

오개념의 견고성 지수

이영직·권재술
(한국고원대학교)

(1993년 10월 13일 받음)

I. 서론

구성주의는 오늘날 교수-학습에 많은 시사점을 주고 있다. 경험주의 입장에서 보면 학생들에게 가르치기만 하면 바른 개념으로 받아들여질 수 있다고 보는 반면에, 구성주의 입장은 학생들은 과학수업을 받기 이전부터 일상생활의 경험을 통하여 자연현상에 대한 나름대로의 개념을 가지고 있어서 이미 형성된 개념체계로 다른 개념을 획득하게 된다는 것이다. 따라서 학습을 학습자 스스로가 의미를 구성해 나가는 능동적인 활동과정으로 보았다. 즉, 학생들에게 이미 형성된 오개념과 앞으로 배울 개념과의 상호작용에 의해서 학습이 이루어진다는 것이다(West & Pines, 1986).

이러한 오개념은 과학학습에 영향을 줄 뿐만 아니라 학습에 의해서도 학생 나름의 고유한 체계로 발전하여 다음의 관련 학습에도 영향을 미치게 된다. 그래서 Ausubel은 학습에 가장 큰 영향을 미치는 요인은 학습자가 이미 파지하고 있는 지식으로 보았다. 이 때문에 교사가 지도해도 새로운 개념을 받아들이는 것이 느리며, 이런 오개념은 학생들의 특별한 문화적 그리고 개인적 경험의 결과로 수업 이전에 형성되어 온 개념이어서 학습 과정에 계속 영향을 준다고 하였다(Osborne, 1985). 또한 이러한 오개념은 정규수업 후에도 변하지 않고 오히려 강화되거나, 또는 오개념과 과학자적 지식이 혼합되기도 하며 인지구조내에서 독립된 형태로 존재하기도 한다는 것이다(Gilbert, Osborne, Fensham, 1982).

기본 개념은 인간의 지적 활동에 의해 얻어진 요약적 체계이므로 지식의 전 영역을 효과적으로 가르칠 수 있다. 특히 오개념에 관한 연구가 많이 이루어지고 있는데, 오개념에 관한 연구는 어떤 특유한 과학 개념이 학습되는 과정을 설명할 뿐만 아니라 그 개념의 학습지도 방법과 자료를 개

발하는 준거를 제공하며, 행동주의 심리학과 인지이론이 설명하지 못하는 학습현상까지도 잘 설명할 수 있다. 이러한 점에 비추어 본다면 오개념에 관한 연구는 새로운 과학학습을 구성하는데 바탕이 될 수 있으며, 그 연구결과를 바탕으로 구성된 학습은 과학 학습에 실용적으로 이용할 수 있다고 보고되었다(조희형, 박승재, 1991). 이러한 연구들은 연구결과를 수업에 적절히 활용할 수 있고 학습에서도 활발한 토의 소재를 제공하여 주며, 이론이 아니고 구체적인 연구이기 때문에 활용가치도 높고, 수업전에 학생들이 지닐 수 있는 개념에 대한 정보를 제공하여 주며, 오개념의 형성과정과 극복과정을 통해 인간 사고의 본질을 밝히는데 중요한 열쇠가 된다고 한다(권재술, 1989).

학생들의 오개념은 학습한 시간에 관계없이 과학자적 개념으로 잘 바뀌지 않는다고 한다. 이러한 관점에서 학생들이 견고하게 가지고 있는 오개념을 찾아내고 그 특성을 파악하면 효과적인 학습을 제공할 수 있을 것이다. 그런데 기존의 연구들은 오개념의 유형을 조사하는 연구가 대부분이고 수업양에 따라 오개념의 지속정도를 밝히는 연구는 드문 실정이다. 따라서 본 연구는 문헌연구를 통해서 오개념의 견고성에 영향을 주는 요인을 찾아내고, 오개념의 견고성 정도를 지수화하여 오개념의 연구에 도움을 주고자 한다.

흔히, 최빈오답의 선택율이 높으면 오개념이 견고하다고 한다. 그러나 학년이 높아지면서 원만히 해결된다면 오개념이 견고하다고 볼 수 없다. 즉, 오개념의 견고성은 시간에 따른 변화를 살펴보아야 한다. 또한 견고성에 영향을 주는 다른 요인으로는 상황이 있다. 학생들은 같은 개념을 묻는데도 상황에 따라 다르게 반응한다. 따라서 견고성을 논할 때는 시간과 상황에 따른 변화를 조사하여야 한다. 본 연구에서는 시간에 따른 변화 특성만을 중점적으로 살펴 보고자 한다.

오개념의 가장 큰 특징 중의 하나는 시간에 따라 변하지 않는 것이다. 흔히 대부분의 오개념 연구에서 이 문항은 저 문항에 비해서 견고하다고 말한다. 그 이유로는 정답이 학년에 따라서 변하지 않기 때문에, 오개념이 학년에 따라서 변하지 않기 때문이라고 하지만, 그 근거가 불확실하여 애매할 때가 많다. 본 연구에서는 이러한 점을 감안하여 오개념의 견고성을 지수화함으로써 이러한 혼란을 줄이고자 한다. 따라서 다음과 같은 구체적인 문제를 정했다.

1. 견고성에 영향을 주는 요인은 무엇인가?
2. 견고성을 어떻게 지수화할 것인가?

II. 연구방법

본 연구는 오개념의 견고성에 영향을 주는 요인을 찾아내고 견고성을 지수화하는데 있다. 문헌연구로부터 견고성에 영향을 주는 요인을 조사하고, 가상적인 데이터에 적용하여 수차례의 수정을 거친후 이들의 적절한 조합으로 견고성 지수를 산출하였다.

1. 문헌연구

문헌연구로부터 견고한 오개념에 영향을 주는 요인은 정답 선택율, 정답 변화율, 최빈오답 변화율이 관계된다는 점을 찾아냈다. 정성적이긴 하지만 관련된 변인들로 오개념의 견고성을 찾아낸 연구자가 Thijs다. Thijs(1987)는 역학과 관련된 22문항을 중, 고, 대, 교사들에게 조사하여 견고한 오개념 문항을 찾아 내는데 다음 세 가지를 고려하였다.

- 1) 정답 선택율이 평균 이하인 경우
- 2) 정답 변화율이 평균 이하인 경우
- 3) 최빈오답 변화율이 평균 이하인 경우

여기에서 정답 선택율이나 최빈오답 선택율에서 선택율이란 총인원수 당 답지 선택 인원이다. 또한 정답 변화율이나 최빈오답 변화율에서 변화율이란 선택율을 학년별로 나타낸 그래프의 기울기를 의미한다.

2. 견고성 지수의 개발

문헌연구로부터 견고성에 영향을 주는 세 요인들을 찾아내어 이들의 조합으로 견고성 지수를 만들었다. 이 견고성 지수를 가상적인 데이터를 이용하여 타당성 및 신뢰성을 검증하여 보았다. 이 과정에서 견고성에 영향을 주는 요인들

추가로 찾게 되었고, 이 요인들이 견고성에 적절히 영향을 미치도록 변형하였다. 이 변형된 요인들이 동시에 견고성에 영향을 미치므로 이들의 적절한 조합으로 견고성 지수를 개발하였다.

3. 자료의 처리

문항의 선택율과 관계된 회귀곡선 및 기타통계는 매킨토시 통계 전문 패키지 SYSTAT 5.2를 사용하였으며, 그래프는 Excel 4.0을 이용하였다.

III. 연구 결과

Thijs 는 견고성에 영향을 주는 요인을 정답 선택율, 정답 변화율, 최빈오답 변화율 등 세가지를 고려하였다. 그러나 최빈오답 변화율이 작으면 오개념이 잘 변화되지 않으므로 견고한 오개념이라고 할 수 있으나, 최빈오답 선택율이 낮다고 한다면 견고한 오개념이 될 수 없다. 따라서 Thijs가 말한 세 요인 외에 최빈오답 선택율도 고려하여 견고성 지수를 만들어야 한다.

위의 네 가지 조건을 적절히 조합한다면 오개념의 견고성을 지수화 할 수 있으리라 생각되었다. 학년에 따라서 정답 선택율과 최빈오답의 선택율을 그래프로 그렸을 때, 정답 변화율을 C(the slope of correct choice)로 나타내고 최빈오답의 변화율을 I(the slope of incorrect choice)로 나타냈으며, 정답 선택율은 MC(mean correct choice), 최빈오답 선택율은 MI(mean incorrent choice)로 나타냈다. 여기서 변화율이란 학년-답지 선택율 그래프에서 기울기를 말한다. 지수 값이 1을 넘지 않게 선택율과 변화율의 최대치를 1로 정했다. 예컨대, 전체 학년에서 1번 문항의 정답 통과율이 30%라고 하면 정답의 선택율이 0.3이 된다. 또한 정답 변화율이나 최빈오답 변화율을 구할 때 조사한 최고학년을 1로 계산하여 기울기를 구했다. 예컨대, 5학년에서 10학년까지를 조사하였을 경우 10학년을 1로 계산하여, 학년-답지 선택율의 그래프를 그렸을 때 기울기가 가능한 1을 넘지않도록 하였다. 변화율의 기울기를 구할 때, 학년이 높아짐에 따라서 학습량도 선형적으로 증가할 것이라고 가정하였다.

1. 견고성 지수에 영향을 주는 요인

견고성을 지수화 할 때는 정답 선택율, 최빈오답 선택율, 정답 변화율, 최빈오답 변화율을 변형하여 사용해야 한다.

이들 요인들은 다음과 같이 오개념의 견고성에 영향을 준다.

1) 정답 변화율 C가 증가하면 견고성 지수는 낮아져야 한다. 따라서 견고성은 1에서 정답 변화율을 뺀 값 (1-C)에 비례하게 된다. 예를 들어 A의 정답 변화율이 0.3, B의 정답 변화율이 -0.3이라고 할 때, A는 수업에 의해서 어느정도 해결된다고 보이지만, B는 수업에 의해서 오히려 견고해진다고 볼 수 있다. A의 견고성은 1에서 0.3을 뺀 0.7이 견고성에 기여한다고 볼 수 있으며, B의 견고성은 1-(-0.3)을 한 1.3이 견고성에 기여한다고 볼 수 있다.

2) 최빈오답 변화율 I가 증가하면 견고성 지수는 높아져야 한다. 따라서 견고성은 최빈오답 변화율에 1을 더한 값 (1+I)에 비례하게 된다. 예를 들어 A의 최빈오답 변화율이 -0.4이고 B의 최빈오답 변화율이 0.3이라고 하자. A는 최빈오답이 점차 감소하는 형태이고, B는 최빈오답이 증가하므로 견고해진다고 볼 수 있다. 따라서 A의 견고성은 1에서 -0.4를 더한 0.6이 견고성에 기여한다고 볼 수 있으며, B의 견고성은 1에서 0.3을 더한 1.3이 견고성에 기여한다고 볼 수 있다.

3) 정답 선택을 MC가 높으면 견고성 지수는 낮아져야 한다. 따라서 견고성 지수는 1에서 정답 선택율을 뺀 값 (1-MC)에 비례하게 된다. 예를 들어 A의 정답 선택율이 0.3이고 B의 정답 선택율이 0.8이라고 하자. A는 정답 선택율이 낮으므로 어떤 오개념이 존재한다고 볼 수 있지만 B의 경우는 정답 선택율이 높기 때문에 오개념이 있다고 보기는 어렵다. A는 1에서 0.3을 뺀 0.7이 견고성에 기여한다고 볼 수 있으며, B는 1에서 0.8을 뺀 0.2가 오개념의 견고성에 기여한다고 할 수 있다.

4) 최빈오답 선택을 MI가 높으면 견고성 지수는 높아진다. 따라서 최빈오답 선택율에 1을 더한 값 (1+MI)에 비례하게 된다. 예를 들어 A의 최빈오답 선택율이 0.4이고 B의 최빈오답 선택율이 0.7일 때, B가 강한 오개념이 있다고 말할 수 있다. A는 1에서 0.4를 더한 1.4가 오개념의 견고성에 영향을 미치게 되며, B는 1에 0.7을 더한 1.7이 오개념의 견고성에 영향을 미치게 된다.

2. 견고성의 지수화 (최빈오답의 견고성)

견고성 지수에 영향을 주는 네 개의 변인(정답 선택율, 최빈오답 선택율, 정답 변화율, 최빈오답 변화율)이 서로 독립적이라고 가정한다. 왜냐하면 정답 선택율이 감소하면 최빈오답이 증가할 수도 있고 아닐 수도 있기 때문이다. 이런 것으로 보아 오개념에서 둘 사이에는 별 상관 없이 보인다.

앞에서 견고성에 영향을 끼치는 비례관계가 동시에 만족해야 하므로 견고성 지수는 다음과 같이 구해진다.

즉 견고성 지수 S(Stability)는

$$S \propto (1-C)$$

$$S \propto (1+I)$$

$$S \propto (1-MC)$$

$$S \propto (1+MI) \text{ 이므로}$$

$$S \propto (1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI)$$

비례상수를 k라 하면 견고성 지수는 다음과 같다.

$$S = K(1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI) \text{이다.}$$

(1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI)의 최대값(부록 참고)을 구한 결과 3이 되었다. 지수의 최대값이 1이하의 값을 갖게 하려면 비례상수의 값을 '1/최대값'으로 정하면 된다. 따라서 견고성 지수는 다음과 같이 표현된다.

$$S = 1/3(1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI) \text{이다.}$$

3. 문항의 견고성

문항에 주로 하나의 오개념 유형이 있을 때는 최빈오답의 견고성이 곧 문항의 견고성이 된다. 그러나 한 문항내 오개념 유형이 2개 이상이 있을 경우가 있다. 이러한 경우 두 가지의 오개념 유형을 모두 고려해야만 문항의 견고성을 나타낼 수 있다. 이러한 경우 제 2의 오개념도 선택율, 변화율을 고려해야 한다. 따라서 문항 내에 i개의 오개념 유형이 있다면 문항의 견고성은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$S = k(1-C)(1-CM)(1+I_1)(1+MI_1)(1+I_2)(1+MI_2) \dots (1+I_i)(1+MI_i)$$

4. 견고성의 타당도 및 신뢰도

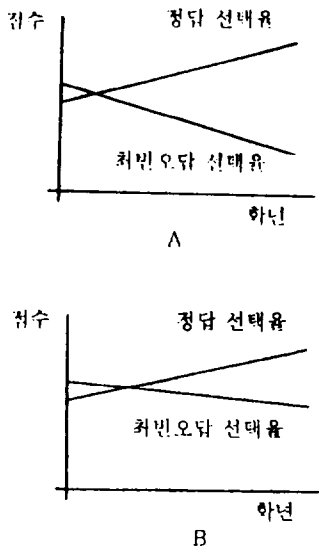
위에서 개발된 견고성 지수가 타당성 및 신뢰성이 있는지 알아 볼 필요가 있다. 이를 위해 다음과 같은 전형적인 오개념 변화유형을 나타내는 가상적인 데이터를 이용하여 그 타당성 및 신뢰도를 알아보았다.

1) 선택율이 같고 변화율이 변할 때의 견고성

정답 선택율과 최빈오답 선택율은 같고, 정답 변화율과 최빈오답 변화율이 다를 경우, 이들이 오개념의 견고성에 어떻게 영향을 주는가를 알아보면 다음과 같다.

	정답 선택율	최빈오답 선택율	정답 변화율	최빈오답 변화율
A	0.5	0.3	0.5	-0.5
B	0.5	0.3	0.3	-0.2

A와 B를 비교하면 B가 더 견고하다고 말한다. 왜냐하면 B는 최빈오답 변화율과 정답변화율의 크기가 작아서 변화가 적기 때문이다. 이러한 경우 그래프와 지수를 비교하여 보자([그림 1]).



[그림 1] 변화율에 따른 견고성

A의 견고성 = 0.08

B의 견고성 = 0.18

이러한 경우 예견한 것과 견고성 지수가 아주 잘 일치한다.

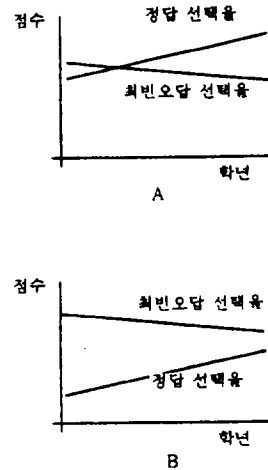
2) 변화율이 같고 선택율이 변할 때의 견고성

정답 변화율과 최빈오답 변화율이 같고, 정답 선택율과 최빈오답 선택율이 다를 경우, 이들이 오개념의 견고성에 어떻게 영향을 주는가를 알아보자.

	정답 선택율	최빈오답 선택율	정답 변화율	최빈오답 변화율
A	0.5	0.3	0.3	-0.2
B	0.3	0.5	0.3	-0.2

A와 B를 비교하면 B가 더 견고하다고 말한다. 왜냐하면 최빈오답 선택을 더 높고 정답선택율은 더 낮기 때문이

다. 이러한 경우 그래프와 지수를 비교하여 보자.



[그림 2] 선택율이 변할 때 견고성

A의 견고성 = 0.18 B의 견고성 = 0.29

그래프를 보고 정성적으로 해석한 것과 정량적인 값이 잘 맞는다.

3) 문항의 견고성

정답 변화율과 최빈오답 변화율, 정답 선택율과 최빈오답 선택율은 같지만, 오개념이 하나인 경우와 제 2의 오개념이 또 있을 때, 견고성에 어떠한 영향을 주는가를 알아보면 다음과 같다.

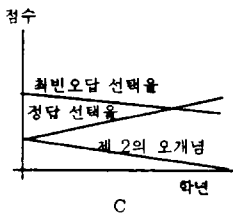
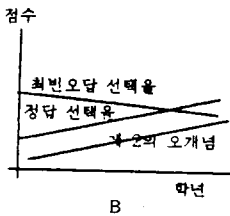
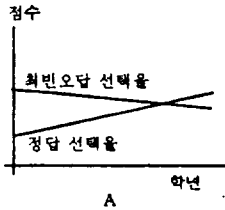
	정답 선택율	최빈오답 선택율	정답 변화율	최빈오답 변화율	2오개념 선택율	2오개념 변화율
A	0.3	0.4	0.3	-0.2		
B	0.3	0.4	0.3	-0.2	0.2	0.3
C	0.3	0.4	0.3	-0.2	-0.3	0.2

이러한 경우 A는 제 2의 오개념이 없으므로 최빈오답의 견고성이 곧 문항의 견고성이 된다. 하지만 B와 C의 경우 제 2의 오개념이 나타남으로 그 문항이 잘 해결되는가는 제 2의 오개념에 영향을 받는다.

A와 B를 비교하면 B가 더 견고하다고 말한다. 왜냐하면 또다른 최빈오답이 학년에 따라서 증가하고 있기 때문이다.

이러한 경우 그래프와 지수를 비교하여 보자.

A와 C를 비교할 때 제 2의 오개념이 감소하기 때문에 큰 영향을 주지 못한다고 기대할 수 있다. 왜냐하면 제 2의 오개념이 증가하면 문항의 견고성에 영향을 주지만 감소하기 때문에 큰 영향을 주지 못한다고 할 수 있다.



[그림 3] 문항의 견고성

A의 견고성= 0.24 B의 견고성= 0.37 C의 견고성= 0.20

B는 제 2의 오개념이 학년이 높아짐에 따라 증가하는 경우인데 이 경우 문항의 견고성은 증가할 것으로 판단된다. 실제로 제 2의 오개념을 고려하지 않을 때의 0.24보다 제 2의 오개념을 고려할 때는 0.37로 높아졌다. 이러한 경우 문항의 견고성은 높아진다.

C는 제 2의 오개념이 학년이 높아짐에 따라 감소하는 경우인데 이 경우 문항의 견고성은 크게 영향을 받지 않을 것으로 기대되었다. 실제로 감소하는 제 2의 오개념을 고려할 때는 0.20이 나왔으며, 제 2의 오개념을 고려하지 않을 때는 0.24였는데 큰 차이가 없다.

즉, 제 2의 오개념 변화율이 증가할 때는 문항의 견고성에 영향을 받으며, 제 2의 오개념 변화율이 감소할 때는 문항의 견고성에 영향을 받지 못한다.

IV. 결론 및 제언

견고성에 영향을 주는 요인들의 적절한 조합으로 다음과 같은 견고성 지수의 산출식을 개발하였다.

$$S = 1/3(1-C)(1+I)(1-CM)(1+IM)$$

문항에 주로 하나의 오개념 유형이 있을 때는 최빈오답의 견고성이 곧 문항의 견고성이 된다. 그러나 한 문항 내 오개념 유형이 2개 이상이 있을 경우가 있다. 이러한 경우 제 2의 오개념도 선택을 및 변화율을 고려해야 한다. 따라서 문항 내에 i 개의 오개념 유형이 있다면 문항의 견고성은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$S = k(1-C)(1-CM)(1+I_1)(1+IM_1)(1+I_2)(1+IM_2) \dots (1+I_i)(1+IM_i)$$

문헌 연구에서 개발한 지수를 가상적인 데이터로 그 신뢰성과 타당성을 알아본 결과 예견했던 내용과 일치했다. 따라서 이 견고성 지수를 오개념의 견고성 연구에 가치있는 도구로 사용할 수 있으며, 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 견고성 지수에 영향을 주는 요인으로는 정답 변화율, 최빈오답 변화율, 정답 선택율, 최빈오답 선택율이 있다. 그런데 대부분의 선행연구에서 어떤 오개념이 견고하다고 할 때, 최빈오답 변화율만 고려했기 때문에 부분적인 특징만을 찾아낼 수 밖에 없었다. 따라서 오개념의 견고성을 연구할 때는 견고성에 영향을 주는 모든 요인을 고려하여 그 특징을 분석하고 그 치료방법을 찾아야 한다.

둘째, 본 연구에서 개발한 오개념 견고성 지수는 견고성에 영향을 주는 모든 요인을 모두 고려했기 때문에 오개념의 근원을 밝히고, 오개념을 극복할 수 있는 교수-학습 모형을 만드는 데 도움을 줄 수 있다.

본 연구에서는 견고성에 영향을 주는 요인을 찾아내고 이들의 적절한 조합으로 견고성을 지수화하였다. 본 연구 결과와 진행과정에서 나타난 문제점을 바탕으로 좀더 나은 오개념의 연구를 위해 다음과 같은 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 견고성 지수를 모든 과목에 개념별로 적용하여 표준화된 지수를 밝히는 연구가 필요하다. 이 표준화된 지수를 이용하면 학생들이 어려워하는 개념을 구체적으로 찾아낼 수 있다. 또한 견고한 오개념의 공통된 특징을 분석하여 일반화하면 오개념의 근원을 밝힐 수 있을 것이다.

둘째, 견고성 지수를 보완할 필요가 있다. 정답 변화율, 최빈오답 변화율, 정답 선택율, 최빈오답 선택율 등이 견고성에 같은 비율로 영향을 준다고 확신할 수 없기 때문이다.

따라서 어떤 가중치를 고려하여 지수를 보완하여야 한다. 셋째, 오개념의 극복을 위한 수업전략에 적용되어야 한다. 수업전략에 어떤 모델을 일률적으로 적용하기 보다는 견고성 정도에 따라서 적당한 모델을 개발하여 적용하여야 한다고 생각한다.

참 고 문 헌

권재술(1989). 과학개념 형성의 한 인지적 모형. 물리교육, 7(1), 1-9.

조희형(1984). 선입관의 철학적 배경 및 오인과 과학 학습의 관계. 한국과학교육학회지, (34-43).

Gilbert, J. K., Osborne, R., & Fensham, P.(1982). Children's

science and it's consequences for teaching. *Science Education*, 66(4), 623-633.

Pines, A. L., & West, L. H. T.(1986). Conceptual understanding and science learning: An interpretation of research with a source-of-knowledge framework. *Science Education*, 70(5), 583-604.

Thijs, D.(1987). Conceptions of force and movement, Intutive ideas of pupils in Zymbabwe in comparison with findings from other countries. Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies In *Science and Mathematics, Volume III*, (pp.501-513). Ithaca, NY: Cornell university.

(ABSTRACT)

The Index of the Stability of Misconceptions

Yung Jick Lee, Jae-Sool Kwon
(Korea National University of Education)

One of the major characteristics in misconceptions is the stability over time. However, the concept of stability has not been defined clearly yet even though some trials to quantify the stability has been done. In this study, the researcher tried to establish a stability index of students' misconception for the quantification.

In this study, the stability of a misconception was defined using mean correct choice (MC), the slope of correct choice (C), mean incorrent choice(MI) and the slope of incorrect choice(I) as follows:

$$I=1/3 (1-C) (1+I)(1-MC)(1+MI).$$

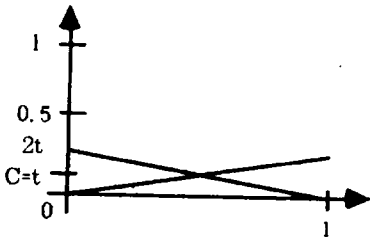
The index developed in the study was examined using artificial data. In this study, the index seemed to represent the characteristics of the stability inferred by theoretically. This means the index developed in this study has some validity for the time being. However, since artificial data were used to exame the index, it showed be reexamined using real data in the future study.

<부록 > 견고성 지수의 최대값

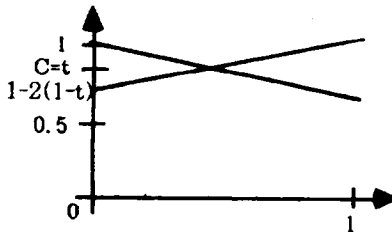
견고성 지수 공식은 $S = K(1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI)$ 이다.

정답 선택율에 따라 최빈오답 선택율, 정답 및 최빈오답 변화율의 범위가 주어진다.

- 1) 정답 선택율과 최빈오답 선택율의 합은 최대값이 1이므로, $MC+MI=1$ 이다.
- 2) 정답 선택율이 t (선택율이 0.5이하)일 때 정답 변화율의 분포범위를 정하자.



(선택율이 0.5이하)



(선택율이 0.5이상)

위 그래프에서 선택율이 t 일 경우 변화율의 분포범위는 $-2t \leq C \leq 2t$ 이다.

최빈오답 선택율은 $(1-t)$ 인데 이 값이 0.5보다 크므로 분포범위는 1에서 $(1-t)$ 를 빼주어야 한다. (선택율이 0.5이상일 때 그래프 참고)

$$2[1-(1-t)] \leq I \leq 2[1-(1-t)]$$

$$2t \leq I \leq 2t \text{ 가 된다.}$$

위에서 정답 선택율에 따라 정답 변화율 및 최빈오답 변화율의 분포 범위는 같아진다.

3) 정답 선택율이 t 일 때 견고성 지수를 구하면 다음과 같다.

견고성 지수가 최대가 되기 위해서는 최빈오답 선택율은 $(1-t)$ 이고, 정답 변화율은 $-2t$ 이며, 최빈오답 변화율은 $2t$ 일 때이다.

$$S = (1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI) \text{에서}$$

$$S = (1-t)(2-t)(1+2t)(1+2t)$$

$0 \leq t \leq 1$ 의 범위에서 S 의 최대값을 얻기 위해서 $S'=0$ 이 되는 t 값을 구하여야 한다. 그러나 S 를 1차 미분한 식은 $S'=16t^3 - 24t^2 - 6t - 5=0$ 이 되는 정수 t 의 값이 존재하지 않으므로, t 값을 0.01에서 0.99까지 0.01단위로 수치를 대입하여 계산한 결과, $t=0.39$ 에서 최대값은 3.11168564가 나왔다. 지수를 간단히 하기 위해서 최대값 3.11168564 대신 근사값 3을 대입하여 견고성 지수를 계산하였다.

따라서 견고성 지수 공식은 $S = 1/3(1-C)(1+I)(1-MC)(1+MI)$ 이다.