은 부록표 1에 제시한 수정된 강도매트릭스  $[K_{gl}]$ 를 사용한 것이고, 방법 2는 재단 휨모멘트가 Quasitangential moment에 대응하는 강도매트릭스  $[K_{gl}^*]$ 를 사용한 것이다. 표 5에서 보는 바와 같이 방법 1에 의한 결과는 Argyris의 해석결과에 수렴하고 있지만 방법 2에 의한 해석 결과는 전혀 다른 값에 수렴하는 것을 알 수 있다. 이는 Quasitangential Moment의 축이 수평요소는  $z$ 축이고 수직요소는  $x$ 축으로 일치하지 않기 때문에 생긴 결과이다. 따라서 부재가 유한한 각도로 만나는 구조물의 횡좌굴 및 비틀좌굴을 산정하는 경우에는 반드시 부록표 1.2, 부록표 2.2와 같이 Semitangential moment에 대응하는 기하적인 강도매트릭스를 사용해야만 올바른 해석결과를 얻을 수 있다고 판단된다. 또한 표 5a에서는 임계하중값이 방법 1을

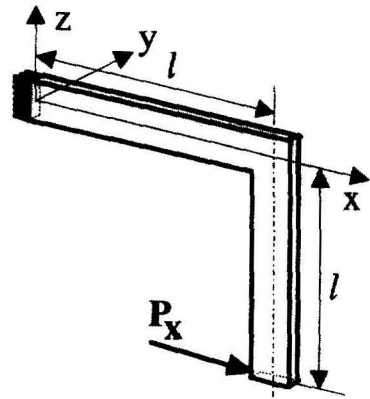


그림 7. Lateral buckling of right-angle frame under end load. Data of problem.

표 4. Torsional buckling of shaft under end torques (Buckling factor  $k$ )

	Fixed-Fixed	Sliding-Fixed	Fixed-Free	Fixed-Hinge	Hinge-Hinge
Axial Torque	2.863194 (2.861)	2.000423 (2.000)	— (0.000)	— (0.000)	2.000423 (2.000)
ST Torque	2.863194 (2.861)	2.000423 (2.000)	1.000013 (1.000)	2.168672 (2.168)	1.563415 (1.564)
QT Torque Case 1	2.863194 (2.861)	2.000423 (2.000)	0.5000004 (0.500)	1.576369 (1.576)	1.000013 (1.000)
QT Torque Case 2	2.863194 (2.861)	2.000423 (2.000)	0.5000004 (0.500)	1.576369 (1.576)	1.020947 (1.021)

표 5a. Lateral buckling of right-angle frame under end force ( load Px negative )

Number of Elements	This study		Argyris's result
	Method 1	Method 2	
2	0.967465	0.550230	0.966318/
4	0.942199	0.538924	0.929945
6	0.933852	0.534919	0.923255
8	0.929775	0.532942	0.920916
10	0.927359	0.531767	0.919834
12	0.925762	0.530988	0.919246
20	0.922594	0.529440	0.918391

표 5b. Lateral buckling of right-angle frame under end force ( load Px positive )

Number of Elements	This study		Argyris's result
	Method 1	Method 2	
2	1.50947	0.720734	1.64538
4	1.50392	0.708907	1.53742
6	1.50251	0.704672	1.51661
8	1.50186	0.702566	1.50933
10	1.50149	0.701308	1.50597
12	1.50124	0.700472	1.50414
20	1.50074	0.698804	1.50148

사용하여 해석한 본 연구의 결과가 Argyris<sup>(3)</sup>의 결과보다 큰 값에 수렴하였고, 표 5b에서는 본 연구의 결과가 Argyris의 결과보다 작은 값에 수렴하였다. 이는 본 예제에서와 같이 부재가 유한한 각도로 만나는 경우에 바이모멘트를 스칼라로 취급할 수 없음에도 불구하고 바이모멘트를 스칼라로 취급하여 그림 7의 절점 B에서 바이모멘트에 대응하는 수평 및 수직부재의 강성을 단순히 더했기 때문에 생겨난 결과라고 판단된다. 아울러 횡방향 하중의 방향에 따라서 수평부재가 인장력 또는 압축력을 받기 때문에 표 5a의 임계하중값이 표 5b의 값 보다 작게 나타난 것도 주목할 만하다.

## 6. 結 論

3次元 連續體에 대한 假想일의 原理로부터 拘束된

비틀을 고려하는 경우와 拘束된 비틀을 무시하는 경우에 대하여 對稱斷面을 갖는 薄壁 空間剛架要素의 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스를 유도하였다. 斷面力의 정의를 고려할때, 幾何的인 剛度매트릭스의 材端 휨모멘트들은 Quasitangential Moment, 비틀모멘트는 Semitangential Moment에 대응하도록 정의된 것이므로 材端모멘트들이 모두 Semitangential Moment에 대응하도록 幾何的인 剛度매트릭스를 수정하여 부록표 1, 2에 나타내었다. 이러한 剛度매트릭스를 사용하여 挫掘解析을 수행한 결과 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1) 뒀剛性이 零인 경우에는 拘束된 비틀을 無視하는 경우보다 拘束된 비틀을 고려하는 경우가 嚴密한 臨界荷重값에 더 빠르고, 精確하게 수렴한다.

2) 空間보의 비틀 및 橫挫掘 문제에 대하여는 Semitangential Moment에 대응하도록 수정된 강도 매트릭스를 사용하는 경우(방법 1)와 수정하지 않은 매트릭스를 사용하는 경우(방법 2)에 동일한 解析結果를 보여주었지만 直角剛架 構造物과 같이 부재가 有限한 각도로 만나는 空間剛架構造物에 대해서는 완전히 다른 결과를 나타내었다. 따라서 空間剛架構造物의 挫屈問題와 幾何的인 非線形解析을 一貫성있게 수행하기 위해서는 Semitangential Moment 와 Semitangential rotation 에 대응하는 幾何的인 剛度매트릭스를 사용하여야 한다.

3) 直角剛架 構造物의 橫挫掘解析을 행하는 경우에 Argyris의 결과와 拘束된 비틀을 고려하는 수정된 剛度매트릭스를 사용하여 얻은 結果를 비교할때 약간의 차이가 발견되었다. 이는 바이모멘트에 대응하는 水平 및 垂直部材의 剛性을 단순히 합한데서 起因하는 誤差라고 판단된다.

## 참 고 문 헌

1. R. S. Barsoum and R. H. Gallagher: "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 2, 1970, pp. 335-352.
2. W. F. Chen and T. Atsuta : *Theory of beam columns Vol.2*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1977, pp. 539-608.
3. J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf:

